$\odot$ MATRICOLA: .... A ... B ... C ... D ... VOTO$^{\geq 10}$: ......

NOME: .... COGNOME: ....

Algebra 1 – Esame 26.09.11

Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Sia S un insieme non vuoto.

1. L'applicazione $f : S \to \mathcal{P}(S)$ definita da $f(x) =: S - \{x\}$ è iniettiva ma non suriettiva ? | 2 | |

   Sì. Infatti, siano x,y elementi di S. L'insieme $S - \{x\}$ è il complementare $\mathcal{C}_S(\{x\})$ di $\{x\}$ in S; dunque, la condizione $\mathcal{C}_S(\{x\}) = \mathcal{C}_S(\{y\})$ implica $\{x\} = \mathcal{C}_S(\mathcal{C}_S(\{x\})) = \mathcal{C}_S(\mathcal{C}_S(\{y\})) = \{y\}$, da cui l'iniettività. D'altra parte, $S \in \mathcal{P}(S)$ non sta nell'immagine di f, dunque f non è suriettiva.

2. L'applicazione $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ definita associando ad ogni $X \in \mathcal{P}(S)$ l'insieme $S - X$ è invertibile ? | 2 | |

   Sì. Come osservato sopra, $f(X)$ non è altro che il complementare di X in S. L'iniettività segue generalizzando ad un qualunque sottoinsieme di S il ragionamento fatto al punto precedente per i sottoinsiemi di cardinalità 1. Inoltre, ogni elemento di $\mathcal{P}(S)$ è immagine tramite f del suo complementare in S.

B 1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione così definita $f(x) = 3x + 2$. Provare che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$,

$$f^n(x) = 3^n x + 3^n - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

| 2 | |

Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ la proposizione è ovviamente vera. Supponiamola dunque vera per un fissato $n \geq 1$ e proviamo che vale anche per $n + 1$. Si ha

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(3^n x + 3^n - 1) = 3(3^n x + 3^n - 1) + 2 = 3^{n+1}x + 3^{n+1} - 1,$$

ed il passo induttivo è completo.

2. Provare che $\forall n \geq 1$ si ha $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ | 2 | |

   Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ la proposizione è ovviamente vera. Supponiamola dunque vera per un fissato $n \geq 1$ e proviamo che vale anche per $n + 1$. Si ha

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (n + 1)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)! =$$

$$= (n + 1)!(1 + n + 1) - 1 = (n + 2)! - 1,$$

ed il passo induttivo è completo.

C Siano $a, b \in \mathbb{Q}$. Sia $g_{a,b} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\ x \mapsto ax + b$ e G=$\{g_{a,b} \ \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$

1. G è chiuso rispetto al prodotto $\circ$ di applicazioni ? | 2 | |

   Sì. Infatti si può facilmente verificare che vale $g_{a,b} \circ g_{c,d} = g_{ac,bc+d}$ *(e naturalmente* $ac \neq 0$.*) N.B. Nella scrittura* $g_{a,b} \circ g_{c,d}$ *si intende che venga applicata prima* $g_{a,b}$ *e poi* $g_{c,d}$.

2. $(G, \circ)$ è un gruppo ? è abeliano ? | 2 | |

   $(G, \circ)$ *è un gruppo. Infatti evidentemente l'identità è in* G *(è l'elemento* $g_{1,0}$*), per il punto precedente l'operazione è chiusa, ed infine ogni applicazione* $g_{a,b} \in G$ *ha inversa* $g_{a^{-1},-a^{-1}b}$ *che è ancora in* G *(non è ovviamente necessario controllare l'associatività ...).*
   D'altra parte, non si tratta di un gruppo abeliano. Ad esempio, $g_{1,1} \circ g_{2,0} \neq g_{2,0} \circ g_{1,1}$.

D Sia $\mathbb{Z}_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_5$ delle classi di resti modulo 5 e siano $f_k(x) = x^3 + kx + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$

1. per quali valori di $k \in \mathbb{Z}_5$ il polinomio $f_k(x)$ ammette radici ? | 2 | |

   Una verifica diretta mostra che $f_k(x)$ *ammette radici per tutti e soli i* $k \in \{0, -1, -2\}$ *(rispettivamente* $x = -1$, $x = -2$, $x = 1$*).*

2. per quali valori di $k \in \mathbb{Z}_5$ il polinomio $f_k(x)$ è primo con $g(x) = x^2 - 1$? | 2 | |

   Poiché si ha $x^2-1 = (x+1)\cdot(x-1)$, *il polinomio* $f_k(x)$ *non è primo con* x^2-1 *esattamente quando almeno un valore tra* 1 *e* -1 *è radice di* $f_k(x)$, *dunque per* $k \in \{0, -2\}$.