$\boxed{\times}$ MATRICOLA: .... A ... B ... C ... D ... VOTO$^{\geq 10}$: ......

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 1 – Esame 20.07.11

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un sottoinsieme infinito dei naturali.

1. Esiste una catena $S \supset S' \supset S'' \supset \cdots$ di sottoinsiemi infiniti ? [Sì] | 2 | |

   È evidente che ogni insieme infinito X contiene propriamente un insieme infinito. Basta considerare un elemento $x \in X$ e il sottoinsieme proprio (ovviamente infinito) $X' = X \setminus \{x\}$.

2. Esiste sempre $f : \mathbb{N} \to S$ iniettiva ? [Sì] | 2 | |

   In realtà esiste una biezione di $\mathbb{N}$ in S; infatti S ha cardinalità infinita al più numerabile (essendo un sottoinsieme di $\mathbb{N}$), per cui ha cardinalità numerabile. Oppure, si tratta della definizione di insieme infinito secondo Dedekind.

B 1. Quanto vale la differenza $\sum_{k=2}^{100} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{99} \sqrt{k}$? | 2 | |

Si ha

$$\sum_{k=2}^{100} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{99} \sqrt{k} = \sqrt{100} + \sum_{k=2}^{99} \sqrt{k} - \sum_{k=2}^{99} \sqrt{k} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9.$$

2. Mostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$(1 \cdot 2 \cdot 3) + (2 \cdot 3 \cdot 4) + ... + n(n+1)(n+2) = 6 \binom{n+3}{4}$$

| 2 | |

Per $n = 1$, si ottiene $6 = 6$, che è vero. Supponiamo dunque che la proposizione sia vera per $n \geq 1$ e proviamola vera per $n+1$. Si ha

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= 6 \binom{n+3}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} =$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{4} = 6 \binom{(n+1)+3}{4}.$$

C Sia $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss.

1. È vero che $1 + i$ e $1 - i$ sono associati in A ? [Sì] | 2 | |

   Si ha $1 + i = (1 - i)i$ *e l'elemento* i *è invertibile (con inverso* $-i$*).*

2. È vero che in A ogni ideale primo è massimale ? [Sì] | 2 | |

   La proposizione è senz'altro vera in un P.I.D, ed A *lo è.*

D Si consideri l'equazione diofantea $121x + 9y = 2$.

1. L'eq. ha soluzioni in $\mathbb{Z}_2$? [Sì]

   In $\mathbb{Z}_2$ *l'equazione diventa* $x + y = 0 \ldots$ | 2 | |

2. L'eq. ha soluzioni in $\mathbb{Z}$? [Sì] | 2 | |

   Ciò segue dal fatto che 121 *e* 9 *sono coprimi, dunque il loro massimo comun divisore divide* 2*. Notare che questo implica la risposta del punto precedente.*