MATRICOLA: .... A$^{\geq 2}$: ... B$^{\geq 3}$: ... C$^{\geq 2}$: ... D$^{\geq 3}$: ... VOTO: ......

COGNOME: .... NOME: ....

Algebra 1 – Esame 17.06.15

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia X un insieme non vuoto e sia $\leq$ una relazione d'ordine totale su X. Consideriamo $(\mathbb{R}, \leq)$ con l'ordinamento usuale dei numeri reali e l'insieme

$$M(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ monotòna}\}$$

1. Se X è infinito allora $M(X)$ è infinito? Inoltre, se X è finito allora $M(X)$ è finito? [ ] 3

Sì NO

Verifichiamo che $M(X)$ e' infinito per ogni $X \neq \emptyset$. Infatti, $M(X)$ contiene l'insieme delle funzioni costanti di X in $\mathbb{R}$, che e' ovviamente infinito.

2. È vero che se $|M(X)| = |M(Y)|$ allora $|X| = |Y|$? [No] 2

Sia $X = \{0\}$ e $Y = \{0, 1\}$. Ovviamente $M(X)$ e' in biezione con $\mathbb{R}$, così come l'insieme C_Y delle funzioni costanti su Y. Inoltre, si ha $C_Y \subseteq M(Y) \subseteq \mathbb{R}^Y$, dove $\mathbb{R}^Y$ e' l'insieme di tutte le funzioni di Y in $\mathbb{R}$. Ora, $\mathbb{R}^Y$ e' in biezione con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il quale ha cardinalità uguale a $\mathbb{R}$. Segue che $|M(Y)| = |\mathbb{R}|$, dunque $|M(X)| = |M(Y)|$, ma $|X| \neq |Y|$

3. Consideriamo la relazione d'ordine sull'insieme $M(X)$ definita da $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. È vero che $(M(X), \leq)$ è totalmente ordinato? [No] 2

Sia $X = \{0, 1\}$, e siano $f, g \in M(X)$ definite da

$f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $g(0) = 1 = g(1)$. Evidentemente

f e g non sono confrontabili nella relazione $\leq$ definita su $M(X)$.

B Per a e b numeri reali, con $a \neq 0$, si consideri la funzione $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_{a,b}(x) = ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $\Sigma = \{f_{a,b} \ : \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ b \in \mathbb{R}\}$, e sia $\circ$ l'ordinaria composizione di funzioni.

1. L'insieme Σ è chiuso rispetto a $\circ$? [Sì] | 3 | |

Si ha $f_{a,b} \cdot f_{c,d} = f_{ac,\, bc+d}$.

2. $(\Sigma, \circ)$ è un gruppo abeliano? [No] | 3 | |

$(\Sigma, \circ)$ e' un gruppo, poiche' $f_{1,0}$ funziona come elemento neutro, e $f_{a,b}$ ha inversa $f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$, tuttavia $f_{1,1} \cdot f_{2,1} = f_{2,3}$, mentre $f_{2,1} \cdot f_{1,1} = f_{2,2}$

3. L'insieme $\{f_{1,b} \ : \ b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo di Σ? [Sì] | 2 | |

Si ha $f_{1,b} \cdot (f_{1,c})^{-1} = f_{1,b} \cdot f_{1,-c} = f_{1,\, b-c}$

C Sia $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss. Sia $p_k(X) \in A[X]$ il polinomio

$$p_k(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^3 + iX^2 + kX + 4 - 3i$$

al variare di $k \in A$.

1. Per quali valori del parametro k il polinomio $p_k(X)$ ha radice $i + 2$? [$k =$ $-3-4i$] $\boxed{3}\boxed{}$

Si tratta di sostituire il valore $i+2$ all'indeterminata X nel polinomio $p_K(X)$ e risolvere rispetto a K l'equazione $p_K(i+2) = 0$

2. Per tali valori di k fattorizzare $p_k(X)$ in polinomi irriducibili di $A[X]$. $\boxed{2}\boxed{}$

Si ha $-3-4i = -(i+2)^2$, e $4-3i = -i(i+2)^2$; dunque

$$p_{-3-4i}(X) = X^3 + iX^2 - (i+2)^2 X - i(i+2)^2 =$$

$$= X^2(X+i) - (i+2)^2(X+i) = (X+i)(X^2 - (i+2)^2) =$$

$$= (X+i)(X-(i+2))(X+(i+2)).$$

3. Il polinomio $g(X) = X^3 + iX^2 - 3X + 1$ ha tutte le sue radici in A? [No] $\boxed{3}\boxed{}$

Si osserva facilmente che una radice di $g(X)$ in A deve dividere il termine noto 1, ovvero deve essere un elemento dell'insieme $\{-1, 1, -i, i\}$. D'altra parte nessun elemento di tale insieme e' una radice di $g(X)$, dunque $g(X)$ non ha alcuna radice in A.

D Si consideri il sistema di congruenze $S : \begin{cases} 8x \equiv_5 3 \\ 8x \equiv_7 3 \\ 8x \equiv_{11} 3 \end{cases}$

1. Mostrare che il sistema S è equivalente al sistema $S' : \begin{cases} x \equiv_5 1 \\ x \equiv_7 3 \\ x \equiv_{11} -1 \end{cases}$ $\boxed{3}\boxed{}$

Riducendo mod. 5, la prima equazione di S diventa $3x \equiv_5 3$, e poiché 3 e' invertibile in $\mathbb{Z}_5$, questa e' equivalente a $x \equiv_5 1$. Inoltre, $8 \equiv_7 1$, dunque la seconda equazione e' $x \equiv_7 3$. Infine, $8x \equiv_{11} 3$ equivale a $-3x \equiv_{11} 3$, ovvero (poiché 3 e' invertibile in $\mathbb{Z}_{11}$) a $x \equiv_{11} -1$.

2. Il sistema è anche equivalente all'equazione $8x \equiv_{385} 3$? [Sì] $\boxed{2}\boxed{}$

Sia z soluzione di $8x \equiv_{385} 3$. Dunque $8z = (5.7.11)k + 3$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. E' dunque evidente che z soddisfa tutte le equazioni di S. Viceversa, se z e' soluzione di S, allora $8z - 3$ e' divisibile per 5, 7 e 11, dunque e' divisibile per $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, dunque $8z \equiv_{385} 3$

3. La più piccola soluzione positiva del sistema S è [241] $\boxed{3}\boxed{}$

Risolviamo il sistema S'. Dalla prima equazione, $x = 5k + 1$; sostituendo nella $\underline{II}$: $5k + 1 \equiv_7 3$, dunque $5k \equiv_7 2$ da cui $k \equiv_7 -1$. Segue che $k = 7h - 1$, quindi $x = 35h - 4$.
Ora $35h - 4 \equiv_{11} -1$ implica $35h \equiv_{11} 3$, dunque $2h \equiv_{11} 3$, cioè $h \equiv_{11} 7$. In definitiva, $x = 35(11t + 7) - 4 =$

$= 385t + 241$.