⊙ Matricola: .... F E | SI | NO

Cognome: .... Nome: ....

Algebra 1 – Prova Intermedia: I Esonero 18.11.14

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

1. Sia X un insieme e $A, B \subseteq X$. Consideriamo $F = \{A \setminus B, B \setminus A, A \cap B\}$ famiglia di sottoinsiemi di X.

   (a) Per quali A e B la famiglia F è una partizione di X ? [2]

   Si ha che F e' una partizione di X se e solo se valgono tutte le seguenti condizioni: 1) $X = A \cup B$, 2) $A \not\subseteq B$, 3) $B \not\subseteq A$, 4) $A \cap B \neq \emptyset$

   (b) Se due dei tre insiemi in F sono numerabili, lo è anche $A \cup B$? [NO] [2]

   Sia ad esempio $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{Q}$; si ha che B e' numerabile dunque lo sono $B \setminus A$ e $A \cap B$, ma $A \setminus B$ non lo e'.

   (c) Sia $A \cup B = \mathbb{N}$. Trovare A e B tali che i tre insiemi di F siano tutti numerabili. [2]

   Si ponga $A = \{2K : K \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{2K+1 : K \in \mathbb{N}\} \cup \{6K : K \in \mathbb{N}\}$

2. Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ definiamo la relazione $\mathcal{R}$ come segue: $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ se $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

   (a) $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza ? [Si] [2]

   Le proprieta' riflessiva, simmetrica e transitiva seguono da riflessivita', simmetricita' e transitivita' dell'uguaglianza.

   (b) Descrivere classe di equivalenza $[(0, 0)]$. [2]

   Si tratta delle coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2+y^2=0$, ovvero della sola coppia $(0,0)$.

   (c) Descrivere la classe di equivalenza di $[(a, b)]$ quando $ab \neq 0$. [2]

   Si tratta delle coppie che, nella biezione tra $\mathbb{R}^2$ e il piano dotato di riferimento cartesiano, corrispondono ai punti del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{a^2+b^2}$.

3. Provare per induzione su $n \geq 3$ che

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2.$$

Usiamo la formula $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Base dell'induzione:

$\binom{5}{3} - \binom{3}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} - 1 = \binom{4}{2} + 3 = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + 3 = 3+3+3 = 9$.

PASSO INDUTTIVO: $\binom{n+3}{3} - \binom{n+1}{3} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{2} - \binom{n}{3} - \binom{n}{2} =$

$= n^2 + \binom{n+2}{2} - \binom{n}{2}$. Osservo che $\forall n \geq 1$ $\binom{n+1}{2}$ è la somma dei primi n numeri naturali, dunque otteniamo $n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

4. Sia data l'equazione diofantea $2kx + 7hy = 18$ con $h, k, x, y \in \mathbb{Z}$.

(a) E' risolubile per ogni coppia k, h con $(k, h) = 1$? [NO] 2

Si scelgano ad esempio $k = 7$, $h = 1$; l'equazione diventa $14x + 7y = 18$, che non ha soluzioni poiché $MCD(14, 7) = 7$ non divide 18.

(b) Per $k = 2, h = 1$ le soluzioni sono [vedi (*)] 2

L'equazione diventa $4x + 7y = 18$, ed ha soluzioni perché $MCD(4, 7) = 1$ divide 18. Esprimo 1 come "combinazione" di 4 e 7: $1 = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 7$. Dunque $(36, -18)$ è una soluzione. L'insieme di tutte le soluzioni è

(*) $\{(36 + 7t, -18 - 4t) : t \in \mathbb{Z}\}$

5. Siano $\mathbb{R}^+$ i numeri reali positivi. Per $x, y \in \mathbb{R}^+$ sia $\star$ la legge $x \star y = \sqrt{xy}$.

(a) È vero che $\star$ è commutativa ? [Sì] 2

Segue dalla commutatività del prodotto in $\mathbb{R}$.

(b) È vero che $\star$ è associativa ? [No] 2

Si ha $2 \star (1 \star 3) = 2 \star \sqrt{3} = \sqrt{2\sqrt{3}}$, mentre $(2 \star 1) \star 3 = \sqrt{2} \star 3 = \sqrt{\sqrt{2} \cdot 3}$; i due valori sono ovviamente diversi.

(c) Esiste un elemento neutro? [NO] 2

Se e fosse elemento neutro, sarebbe $1 \star e = 1$, ovvero $\sqrt{e} = 1$, ovvero $e = 1$; ma $2 \star 1 = \sqrt{2} \neq 2$.