$\odot$ Matricola: .... **SI | NO**

Nome: .... Cognome: ....

Algebra 1 – Prova Intermedia – 03.12.10

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1. Siano A un insieme non vuoto, $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti e $\mathcal{F}$ una partizione di A.

   (a) Esiste una applicazione $\mathcal{F} \to \mathcal{P}(A)$ iniettiva ? [Sì] | 1 |

   La partizione $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$, dunque basta considerare la mappa inclusione.

   (b) Esiste una applicazione $A \to \mathcal{F}$ surgettiva ? [Sì] | 2 |

   Si consideri l'applicazione che manda ogni elemento $a \in A$ nella parte di $\mathcal{F}$ contenente a.

   (c) Esiste una applicazione $A \to \mathcal{P}(A)$ iniettiva ? [Sì] | 2 |

   Ad ogni $a \in A$ si associ $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

   (d) Esiste una applicazione $A \to \mathcal{P}(A)$ surgettiva ? [No] | 2 |

   Per il Teorema di Cantor, $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità strettamente maggiore della cardinalità di A. Pertanto non esiste alcuna applicazione surgettiva di A in $\mathcal{P}(A)$.

2. Sia $X = \mathbb{N} - \{0\}$ e $Y \subset \mathbb{N}$ il sottoinsieme degli elementi che dividono 12. Si consideri il prodotto cartesiano $X \times Y$ e la relazione ρ definita in $X \times Y$ da $(x, y)\rho(x', y')$ se si ha che $x \neq x'$ ed esiste $a \in X$ tale che $x' = x^a$ oppure $x = x'$ e y divide y'.

   (a) Mostrare che la relazione ρ è una relazione d'ordine per $X \times Y$. | 2 |

   Se si ricorda il concetto di ordinamento lessicografico, basta provare che la relazione su X definita da $x \sim x'$ se e solo se esiste $a \in X$ tale che $x' = x^a$ è una relazione d'ordine, e che la relazione su Y definita da $y \sim y'$ se e solo se $y \mid y'$ è una relazione d'ordine (entrambe le cose sono ovvie). In ogni caso riportiamo una dimostrazione completa, verificando che valgono per ρ le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

   - *Sia $(x, y) \in X \times Y$: si ha $x = x$ e $y \mid y$, pertanto la riflessività è provata.*
   - *Siano (x, y), (z, w) elementi di $X \times Y$ tali che $(x, y)\rho(z, w)$ e $(z, w)\rho(x, y)$. Si vuole provare $(x, y) = (z, w)$. L'ipotesi è: $\{$(a) $x \neq z$ ed esiste $a \in X$ tale che $z = x^a$ oppure (b) $x = z$ e $y \mid w\}$ e $\{$(c) $z \neq x$ ed esiste $b \in X$ tale che $x = z^b$ oppure (d) $z = x$ e $w \mid y\}$. Evidentemente non possono valere contemporaneamente (a) e (d), così come (b) e (c). Assumiamo dunque (a) e (c) (si osservi che in questo caso, poiché $x \neq z$, si ha $x \neq 1$ e $z \neq 1$): abbiamo $z = x^a$ e $x = z^b$, da cui $z = z^{ab}$, e quindi $ab = 1$, da cui ancora $a = b = 1$ e infine $z = x$, una contraddizione. Resta dunque la possibilità che valgano (b) e (d), dunque $x = z$, $y \mid w$ e $w \mid y$, da cui $y = w$ come si voleva. L'antisimmetricità è provata.*
   - *Siano (x, y), (z, w), (h, k) elementi di $X \times Y$ tali che $(x, y)\rho(z, w)$ e $(z, w)\rho(h, k)$. Si vuole provare $(x, y)\rho(h, k)$. L'ipotesi è: $\{$(a) $x \neq z$ ed esiste $a \in X$ tale che $z = x^a$ oppure (b) $x = z$ e $y \mid w\}$ e $\{$(c) $z \neq h$ ed esiste $b \in X$ tale che $h = z^b$ oppure (d) $z = h$ e $w \mid k\}$. Se valgono (a) e (c): osserviamo che non può essere $x = h$, altrimenti avremmo $z = h^a$ e $h = z^b$, da cui $h = z$, una contraddizione; dunque $x \neq h$, e si ha $h = z^b = x^{ab}$, come si vuole. Se valgono (a) e (d): si ha $x \neq h$ e $h = x^a$, come si vuole. In modo analogo si giunge alla conclusione voluta se valgono (b) e (c). Infine, se valgono (b) e (d), si ha $x = h$, $y \mid w$ e $w \mid k$, da cui $y \mid k$, ed anche in questo caso si giunge alla conclusione. La transitività è provata.*

(b) Trovare elementi massimali (se esistono). 2

Sia $(x, y) \in X \times Y$*. Se* $x \neq 1$*, si ha evidentemente* $(x, y)\rho(x^2, 1)$ *con* $(x^2, 1) \neq (x, y)$*, dunque* (x, y) *non è un elemento massimale. Si consideri allora* $(1, y) \in X \times Y$*; se* $y \neq 12$*, si ha* $(1, y)\rho(1, 12)$ *con* $(1, y) \neq (1, 12)$*, dunque* $(1, y)$ *non è massimale. Concludiamo che l'unico candidato ad essere un elemento massimale è* $(1, 12)$*. In effetti, sia* $(1, 12)\rho(z, w)$*: se* $z \neq 1$ *deve essere* $z = 1^a = 1$*, una contraddizione; dunque* $z = 1$*, e allora* $12 \mid w$*, da cui* $w = 12$*. Concludiamo che* $(1, 12)$ *è effettivamente l'unico massimale.*

(c) Esiste il massimo ? [No] 2

Infatti, l'unico massimale $(1, 12)$ *non è un maggiorante di (ad esempio)* $(2, 1)$*.*

3. Si consideri la matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Dimostrare che per $n \geq 1$ si ha $A^n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$

Procediamo per induzione su n*. La base dell'induzione consiste nel provare vera la proposizione per* $n = 1$*, il che è immediato. Supponiamo dunque vera la proposizione per un fissato* n*, e facciamo il passo induttivo provandola vera per* $n + 1$*. Si ha*

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + 4 \cdot \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4^{n+1}-1}{3} \\ 0 & 4^{n+1} \end{bmatrix},$$

come si voleva. 3

4. Sia data l'equazione diofantea $k^3x + (k^3 - 1)y = 5$ con $k, x, y \in \mathbb{Z}$.

(a) Per quali valori di $k \in \mathbb{Z}$ l'equazione ha soluzioni ? [Tutti] 2

Infatti, per ogni $k \in \mathbb{Z}$*, si ha che* k^3 *e* k^3-1 *sono coprimi (se* $k \neq 1$*, eseguendo la divisione con resto* $k^3 \div k^3 - 1$ *è evidente che si ottiene resto* 1*). Poiché dunque il massimo comun divisore tra* k^3 *e* $k^3 - 1$ *divide* 5*, l'equazione ammette soluzioni.*

(b) Per $k = 3$ le soluzioni sono $[\{(5 + 26k, -5 - 27k) \ : \ k \in \mathbb{Z}\}]$ 2

esprimiamo il massimo comun divisore tra 27 *e* 26 *(vale a dire* 1*) come "combinazione lineare" a coefficienti interi di* 27 *e* 26*. Si ha* $1 = 27 \cdot 1 + 26 \cdot (-1)$*. Moltiplicando quest'ultima equazione per* 5*, si ottiene la soluzione* $(5, -5)$*. La soluzione generale è dunque quella indicata.*

5. Nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} = \{(r, n) \mid r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$ si consideri l'operazione $\star$ così definita:

$$(r, n) \star (s, m) = (rs, n + m)$$

(a) È vero che $\star$ è commutativa ? [Sì] 2

Scambiando i ruoli di r *e* s *e contemporaneamente quelli di* n *e* m*, il risultato dell'operazione non cambia per la commutatività del prodotto in* $\mathbb{R}$ *e della somma in* $\mathbb{Z}$*.*

(b) È vero che $\star$ è associativa ? [Sì] 2

Siano (r, n)*,* (s, m)*,* (t, u) *elementi di* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$*. Si ha*

$$[(r, n) \star (s, m)] \star (t, u) = (rs, n + m) \star (t, u) = ((rs)t, (n + m) + u),$$

e

$$(r,n) \star [(s,m) \star (t,u)] = (r,n) \star (st, m+u) = (r(st), n + (m+u)),$$

e i due risultati sono uguali per l'associatività del prodotto in $\mathbb{R}$ *e della somma in* $\mathbb{Z}$.

(c) È vero che $\star$ ammette elemento neutro? [Sì] | 2 | |

Si verifica immediatamente che $(1,0)$ *funziona da elemento neutro (destro e sinistro) per l'operazione* $\star$ *in* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

(d) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto a $\star$? [No] | 2 | |

Ad esempio, l'elemento $(0,1)$ *non ha inverso. Infatti tale inverso dovrebbe avere sulla prima componente un numero reale che moltiplicato per* 0 *dia* 1.

6. Trovare la minima soluzione $x \in \mathbb{Z}$ positiva del sistema $\begin{cases} x \equiv_3 2 \\ x \equiv_5 1 \\ x \equiv_2 7 \end{cases}$ | 2 | |

Per la prima congruenza, esiste $r \in \mathbb{Z}$ *tale che* $x = 3r + 2$. *Sostituendo nella seconda, si ha* $3r + 2 \equiv_5 1$ *da cui* $r \equiv_5 3$, *dunque esiste* $s \in \mathbb{Z}$ *tale che* $r = 5s + 3$. *In definitiva,* $x = 3(5s+3) + 2 = 15s + 11$. *Utilizziamo ora la terza congruenza (che può essere scritta* $x \equiv_2 1$*): si ha* $15s + 11 \equiv_2 s + 1 \equiv_2 1$, *da cui* $s \equiv_2 0$, *dunque esiste* $t \in \mathbb{Z}$ *tale che* $s = 2t$. *Concludiamo che è* $x = 15s + 11 = 15(2t) + 11 = 30t + 11$, *e la minima soluzione positiva è dunque* 11.