$\odot$ MATRICOLA: .... A ... B ... C ... D ... VOTO$^{\geq 10}$: ......

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 1 – Esame 17.07.15

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Siano S un insieme non vuoto e sia $f : S \to S$ una applicazione. Sia s un elemento di S e siano $X = \{x \in S \mid f(x) = s\}$ e $Y = \{x \in S \mid f(x) \neq s\}$

1. Se esiste $g : S \to X$ oppure $h : S \to Y$ bigettiva allora S è infinito ? [NO] | 2 | |

Sia $S = \{0\}$, ed $f = id_S$. Per $s = 0$, si ha $X = S$ e si può scegliere $g = f$, tuttavia S non e' infinito.

2. Se $f : S \to S$ è iniettiva non surgettiva allora Y è infinito ? [Si] | 2 | |

L'esistenza di $f : S \to S$ iniettiva non surgettiva garantisce (per definizione..) che S sia infinito. L'iniettività di f implica $|X| \in \{0, 1\}$, e poiché $X \cup Y = S$, necessariamente Y deve essere infinito.

B Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale $n \geq 1$.

1. Si ha che $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$? [Si] | 2 | |

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ n + n-1 + n-2 + \cdots + 1 \\ \hline \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ volte}} \end{array} \; + \; =$$

Dunque $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + n) = n \cdot (n+1)$

(Dimostrazione di Gauss alunno alle scuole elementari..)

2. Si ha che $-n - n + 1 - n + 2 \cdots - 2 - 1 = \frac{-n(n+1)}{2}$? [Si] | 2 | |

$$-n - n + 1 - n + 2 \cdots - 2 - 1 = -(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = -\frac{n(n+1)}{2}$$

C Sia S un insieme e sia $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti. Si consideri l'operazione $\star : \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ così definita: $X \star Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$

1. È vero che $\star$ è commutativa e esiste elemento neutro ? [Sì] | 2 | |

La commutatività segue dal fatto che $\cup$ e $\cap$ sono operazioni commutative; inoltre, $\emptyset$ funziona da elemento neutro.

2. È vero che $(\mathcal{P}(S)\ ,\ \star)$ è un gruppo ? [Sì] | 2 | |

L'operazione è associativa (dimostrato in aula). Inoltre, l'inverso di ogni $X \in P(S)$ è X stesso ($X * X = (X \cup X) - (X \cap X) = X - X = \emptyset$).

D Si consideri l'equazione diofantea $kx + (k+1)y = 36$ con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Per ogni k ammette soluzioni intere ? [Sì] | 2 | |

Infatti, $\text{MCD}(k, k+1) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

2. Per $k = 2$ ammette una ed una sola soluzione ? [No] | 2 | |

Per $k=2$ esiste una soluzione per il punto precedente ed è noto che se l'insieme delle soluzioni di una diofantea del tipo considerato è non vuoto, allora è infinito.