$\boxed{\times}$ MATRICOLA: .... A ... B ... C ... D ... VOTO$^{\geq 10}$: ......

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 1 – Esame 18.09.15

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia $X = S \cup T$ dove S, T sono due sottoinsiemi di un insieme X tali che $S \neq T \neq X$.

1. Esiste un tale X finito con $f : S \to T$ bigettiva ? [Sì] $\boxed{2}\boxed{}$

Si considera $X = \{0, 1\}$, $S = \{0\}$, $T = \{1\}$ ...

2. Esiste un tale X con $f : S \to T$ e $g : T \to X$ bigettive ? [Sì] $\boxed{2}\boxed{}$

Si considera ad esempio $X = \mathbb{N}$, $S = \{2t : t \in \mathbb{N}\}$, $T = \mathbb{N} \setminus S$. In questo caso si può definire $f : x \mapsto x + 1$, $g : x \mapsto \frac{x-1}{2}$ (che hanno inverse $f^{-1} : y \mapsto y - 1$, $g^{-1} : y \to 2y + 1$)

B 1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione tale che: $f(n) = \dfrac{n}{2}$ se n è pari e $f(n) = \dfrac{n+1}{2}$ se n è dispari.
È vero che f è bigettiva ? [NO] $\boxed{2}\boxed{}$

Si ha ad esempio $f(2) = 1 = f(1)$, dunque f non e' iniettiva.

2. Provare per induzione su $n \geq 2$ che: $(1 - \dfrac{1}{2^2})(1 - \dfrac{1}{3^2})(1 - \dfrac{1}{4^2}) \cdots (1 - \dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{n+1}{2n}$. $\boxed{2}\boxed{}$

(Base dell'induzione) Per $n = 2$ diventa $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, che e' vero.

(Passo induttivo) Supponiamo l'uguaglianza vera per $n \geq 2$, e proviamola vera per $n+1$. Si ha

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{2n} \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^{\cancel{2}}}\right) = \frac{\cancel{n}(n+2)}{2\cancel{n}(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}.$$

C Si consideri in $\mathbb{Q}^2$ l'operazione $*$ così definita: $(a_1,b_1) * (a_2,b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1) \in \mathbb{Q}^2$

1. È vero che $(\mathbb{Q}^2, *)$ è un monoide non commutativo ? [Sì] | 2 | |

Verifichiamo l'associatività di $*$.
$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (ac, ad+b)*(e,f) = ((ac)e, (ac)f+ad+b)$;
$(a,b)*((c,d)*(e,f)) = (a,b)*(ce, cf+d) = (a(ce), a(cf+d)+b)$;
Per le proprietà delle operazioni in $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, le due espressioni coincidono. Inoltre, $(1,0)$ funziona da elemento neutro.
Infine, $(0,1)*(0,2) = (0,1)$, mentre $(0,2)*(0,1) = (0,2)$.

2. Mostrare che $(a,0)^n = (a^n,0)$ e $(1,b)^n = (1,nb)$ per ogni $a,b \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$. | 2 | |

Procediamo per induzione su n. Per $n=0$ si ha $(a,0)^0 = (1,0) = (a^0,0)$, e $(1,b)^0 = (1,0) = (1,0b)$. Supponendo le uguaglianze vere per $n \geq 0$: $(a,0)^{n+1} = (a,0)*(a,0)^n = (a,0)*(a^n,0) = (a^{n+1},0)$, inoltre $(1,b)^{n+1} = (1,nb)*(1,b) = (1,b+nb) = (1,(n+1)b)$.

D Siano $a,b \in \mathbb{Z}$ interi non nulli.

1. Provare che M.C.D.$(a,b) = a$ se e solo se m.c.m.$(a,b) = b$ | 2 | |

$MCD(a,b) = a \iff a \mid b \iff mcm(a,b) = b$.

2. Sia $a = 300$ e $b = 490$. Determinare $x,y \in \mathbb{Z}$ tali che:
M.C.D.$(a,b) = xa + yb$ [$x =$ 18 $y =$ −11] | 2 | |

Risolviamo l'equazione diofantea $30x + 49y = 1$; si ha
$49 = 30 \cdot 1 + 19$; $30 = 19 \cdot 1 + 11$, $19 = 11 \cdot 1 + 8$, $11 = 8 \cdot 1 + 3$,
$8 = 3 \cdot 2 + 2$, $3 = 2 \cdot 1 + 1$. Risalendo all'indietro:

$1 = 3 - 2 \cdot 1 = -8 + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 = 7 \cdot 11 - 4 \cdot 19 = 7 \cdot 30 - 11 \cdot 19 =$
$= 18 \cdot 30 - 11 \cdot 49$. Concludiamo che $30 \cdot 18 + (-11) \cdot 49 = 1$,
Dunque $300 \cdot 18 + (-11) \cdot 490 = 10 = MCD(300, 490)$.