

Argomento 4

Esercizi

Esercizio. 4.1 Stabilire se le seguenti funzioni sono infiniti per $x \rightarrow +\infty$ e in tal caso se sono di ordine superiore, inferiore o uguale a $f(x) = x$:

1. x^4

2. $1 + \sqrt{2x} + 5x^2$

3. $x^3 - 2e^{-x}$

4. $\sqrt{2x+1}$

5. $x - 2x^{\frac{5}{2}}$

6. $2x + 3\sqrt{x}$

Argomento

Soluzione

Esercizio. 4.2 Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-2x}{3x-7}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x+5}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3+7x+5}{9x^3+x-2}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{e^x}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2^x}{2x^2+3^x}$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+3^x}{3x^4+2^x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^2 + 2^{-x}}{\log x^3 + 3^{-x}}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{\log x}{x^2+x}}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{1 - x - 3x^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x + \log(-x)}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{4x^2+1}{x^2-x} \right)$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + \log x}{2e^{3x} + 1}$

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2-x})$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2} - x)$

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$

18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+4})$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.3 Stabilire se le seguenti funzioni sono infinitesimi per $x \rightarrow 0^+$ e in tal caso se sono di ordine superiore, inferiore o uguale a $f(x) = x^3$:

1. x^8

2. $x^7 + 2x^4 - 3x^3$

3. $x^6 + 1$

4. $2x^3 - \sqrt{x^3} + 5x^6$

5. $x + x^{-3}$

6. $2x^3 - 2x^{\frac{11}{2}}$

Argomento

Soluzione

Esercizio. 4.4 Calcolare i seguenti limiti:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + x^2 + 5x}{x^5 + 4x^3 - x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 2x^2}{x^7 - x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^4 + 3x^3 + 4x}{3x^5 + 4x^2}}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{4}{3}} + 2x^2 + 5x}{x^5 - x^3 - \sqrt{x}}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left(\frac{x^4 + 3x^2}{x - x^7} \right)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{5x^3 + 2x^2}{x^7 - x^2}}$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.5 Stabilire se le seguenti funzioni sono infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$ ed in tal caso se sono di ordine superiore, inferiore o uguale a $f(x) = 1/x$:

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|--|
| 1. $\frac{1}{x^2}$ | 2. $\frac{1}{x+1}$ | 3. $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ |
| 4. $\frac{x+3}{x^2-2}$ | 5. $\frac{x^3-x+2}{2x^2-1}$ | 6. $\frac{x^{\frac{4}{3}}-x^2+5x}{2x^3-x^2\sqrt{x}}$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.6 Calcolare i seguenti limiti:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\tan x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{3 \sin x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\arctan x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^5 + 2x^4}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\tan^2 x}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x - x^3}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x^2}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4x^3}{\sin x + x^2}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - 4x}{x}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x^2 - x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^4+1} - 1)}{e^x - \cos x}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x^2}{\sqrt{x} + (\sqrt{x+1} - 1)}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 3x^2}{3x}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x} - \log(1+x)}$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.7 Scrivere a quali potenze di x moltiplicate per un numero sono asintotiche le seguenti funzioni per $x \rightarrow 0^+$:

- | | | | |
|----------------------------|-------------------------|--------------------|----------------------------------|
| 1. $\sin(x^2 + x^4)$ | 2. $\log(\sqrt{x} + 1)$ | 3. $\cos(x^3) - 1$ | 4. $(x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1$ |
| 5. $(e^{\sqrt{x}} - 1)x^4$ | 6. $(x+1)^3 - 1$ | 7. $\sin^4 x$ | 8. $\arctan(x) + x^3$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.8 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \log(1+x)}{(e^x - 1)x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 1 - x^3}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^5 - 1}{\sin x - 2x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{7x + \cos x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1 - \sin x}{\log(x+1)}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^3 - 2x^5}$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.9 Calcolare i seguenti limiti:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \log(x-1)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.10 Calcolare i seguenti limiti:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \log \frac{1}{x}\right)$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1}$ |
|---|---|---|

Argomento

Soluzione

Esercizio. 4.11 Calcolare i seguenti limiti:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{\frac{1}{2^x - x - 1}}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{3}{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}x}$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio. 4.12 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x^4 + x} - x \right)$$

al variare di α reale.

*Argomento**Suggerimento**Soluzione***Esercizio. 4.13 (Esercizi facoltativi di riepilogo)** Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - x^5}{\sqrt{x^3} - x^2}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5 \log x + 2}{x - e^x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 1} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + e^{3x}}{x^4 + e^{2x}}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2^x}{2x^4 + e^x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x^4 - e^{-x} + \frac{1}{x}}{3 \log x^3 + e^{-2x} + \frac{2}{x^2}}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x + 1}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x + 5} \log(x^2 + 2)$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 \log(x^4)$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{-x} + \arctan x - x^4)$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 1 - e^x}{\sqrt{x^3} - \log(1 + 2x)}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + \sqrt{4x} - \log(x))$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 3x^5}{x^8 + \sqrt{x^7}}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{x+2}{x-2}}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$ |
| 16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^8 + 2}}{x^3}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x + 5} \right)$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{e^{2x} + 4}$ |
| 19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x^3 - \frac{1}{x + 2} \right)$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\log x}$ | 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) + 4x^5 + 2^x}{\sin x + x^2}$ |
| 22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2})$ | 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin^2(2x)}{e^{x^2} - 1}}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x)^{x+2}$ |

Soluzione