$\odot$ MATRICOLA: ........................ **F** **E** **SI** **NO**

NOME: ........................... COGNOME: ............................

**Algebra 1 – Prova Intermedia: I Esonero 18.11.13**

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1. Sia $X$ un insieme. Vogliamo trovare delle condizioni su $X$ che implichino l'esistenza di due sottoinsiemi $X_1$ e $X_2$ tali che $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X = X_1 \cup X_2$ e $|X| = |X_1| = |X_2|$.

   (a) Se $X$ è finito, esistono tali insiemi ? [No] | 2 | |

   *Se $X$ è finito, allora non ha alcun sottoinsieme proprio con la sua stessa cardinalità; dunque un insieme finito che soddisfi le ipotesi è necessariamente vuoto. La proposizione è dunque falsa in generale, e come controesempio possiamo prendere l'insieme $X = \{0\}$.*

   (b) Se $X = \mathbb{N}$, esistono tali insiemi ? [Sì] | 2 | |

   *Se definiamo $X_1$ come l'insieme dei numeri pari e $X_2$ come l'insieme dei numeri dispari, le proprietà richieste sono tutte soddisfatte.*

   (c) Se $X$ è numerabile, esistono tali insiemi ? Se sì, descriverli esplicitamente. [Sì] | 2 | |

   *Poiché $X$ è numerabile, esiste una biezione $\phi$ di $\mathbb{N}$ in $X$. Denotando con $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari, si verifica allora facilmente che gli insiemi $X_1 = \phi(\mathbb{P})$ e $X_2 = \phi(\mathbb{N} \backslash \mathbb{P})$ soddisfano le proprietà richieste.*

2. Sia $(\mathbb{N}, +)$ il monoide additivo dei numeri naturali. Si fissino $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si ponga per $x, y \in \mathbb{N}$

$$x\mathcal{R}y \text{ se } x = y \text{ oppure } x \geq k, y \geq k \text{ e } n \text{ divide } x - y \text{ in } \mathbb{Z}.$$

   (a) $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N}$ ? [Sì] | 2 | |

   *Verifichiamo che siano soddisfatte le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Le prime due sono ovviamente soddisfatte. Per quanto riguarda la transitività, supponiamo $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, e proviamo che vale $x\mathcal{R}z$; l'ipotesi è dunque* $\{$(a) $x = y$ *oppure* (b) $x \geq k, y \geq k$ *e $n$ divide $x - y$ in $\mathbb{Z}$*$\}$, *e* $\{$(c) $y = z$ *oppure* (d) $y \geq k, z \geq k$ *e $n$ divide $y - z$ in $\mathbb{Z}$*$\}$, *e dobbiamo provare che vale* (e) $x = z$ *oppure* (f) $x \geq k, z \geq k$ *e $n$ divide $x - z$ in $\mathbb{Z}$. Ebbene,* (a) *e* (c) *implicano* (e)*;* (a) *e* (d) *implicano* (f)*, così come* (b) *e* (c)*; infine,* (b) *e* (d) *implicano* (f)*, poiché se $n$ divide sia $x - y$ che $y - z$ allora $n$ divide anche $(x - y) + (y - z) = x - z$.*

   (b) È vero che se $x\mathcal{R}y$ e $z\mathcal{R}t$ allora $(x + z)\mathcal{R}(y + t)$ ? [Sì] | 2 | |

   *La nostra ipotesi è* $\{$(a) $x = y$ *oppure* (b) $x \geq k, y \geq k$ *e $n$ divide $x - y$ in $\mathbb{Z}$*$\}$, *e* $\{$(c) $z = t$ *oppure* (d) $z \geq k, t \geq k$ *e $n$ divide $z - t$ in $\mathbb{Z}$*$\}$*; dobbiamo provare che vale* (e) $x + z = y + t$ *oppure* (f) $x + z \geq k, y + t \geq k$ *e $n$ divide $(x + z) - (y + t)$ in $\mathbb{Z}$. Ebbene,* (a) *e* (c) *implicano* (e)*;* (a) *e* (d) *implicano* (f)*, così come* (b) *e* (c)*; infine,* (b) *e* (d) *implicano* (f)*, poiché se $n$ divide sia $x - y$ che $z - t$ allora $n$ divide anche $(x + z) - (y + t) = (x - y) + (z - t)$.*

3. Provare per induzione su $n \geq 1$ che $2^{2n} - 1$ è divisibile per 3. $\boxed{2 \mid \phantom{0}}$

*Per $n = 1$ la proposizione è vera (l'espressione vale 3). Sia allora $n \geq 1$ e, supponendo vera la proposizione per $n$ (ovvero, supponendo che esista $k \in \mathbb{Z}$ tale che $2^{2n} = 3k+1$), la proviamo vera per $n+1$. Si ha*

$$2^{2(n+1)} = 4 \cdot 2^{2n} = 4(3k+1) = 3(4k+1)+1,$$

*da cui otteniamo che $2^{2(n+1)} - 1 = 3(4k+1)$ è divisibile per 3.*

4. Sia data l'equazione diofantea $5kx + 3hy = 16$ con $k, h, x, y \in \mathbb{Z}$.

   (a) E' risolubile per ogni coppia $k, h$ con $(k,h) = 1$ ? [No] $\boxed{2 \mid \phantom{0}}$

   *Per $(k,h) = (3,5)$, l'equazione diventa $15(x+y) = 16$, che non ha evidentemente alcuna soluzione nelle variabili $x, y$.*

   (b) Per $k = 2, h = 1$ le soluzioni sono [$\{(1+3t, 2-10t) \ : \ t \in \mathbb{Z}\}$] $\boxed{2 \mid \phantom{0}}$

   *Per $(k,h) = (2,1)$ l'equazione diventa $10x + 3y = 16$, che ha soluzioni poiché 10 e 3 sono coprimi. Si esprime facilmente l'MCD tra 10 e 3 come combinazione a coefficienti interi di questi due numeri: $1 = 1 \cdot 10 + (-3) \cdot 3$, da cui, moltiplicando per 16 entrambi i membri, si ricava la soluzione particolare $(16, -48)$. È noto che da questa si ricava la soluzione generale*

$$\{(16+3t, -48-10t) \ : \ t \in \mathbb{Z}\} = \{(1+3t, 2-10t) \ : \ t \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Sia $S = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_{20}\}$. Si definisca in $S$ una legge $\star$ ponendo $\forall (a,b), (c,d) \in S$

$$(a,b) \star (c,d) = (ac, ad + 5bc).$$

   (a) È vero che $\star$ è commutativa ? [No] $\boxed{2 \mid \phantom{0}}$

   *Si ha $(1,1) \star (1,2) = (1,7)$, mentre $(1,2) \star (1,1) = (1,11)$.*

   (b) È vero che $\star$ è associativa ? [Sì] $\boxed{2 \mid \phantom{0}}$

   *Si ha*

$$[(a,b) \star (c,d)] \star (e,f) = ((ac)e, (ac)f + 5(ad+5bc)e),$$

   *mentre*

$$(a,b) \star [(c,d) \star (e,f)] = (a(ce), a(cf+5de) + 5b(ce)).$$

   *Come si può facilmente verificare tenendo conto delle proprietà algebriche di $\mathbb{Z}_{20}$, le due espressioni sono uguali.*

   (c) È vero che la coppia $(0,1)$ è elemento neutro? [No] $\boxed{2 \mid \phantom{0}}$

   *Si ha $(1,1) \star (0,1) = (0,1)$.*