$\beth$ Matricola: .... $\mathbf{A}^{\geq 2}$:... $\mathbf{B}^{\geq 3}$:... $\mathbf{C}^{\geq 2}$:... $\mathbf{D}^{\geq 3}$:... Voto: ......

Cognome: .... Nome: ....

Algebra 1 – Esame 20.02.13

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n = 2k \quad k \in \mathbb{N} \\ (n+1)/2 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

1. È vero che f non è iniettiva ma è surgettiva ? [Sì] | 2 | |

Infatti si ha $f(1) = 1 = f(2)$, dunque f non è iniettiva. D'altra parte, l'immagine tramite f dell'insieme dei numeri naturali pari ricopre già tutto $\mathbb{N}$, da cui la suriettività.

2. È vero che esistono infinite funzioni $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che $fg = id$? [Sì] | 3 | |

Una funzione g come nell'enunciato si costruisce (tramite l'assioma della scelta) associando ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un elemento di $f^{-1}(\{n\})$ (la preimmagine di n tramite f). Poiché ci sono infiniti elementi di $\mathbb{N}$ la cui preimmagine tramite f contiene più di un elemento, è evidente che una tale g può essere costruita in un numero infinito di modi.

3. È vero che f è un endomorfismo del monoide $(\mathbb{N}, +, 0)$? [No] | 2 | |

Infatti $f(1+1) = f(2) = 1$, ma $f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$.

B Sia S l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ al variare di $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$.

1. È vero che $S \subseteq M_2(\mathbb{Z}_4)$ contiene elementi nilpotenti non nulli ? [Sì] | 3 | |

   Ad esempio, l'elemento $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *elevato al quadrato dà la matrice nulla.*

2. È vero che $S \subseteq M_2(\mathbb{Z}_4)$ è un ideale bilatero ? [No] | 2 | |

   Ad esempio, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in S$, *ma* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S$.

3. Determinare gli elementi invertibili in S. [$a = \pm 1$, $c = \pm 1$] | 3 | |

   Un elemento $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ *di* S *è invertibile in* $M_2(\mathbb{Z}_4)$ *se e solo se* ac *è invertibile in* $\mathbb{Z}_4$, *ovvero* $ac \in \{1, -1\}$, *e in tal caso la sua inversa è* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ -abc & c \end{pmatrix}$. *Poiché quest'ultima matrice è anch'essa in* S, *concludiamo che* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ *è invertibile in* S *se e solo se* $ac \in \{1, -1\}$, *da cui segue immediatamente quanto affermato.*

C Sia $p(X) = X^4 + 4X^2 + r$ con $r \in \mathbb{Q}$.

1. Determinare i numeri razionali $r \in \mathbb{Q}$ tali che $p(X) = 0$ ha una radice multipla in $\mathbb{Q}$. | 3 | |

Si vede facilmente che $p(X)$ ha una radice multiple α se e solo se α è radice anche del polinomio $p'(X) = 4X^3 + 8X = 4X(X^2 + 2)$. Poiché quest'ultimo polinomio ha 0 come unica radice razionale, concludiamo che se $p(X)$ ha una radice multipla in $\mathbb{Q}$ tale radice deve essere 0. Ma allora si ha $0 = p(0) = r$, ed in effetti per $r = 0$ il polinomio $p(X)$ ha radice 0 con molteplicità 2.

OPPURE: per definizione, $p(X)$ ha una radice multipla α se e solo se $p(X)$ è divisibile per $(X-\alpha)^2 = X^2 - 2\alpha X + \alpha^2$. Eseguendo la divisione, si ottiene un resto con coefficiente principale $4\alpha^3 + 8\alpha$, e questo deve essere 0. Concludiamo che α deve essere una radice razionale di $4X^3 + 8X$, e ritroviamo la stessa condizione di sopra...

2. Mostrare che $p(X) = X^4 + 4X^2 - 10$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$. | 2 | |

Sia $q(X)$ un divisore irriducibile di $p(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$. Essendo $\mathbb{R}[X]$ un U.F.D., il polinomio $q(X)$ deve essere a sua volta un prodotto di divisori irriducibili di $p(X)$ in $\mathbb{R}[X]$. Tuttavia, guardando la fattorizzazione di $p(X)$ in irriducibili di $\mathbb{R}[X]$ (punto 3), ci si rende conto facilmente che l'unico prodotto di tali irriducibili a coefficienti razionali è $p(X)$ stesso.

3. Mostrare una fattorizzazione di $p(X) = X^4 + 4X^2 - 10$ in $\mathbb{R}[X]$. | 3 | |

Si ponga $t = X^2$: l'equazione $p(X) = 0$ diventa $t^2 + 4t - 10 = 0$, che può essere risolta con il ben noto metodo. Si ricavano due radici reali $t \in \{-2 \pm \sqrt{14}\}$, da cui la fattorizzazione $p(X) = (X^2 + 2 + \sqrt{14})(X^2 + 2 - \sqrt{14})$. Evidentemente il primo fattore è irriducibile in $\mathbb{R}[X]$, mentre il secondo si spezza ulteriormente in $(X + \sqrt{-2 + \sqrt{14}})(X - \sqrt{-2 + \sqrt{14}})$.

D Si consideri l'anello $A = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 8)$.

1. È vero che $\mathrm{char}(A) = 0$? [Sì] | 3 | |

   Non esiste alcun intero positivo n tale che $n((X^2 - 8) + 1) = (X^2 - 8) + n$ sia lo zero dell'anello A, ovvero $(X^2 - 8) + 0$. Ciò equivale infatti alla condizione che $X^2 - 8$ sia un divisore di n in $\mathbb{Q}[X]$.

2. È vero che A è un campo ? [Sì] | 3 | |

   Il polinomio $X^2 - 8$ non ha radici in $\mathbb{Q}$, ed è pertanto (avendo grado 2) irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$. Come ben noto, questo implica che l'ideale $(X^2 - 8)$ sia massimale in $\mathbb{Q}[X]$.

3. Calcolare l'inverso moltiplicativo della classe di X in A. $[(X^2 - 8) + X/8]$ | 2 | |

   Infatti, $X \cdot X/8 = X^2/8$ è congruo 1 modulo $X^2 - 8$, poiché $X^2/8 - 1 = (X^2 - 8) \cdot 1/8$.