



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

## DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "FEDERIGO ENRIQUES"

MARCO FRITTELLI  
*Professor of Mathematical Finance*

Marco.Frittelli@unimi.it  
Office: 0039 02 503 16143

### **Finanza Matematica 1**

Primo Semestre, A.A. 2024-2025

#### **I Introduzione ai mercati finanziari e alle opzioni**

Introduzione generale alla Finanza Matematica. Leggi finanziarie e regimi di capitalizzazione. Relazione di preferenza e loro rappresentazione in termini di utilità attesa. Avversione al rischio e certo equivalente. Mercato uniperiodale: modello binomiale e trinomiale. Opzioni: definizioni e caratteristiche. Principio di non arbitraggio. Replicabilità di contingent claims. Completezza e incompletezza del mercato. Misure neutrali al rischio. La valutazione delle opzioni replicabili. Put-Call parity. Strumenti speculativi e di copertura.

#### **II Cenni sui processi stocastici in tempo discreto**

Spazi di probabilità. Richiami sugli spazi  $L_p$ . Definizione e proprietà del valor atteso condizionato. Processi stocastici, processi adattati e prevedibili, filtrazione naturale. Martingale in tempo discreto. Supermartingale e decomposizione di Doob. La proprietà di submartingala del quadrato di una martingala. Misure equivalenti di martingala. Proprietà di martingala dell'integrale stocastico elementare.

#### **III Mercati in tempo discreto.**

Il mercato multi-periodale. Strategie d'investimento. Il processo del valore del portafoglio. I "contingent claims" replicabili. Opportunità di arbitraggio e il principio di non arbitraggio. Misure di probabilità equivalenti di martingala e valutazione neutrale al rischio. Il I teorema fondamentale di valutazione: NA è equivalente all'esistenza di una misura equivalente di martingala. Il II teorema fondamentale di valutazione: completezza del mercato. La formula di valutazione di claims replicabili. Il modello binomiale: la formula di valutazione e le strategie di copertura. Valutazione di contingent claims particolari: Opzioni Lookback, Asiatiche, Chooser, Compound.

#### **IV Completezza e incompletezza del mercato**

Richiami di analisi funzionale: spazi duali, topologie compatibili con un sistema duale, topologie deboli. Cono polare e bipolare, teorema bipolare.

L'insieme  $K$  e sua caratterizzazione attraverso strategie  $d$ -dimensionali. Il cono  $C$  dei contingent claims super replicabili. La condizione di non arbitraggio. Dimostrazione generale del I FTAP, sia nel mercato uniperiodale condizionale sia in quello multi periodale. Condizione di NFL e di NFLVR e la chiusura debole di  $C$ . Relazioni fra NA, NFL, NFLVR. Equivalenza fra NFL e  $M^e$  non vuoto.

Caratterizzazione dell'insieme delle misure di martingala  $M^a$ , come insieme polare di  $C$  (normalizzato). Caratterizzazione del cono  $C$  come polare di  $M^a$ . Densità in  $M^a$  dell'insieme delle misure equivalenti di martingala.

Caratterizzazione dei contingent claims replicabili. Dimostrazione del II FTAP.

Mercati incompleti. Valutazione di contingent claims in mercati incompleti. Il prezzo di super-replicazione e l'intervallo di non arbitraggio. Teorema di dualità per il prezzo di super replicazione nell'ipotesi che il cono convesso  $C$  sia debolmente chiuso.

Massimizzazione dell'utilità attesa. Definizione di "Fair Price" di un contingent claim. La misura equivalente di martingala associata al Fair Price. Il caso dell'utilità esponenziale. Il problema della



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

## DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "FEDERIGO ENRIQUES"

minimizzazione dell'entropia relativa. Dualità fra massimizzazione dell'utilità esponenziale e minimizzazione dell'entropia relativa.

### V Collective Arbitrage e Collective Super-replicazione

Il mercato segmentato, la nozione di arbitraggio collettivo, le misure di martingale collettive, il I FTAP collettivo, il prezzo di super replicazione di  $N$  contingent claims, classico e collettivo, la dualità di super hedging nel caso collettivo, esempi di prezzi di super replicazione collettivo.

### VI Opzioni americane in mercati completi

Contingent claim americani, tempi di arresto e strategie di esercizio, decomposizione di Doob, processi arrestati, Doob's Stopping theorem per martingale e supermartingale.

Approccio del seller, l'inviluppo di Snell e proprietà.

Approccio del buyer, il problema del tempo d'arresto ottimale, l'inviluppo di Snell come soluzione. Due caratterizzazioni dei tempi d'arresto ottimali. Tempi d'arresto *min* e *max*. Tempo d'arresto per  $P^*$  e copertura  $P^*$ -q.o.

Paragone fra le opzioni americane ed europee, call e put: teoria e interpretazione.

### Testi di riferimento:

S. Pliska: "Introduction to Mathematical Finance", Blackwell, 1997.

H. Follmer, A. Schied: "Stochastic Finance", 4<sup>th</sup> Edition, de Gruyter, 2016.

S. Shreve: "Stochastic Calculus for Finance I", Springer, 2004.

C. Aliprantis, K. Border: "Infinite Dimensional Analysis", 3<sup>rd</sup> Edition, Springer 2006.

D. Williams: "Probability with martingales", Cambridge University Press, 1991.

Articoli proposti dal docente