



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Appunti di ottica Quantistica

Seconda quantizzazione



Simone Cialdi

Outline

Quantizzazione del campo EM (approccio Lagrangiano)	pg. 3-35
Dimostrazioni di tipo A (Casimir) e di tipo B (Lamb Shift)	pg. 36-39
Diagrammi di Feynman	pg. 40-49
Il vuoto nei diagrammi di Feynman (dimostrazioni di tipo B)	pg. 50-53
Rinormalizzazione (Lamb Shift)	pg. 54-69
Unità naturali	pg. 70-71
Nota sulle teorie di gauge	pg. 72-77
Appendice (A) controtermine fotonico	pg. 78
Appendice (B) vuoto e rivelazione omodina	pg. 79-82
Appendice (C) approfondimento sulle dimostrazioni di tipo A (Casimir)	pg. 83-89



Quantizzazione del campo EM (trattazione Lagrangiana)

In questo approccio il campo EM è un campo di gauge che nasce quando si impone che la teoria per i fermioni sia invariante sotto $U(1)$ locale. Quindi dobbiamo partire dall'equazione per i fermioni.

Per i fermioni vogliamo scrivere un'equazione che soddisfi la relazione fondamentale tra energia, impulso e massa e che contenga una derivata prima rispetto al tempo in modo da poter interpretare la sua Ψ come ampiezza di probabilità (come nel caso dell'eq. di Schrodinger).

Inoltre, per alleggerire la notazione poniamo: $\hbar = 1 \quad c = 1$

Quindi abbiamo:

$$p_\mu p^\mu = m^2 \quad \text{dove} \quad p^\mu = (\varepsilon, \underline{p}) \quad p_\mu = (\varepsilon, -\underline{p})$$

$$p_\mu = i \partial_\mu \quad \text{poichè} \quad \begin{cases} \varepsilon = i \frac{\partial}{\partial t} = i \partial_t \\ \underline{p} = -i \nabla \end{cases} \quad \begin{aligned} \partial_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \\ \partial^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \end{aligned}$$



breve richiamo sui quadrivettori in relatività speciale

$$p^\mu = \eta^{\mu\nu} p_\nu \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu p^\nu \quad p_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} p_\nu \quad \Lambda^{\mu'}_\nu = \frac{dx^{\mu'}}{dx^\nu} \quad \Lambda^\nu_{\mu'} = \frac{dx^\nu}{dx^{\mu'}}$$

dove Λ è la trasformazione di Lorentz

In rel. Speciale la lunghezza dei quadrivettori è un invariante quindi le trasformazioni di Lorentz sono quelle che mantengono questa invarianza:

$$p_\mu p^{\mu'} = \eta_{\mu\nu} p^\nu p^{\mu'} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu'}_\alpha \Lambda^\nu_\beta p^\alpha p^\beta = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$$

ovvero la Λ è tale che

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta$$



Adesso troviamo l'equazione di Dirac ovvero l'equazione per i fermioni con spin 1/2

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \underline{p}^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad (\partial^2 + m^2) \psi = 0 \quad \text{dove} \quad \partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \square$$

Poichè abbiamo scritto E e p come operatori li ho dovuti applicare ad una funzione ψ

Ma questa equazione contiene una derivata seconda rispetto al tempo e quindi non va bene. Ci piacerebbe poter scrivere:

$$p_\mu p^\mu = p^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad (p^2 - m^2) \psi = (\sqrt{p^2} - m)(\sqrt{p^2} + m) \psi = 0$$

Ma che roba è: $\sqrt{p^2}$???

Provo a porre: $\sqrt{p^2} = \cancel{p} = \gamma^\mu p_\mu$ per poi poter scrivere un'equazione: $(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0$

Che come vogliamo contiene solo la derivata prima rispetto al tempo. Quindi il quadrivettore γ^μ deve soddisfare la condizione:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)(\gamma^\nu p_\nu + m) = p^2 - m^2 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu}$$



Questa condizione può essere riscritta con l'anticommutatore: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

Questi oggetti non sono numeri ma, affinché valga la condizione posta, devono essere matrici 4x4. In quella che si chiama rappresentazione chirale queste matrici 4x4 sono:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione di Dirac è:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m \right) \psi = 0 \quad \text{che si può scrivere:} \quad \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi = 0$$

Dove ψ è uno spinore a 4 componenti (da non confondere con un quadrivettore, infatti, trasforma in modo diverso)

In un contesto Lagrangiano (come quello che vogliamo costruire) questa equazione è l'equazione di Eulero-Lagrange che si ottiene applicando il principio di minima azione all'azione del sistema. Quindi dobbiamo scrivere la densità di Lagrangiana che ci fornisce questa equazione di Dirac



breve richiamo sul formalismo lagrangiano per una teoria di campo:

$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ dove $\mathcal{L}$ è la densità di Lagrangiana dipendente dal campo ϕ e dalle sue derivate

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \quad \Rightarrow \quad \delta S = \delta \int \mathcal{L} d^4x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0$$

nota: in questo esempio ϕ è un campo scalare, ma potrebbe essere un campo vettoriale (come il campo EM) o spinoriale come il campo di Dirac

nota: l'azione è scritta in modo invariante e in particolare sia d^4x che $\mathcal{L}$ sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Quindi la Lagrangiana di Dirac è: $\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$

dove $\bar{\psi}$ è: $\psi^\dagger \gamma^0$



Da un lato abbiamo bisogno che la densità di Lagrangiana sia uno scalare, quindi dobbiamo moltiplicare a sinistra per un «vettore» riga, ma in più ci dobbiamo assicurare l'invarianza per trasformazioni di Lorentz:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^\dagger = (\psi_1^\dagger, \dots, \psi_4^\dagger) \quad \text{e} \quad \bar{\psi} \psi, \quad \gamma^\mu \partial_\mu \quad \text{Invarianti (non faccio qui la dimostrazione)}$$

Quindi possiamo ricavare l'equazione di Dirac dall'equazione di Eulero Lagrange per $\bar{\psi}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

Quindi al momento abbiamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

Si nota subito che questa densità di Lagrangiana è invariante sotto U(1) globale, ovvero la trasformazione tale che:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi} \quad \text{dove } \alpha \text{ è una costante}$$



Per il teorema di Noether so che ad ogni invarianza della densità di Lagrangiana corrisponde una carica conservata. In questo caso associamo alla carica conservata la carica elettrica (*invarianza sotto $U(1)$ globale implica conservazione della carica elettrica*). Ci viene il sospetto che possa esistere un campo che agisce su particelle dotate di questa carica e vogliamo far nascere questo campo.

Adesso procediamo trasformando l'invarianza $U(1)$ globale in una invarianza locale. Ovvero, facciamo dipendere α da t e x e vediamo come questo (in questo caso) fa nascere il campo EM

Problema della derivata:

Il ∂_μ agisce anche su $\alpha(x)$ e quindi la nostra densità di Lagrangiana non è invariante sotto $U(1)$ locale

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\alpha} \psi = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \underline{\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \alpha \psi}$$

Abbiamo un termine aggiuntivo che deve essere eliminato. Ovvero, devo aggiungere un campo di gauge che elimina questo extratermine localmente



La procedura per fare questo è suggerita dalla fisica classica e consiste nel trasformare la derivata normale ∂_μ in una derivata covariante D_μ

$$D_\mu \stackrel{df}{=} \partial_\mu + iq A_\mu$$

dove A_μ è il campo di gauge

Sostituendo la derivata covariante nella densità di Lagrangiana si ottiene:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$$

Adesso ci rimane da trovare come deve trasformare A_μ sotto U(1) locale in modo che la sua azione sia quella di eliminare l'extratermine

Quindi prendo la nuova densità di Lagrangiana e impongo la sua invarianza per U(1) locale, ovvero per trasformazione di gauge



Inserisco una notazione generica per la trasformazione del campo di gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$$

e quindi trovo δA_μ

Prendo la nuova densità di Lagrangiana e trasformo $\psi, \bar{\psi}$ e A_μ

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\alpha} \psi - q \bar{\psi} e^{-i\alpha} \gamma^\mu (A_\mu + \delta A_\mu) e^{i\alpha} \psi =$$

$$= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$$

questa è la densità di Lagrangiana

$$- \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \alpha \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \delta A_\mu \psi$$

questa parte deve annullarsi

quindi si ottiene: $\delta A_\mu = -\frac{1}{q} \partial_\mu \alpha$

ovvero il campo di gauge deve trasformare come:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha$$



Quindi ricapitolando, l'aver imposto l'invarianza della fisica sotto U(1) locale ha fatto nascere un campo di gauge. Le trasformazioni di gauge sotto le quali la fisica è invariante sono:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi} \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha$$

Adesso abbiamo una densità di lagrangiana dove compare il termine relativo al campo di Dirac libero e il termine relativo all'interazione tra il campo di Dirac e il campo di gauge, ci manca ancora il termine relativo al campo di gauge libero per completare la densità di Lagrangiana.

Il termine che descrive il campo di gauge libero deve avere due proprietà fondamentali: deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz e deve essere invariante sotto trasformazione di gauge

Quindi introduciamo il tensore: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Sostituendo la trasformazione di gauge vediamo subito che il tensore F è invariante sotto gauge

E scriviamo la densità di Lagrangiana: $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

Che è invariante sotto trasformazione di Lorentz



dimostrazione:
$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \Lambda^\alpha_{\mu} \Lambda^\beta_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Notiamo che il fatto di aver introdotto il tensore antisimmetrico F in modo che sia invariante per trasformazione di gauge fa nascere le equazioni di Maxwell omogenee senza usare il principio di minima azione:

$$A_\mu(\phi, -\vec{A}); \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

prima definisco:
$$F_{\mu\nu,\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha F_{\mu\nu}$$

dalla definizione di F deriva automaticamente che:

$$F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\alpha\mu,\nu} + F_{\nu\alpha,\mu} = 0$$



$$\begin{cases} \nabla B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{cases}$$

dove ho fatto ruotare i tre indici



Adesso posso scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange per la densità di Lagrangiana del campo di gauge libero e trovare le altre due equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\mu} \eta^{\nu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\end{aligned}$$

che è una scrittura comoda da usare per ottenere l'equazione del moto

Si nota che se prendiamo solo la Lagrangiana libera abbiamo solo derivate del campo

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\alpha A_\beta} = -\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\alpha A_\beta} = -\partial_\alpha \frac{\partial}{\partial \partial_\alpha A_\beta} \left[-\frac{1}{4} \eta^{\mu\mu} \eta^{\nu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right]$$

abbiamo due contributi, quando $\mu=\alpha, \nu=\beta$ e quando $\mu=\beta, \nu=\alpha$

$$\mu=\alpha, \nu=\beta \Rightarrow \frac{1}{4} \eta^{\alpha\alpha} \eta^{\beta\beta} \partial_\alpha 2 (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha)$$

l'altro contributo è identico e quindi la loro somma fa sparire l'1/2



quindi si ottiene:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

se si aggiunge il termine di interazione si ottiene:

$$\mathcal{L}_{int} = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial A_\beta} = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -J^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta$$

che possiamo riscrivere:

$$\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = J^\beta$$

grazie al fatto che la fisica è invariante per trasformazione di gauge posso trovare quella trasformazione tale per cui:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad / \quad \partial_\mu A'^\mu = 0 = \partial_\mu A^\mu + \partial^2 \chi \quad \text{da cui trovo } \chi$$

quindi posso scrivere:

$$\partial^2 A'^\mu = J^\mu$$



Da notare che adesso siamo in una gauge di Lorentz dove: $\partial_\mu A^{\mu} = 0$

Questa equazione vincola le componenti di A e quindi solo tre componenti su 4 sono indipendenti

Se pongo a zero la quadricorrente (assenza di cariche) allora l'equazione diventa:

$$\partial^2 A^{\mu} = 0$$

In tal caso abbiamo ancora un'arbitrarietà da sperimentare attraverso un'ulteriore trasformazione di gauge. Infatti la gauge di Lorentz è assicurata dal fatto che:

$$\partial^2 \chi = - \partial_\mu A^{\mu}$$

quindi se aggiungo a χ una nuova funzione $\tilde{\chi}$ tale che $\partial^2 \tilde{\chi} = 0$

la gauge di Lorentz continua a valere e posso porre un nuovo vincolo. Quindi pongo:

$$A_{\mu}'' = A_{\mu}' - \partial_{\mu} \tilde{\chi} \quad / \quad A_0'' = 0 = A_0' - \partial_0 \tilde{\chi}$$

che esprime la gauge di Coulomb dove

$$A_0'' = 0 \quad \partial_{\mu} A^{\mu}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = 0$$



Quindi ho ritrovato l'equazione delle onde nella gauge di Coulomb

$$\partial^2 A^\mu = 0 \quad ; \quad A^0 = 0$$

per ogni direzione del vettore d'onda posso definire una polarizzazione del campo nelle due direzioni trasverse (imponendo i due vincoli ho che solo due componenti sono indipendenti).

Adesso mi serve una procedura di quantizzazione in linea con la trattazione Lagrangiana che serva a definire una teoria quantistica locale

In questa trattazione il campo di gauge svolge un ruolo analogo a quello dell'osservabile posizione e quindi dobbiamo definire l'impulso coniugato con il quale poi scrivere il commutatore fondamentale della teoria locale. Abbiamo:

$$\pi^{0\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_0 A_\nu} = -F^{0\nu} \quad \Rightarrow \quad \pi^{00} = 0 \quad \pi^{0i} = +E_i \quad \pi_{0i} = -E_i$$

quindi l'impulso coniugato è il campo elettrico



la quantizzazione si fa imponendo il seguente commutatore

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), \Pi^{\nu}(t, \mathbf{y})] = i \eta^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

dove μ, ν corrono tra 0 e 3

$$[A^i(t, \mathbf{x}), E^j(t, \mathbf{y})] = -i \delta^{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

dove i, j corrono tra 1 e 3

Da notare che i due operatori A e E sono presi allo stesso tempo. Quindi se x e y sono due posizioni diverse vuol dire che stiamo considerando due eventi space-like. Per due eventi space-like la delta è nulla e quindi i due operatori commutano. Questo garantisce il fatto che la teoria sia locale, ovvero che i campi non possano produrre azioni a distanza (come nella teoria di Newton ad esempio).

Inoltre se due eventi sono space-like in un riferimento lo saranno anche in qualsiasi altro riferimento, quindi il fatto di considerare i due operatori allo stesso tempo non toglie generalità al commutatore. Infine la scrittura del commutatore è invariante a vista per trasformazioni di Lorentz.

Quindi abbiamo definito una teoria locale in cui l'operatore di campo A non può produrre effetti superluminali. Rimane però il problema di immaginarci cosa faccia l'operatore di campo quando viene applicato ad uno stato, in particolare allo stato di vuoto.

Quindi adesso dobbiamo scrivere un operatore di campo compatibile con l'equazione del moto e con il commutatore.

Si tratterà di un operatore di campo vettoriale e quindi dovremo scegliere una base e sceglieremo la base relativa agli autovettori dello spin del fotone.

Quindi scrivo direttamente l'operatore di campo A e poi ne vediamo le singole parti:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2\varepsilon_p)^2} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\varepsilon_\lambda^\mu(p) a_{p\lambda} e^{-ipx} + \varepsilon_\lambda^{\mu*}(p) a_{p\lambda}^\dagger e^{+ipx} \right)$$

Intanto con p si intende il quadrivettore. Quindi il p^x a esponente vuol dire che è un invariante. Lambda è un indice che corre sugli epsilon che costituiscono una base. Le regole di commutazione per gli operatori «a» dovranno essere compatibili con il commutatore fondamentale.

Dobbiamo anche giustificare la normalizzazione dell'integrale e partiamo proprio da qui. Una scrittura invariante sarebbe certamente:

d^4p ma a questa dobbiamo aggiungere il vincolo che lega energia, impulso e massa (che in questo caso è nulla). *Inoltre dobbiamo imporre che l'energia sia positiva*, quindi possiamo scrivere:

$d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0)$ e si dimostra che questo è uguale a: $\frac{d^3p}{(2\pi)^2(2\varepsilon_p)} \delta(p_0 - \varepsilon_p) \Theta(p_0)$



Quindi la relazione di completezza per il quadrimpulso p è (sottointendendo la delta e la theta):

$$\mathbb{1} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\varepsilon_p)} |p\rangle \langle p| \quad \text{Inoltre per l'impulso tridimensionale so che:} \quad \begin{cases} \mathbb{1} = \int d^3 p |p\rangle \langle p| \\ \langle p|q\rangle = \delta^3(p-q) \end{cases}$$

Quindi per ritrovare la relazione di completezza per l'impulso tridimensionale partendo da quella sul quadrimpulso devo imporre la relazione:

$$|p\rangle = (2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\varepsilon_p)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{p}\rangle \quad \text{ovvero:} \quad a_p^\dagger = (2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\varepsilon_p)^{\frac{1}{2}} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

Quindi nell'operatore di campo compare l'operatore di distruzione e di creazione dell'impulso tridimensionale sottointendendo che l'energia ε_p è quella data dalla relazione fondamentale e che questa è positiva.

Per quanto riguarda il p^μ che compare ad esponente questo è invariante e corrisponde

$$a: p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu = \eta^{\mu\nu} p_\mu x_\nu$$



Rimane quindi da definire la base e quindi gli epsilon. Abbiamo libertà di scelta l'unico vincolo è che la polarizzazione sia perpendicolare alla direzione del vettore p come imposto dalla gauge di Coulomb.

I vettori epsilon sono appunto quadrivettori che vivono nello spazio di Minkowski e che quindi devono trasformare come vettori sotto le trasformazioni di Lorentz, quindi possiamo imporre questa relazione di ortonormalità:

$$\varepsilon_{\lambda}^*(p) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(p) = \eta_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda}^{\mu*}(p) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu}(p) = -\delta_{\lambda\lambda'}$$

Se ad esempio consideriamo p lungo z le uniche componenti diverse da 0 possono essere la seconda e la terza, quindi possiamo scegliere ad esempio:

$$\varepsilon_1(p_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2(p_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oppure

$$\tilde{\varepsilon}_1(p_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varepsilon}_2(p_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$



E' importante verificare che la seconda scelta, quella con le polarizzazioni circolari, corrisponde alla scelta degli autovettori dei generatori delle rotazioni, ovvero degli operatori di spin.

Quindi dobbiamo scrivere esplicitamente questi generatori e applicarli agli stati scritti.

In generale avremo $\Lambda = e^{-iJ\theta}$ dove J è il generatore della rotazione. Per la rotazione attorno a z (asse di propagazione) abbiamo:

$$J_z = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_z \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Spin} = 1$$

$$J_z \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Spin} = -1$$

Adesso che abbiamo definito tutte le parti dell'operatore di campo scriviamo l'operatore campo elettrico e verifichiamo il commutatore fondamentale



Scrivo il campo elettrico:

$$E^\mu(t, \mathbf{x}) = -\partial_t A^\mu(t, \mathbf{x}) =$$

$$\Rightarrow i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_p}{2}\right)^{1/2}}_{\uparrow} \sum_{\lambda} \left[\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(p) a_{p\lambda} e^{-ipx} - \varepsilon_{\lambda}^{\mu*}(p) a_{p\lambda}^{\dagger} e^{+ipx} \right]$$

$$\Rightarrow [A^i(t, \mathbf{x}), E^j(t, \mathbf{y})]_5$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda \lambda'} \left\{ -\varepsilon_{\lambda}^i(p) \varepsilon_{\lambda'}^j(q) e^{-ipx + iqy} [a_{p\lambda}, a_{q\lambda'}^{\dagger}] + \right. \\ \left. + \varepsilon_{\lambda}^{i*}(p) \varepsilon_{\lambda'}^j(q) e^{+ipx - iqy} [a_{p\lambda}^{\dagger}, a_{q\lambda'}] \right\} \end{aligned}$$



Quindi, sapendo che: $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} = \delta^3(x-y)$

Otteniamo il risultato voluto se:

$$[a_{pk}, a_{qk}^\dagger] = \delta_{kk} \delta^3(p-q)$$

Adesso prima di scrivere l'Hamiltoniana proviamo a dare un'interpretazione intuitiva all'operatore di campo applicandolo allo stato di vuoto (anche se al momento non abbiamo ancora dimostrato che lo stato di vuoto è autostato dell'Hamiltoniana):

$$A^\mu(t, x) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_k \frac{\epsilon_k^\mu}{(2\epsilon_p)^{\frac{1}{2}}} e^{+ipx} |p\rangle_k$$

Ci piacerebbe dire che abbiamo creato una particella nel punto t, x



Per fare questo proietto il risultato sull'autostato della posizione in x' e verifico che ottengo una delta:

$$\langle x' | A^\mu(t, x) | 0 \rangle \propto \delta^3(x - x')$$

Poichè ho posto: $\langle x | p \rangle \propto e^{-ipx}$

Il problema è che l'autostato della posizione non è ben definito perchè in questo contesto relativistico la posizione non è un osservabile. Però è comodo avere questa visione dell'operatore di campo come generatore della particella in un punto (che poi è quanto viene visualizzato nei diagrammi di Feynman)

Quindi secondo questa interpretazione il commutatore fondamentale ci porta al risultato che due particelle generate in due eventi space-like non sono causalmente correlate



Problema delle energie negative: nella scrittura dell'operatore di campo abbiamo dato per scontato che debba comparire un termine con a^+ . In effetti nel caso del campo EM stiamo pensando ad un operatore hermitiano e questa scelta appare ovvia. Ma in realtà l'operatore di campo non è sempre hermitiano, nel caso di un campo di Dirac per esempio non lo è. Quindi è necessario capire da dove viene la necessità di mettere nell'operatore la parte con a^+ .

Iniziamo a dire che l'equazione: $\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2 \rightarrow \mathcal{E} = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$

ha soluzioni positive e negative. Alle soluzioni negative però non sappiamo dare un significato fisico e quindi sono un problema.

La corrispondente equazione con gli operatori è: $(\partial^2 + m^2)\psi = 0 \quad \psi = e^{\pm i p x}$

Ovviamente anche in questo caso abbiamo il problema delle energie negative.

Un primo punto da notare è che se inseriamo nell'operatore di campo solo le soluzioni positive ne ricaviamo che il commutatore dei campi è sempre nullo anche nel caso di eventi time-like

$$\phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\mathcal{E}_p)^{1/2}} a_p e^{-i p x} \quad \text{con } p_0 > 0 \Rightarrow [\phi(x), \phi(y)] = 0$$



Ovvero, gli eventi x e y risulterebbero sempre non connessi causalmente anche se posizionati entro il cono di luce.

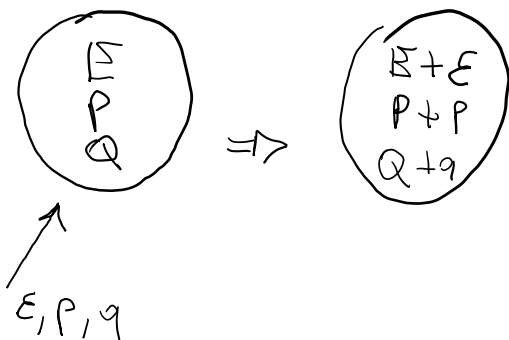
Inoltre non posso estendere l'operatore di campo con operatori di distruzione del tipo:

$a_p (p_0 < 0)$ Perchè corrisponderebbero a operatori che distruggono particelle (a energia negativa) non fisiche.

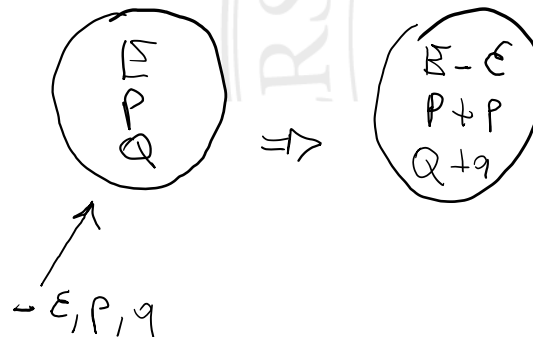
La soluzione sta nell'estendere l'operatore di campo con operatori che creano l'antiparticella con energia positiva (che nel caso dei fotoni corrispondono alla particella ma nel caso degli elettroni corrispondono ai positroni).

Quindi dobbiamo capire in che senso l'operazione di distruzione di una particella con energia negativa corrisponde alla creazione di una antiparticella con energia positiva. Immaginiamo che esista un sistema in cui misuriamo E , P e Q (Energia, Impulso e Carica) delle particelle. Quando generiamo una particella la togliamo dal sistema e quando la distruggiamo la riponiamo nel sistema.

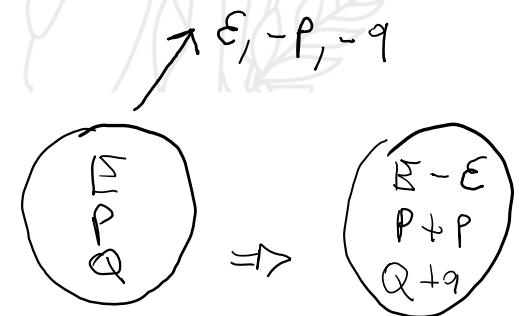
distruzione di una particella
con energia positiva



distruzione di una particella
con energia negativa



creazione di una antiparticella
con energia positiva



Quindi l'effetto di distruggere una particella con energia negativa è equivalente alla creazione di un'antiparticella con energia positiva, impulso opposto e carica opposta, e quindi dobbiamo capire cosa dobbiamo sostituire al termine:

$$a_{p, p_0 < 0} e^{-i p_0 t + i p x}$$

L'energia cambia segno (da negativo a positivo). La particella è di carica opposta quindi questo equivale a mandare il tempo al contrario (e infatti la sto creando e non distruggendo). Mandare il tempo al contrario vuol dire cambiare il segno di p . Ma abbiamo visto che p stesso deve cambiare di segno per ottenere l'equivalenza, quindi abbiamo:

$$= a_{-p, -p_0 > 0}^+ e^{-i(-p_0)(-t) - i(-p)x} = a_{-p, -p_0 > 0}^+ e^{-i p_0 t + i p x}$$

Per mettere tutto insieme nell'operatore di campo con lo stesso p per la parte con «a» e la parte con «a+» scrivo:

$$a_{p, (p_0 > 0)}^+ e^{+i p_0 t - i p x} \Rightarrow \phi(x) = \int d^3 p \, a_p e^{-i p x} + a_p^+ e^{+i p x}$$



Adesso questo operatore risulta ben definito perchè il suo commutatore è sempre nullo per eventi space-like ed è diverso da zero per eventi time-like

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 (2\epsilon_p)^{\frac{1}{2}} (2\epsilon_q)^{\frac{1}{2}}} \left\{ [a_p, a_q^\dagger] e^{-ipx + iqy} + [a_p^\dagger, a_q] e^{+ipx - iqy} \right\} = \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 (2\epsilon_p)} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)} \right\} = \Delta(x-y) - \Delta(y-x)
 \end{aligned}$$

Per eventi space-like posso sempre trovare una trasformazione di Lorentz per cui:

$$x - y \rightarrow -(x - y)$$

Inoltre il commutatore è invariante quindi ho dimostrato che è sempre nullo per eventi space-like. La stessa cosa non vale per eventi time-like come volevamo.



Adesso vogliamo scrivere l'Hamiltoniana. Quindi si parte dalla densità di Lagrangiana e da questa per mezzo della trasformazione di Legendre si scrive la densità di Hamiltoniana:

Densità di Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_A = \frac{1}{2} (E^2 - B^2)$$

Densità di Hamiltoniana (la ricavo dalla trasformata di Legendre)

$$\mathcal{H} = \Pi^\mu \partial_\mu A_\mu - \mathcal{L}_A = E^2 - \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} B^2 = \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$$

E quindi l'Hamiltoniana è:

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$$



Abbiamo già scritto l'operatore E quindi ci manca B.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\varepsilon_p)^{1/2}} \sum_{\lambda} \left[\varepsilon_p \varepsilon_{\lambda} a_{p\lambda} e^{-ip \cdot x} - \varepsilon_p \varepsilon_{\lambda}^* a_{p\lambda}^+ e^{+ip \cdot x} \right]$$

$$\vec{B}(\mathbf{x}) = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\varepsilon_p)^{1/2}} \sum_{\lambda} \left[(\mathbf{p} \times \varepsilon_{\lambda}) a_{p\lambda} e^{-ip \cdot x} - (\mathbf{p} \times \varepsilon_{\lambda}^*) a_{p\lambda}^+ e^{+ip \cdot x} \right]$$

Nota: attenzione a non confondere ε_p (energia) con ε_{λ} (vettore). Inoltre per semplificare il conto successivo ho eliminato la notazione dei quadrivettori e compare tutto con la notazione dei vettori 3D.

L'integrale di $d^3 x$ fa comparire le delta (che si mangiano il $(2\pi)^3$ a denominatore). I termini con un doppio a e un doppio a^+ compaiono con segno opposto nella parte con E^2 e in quella con B^2 e quindi spariscono. Rimangono solo i termini con a e a^+ . E alla fine si ottiene:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3 p \varepsilon_p (a_{p\lambda} a_{p\lambda}^+ + a_{p\lambda}^+ a_{p\lambda})$$



Quindi usando le regole di commutazione tra a e a^+ si ottiene:

$$H = \sum_k \int d^3p \, \varepsilon_p \left(a_{pk}^+ a_{pk} + \frac{1}{2} \right) = \sum_k \int d^3p \, \varepsilon_p \left(\hat{n}_{pk} + \frac{1}{2} \right)$$

Il termine $\frac{1}{2}$ fa nascere un'energia infinita di vuoto (ovvero l'energia diventa infinita anche con 0 particelle. Possiamo infatti prendere lo stato di vuoto e calcolare il valore di aspettazione dell'energia ottenendo infinito.

Qui lo stato di vuoto è un autostato dell'operatore numero n che è quindi anche autostato dell'Hamiltoniana. Da notare che si sta parlando di un autostato dell'Hamiltoniana che descrive il campo elettromagnetico libero (quindi senza interazioni).

Questa energia infinità potrebbe non creare problemi se siamo interessati solo a differenze di energia, ma ad esempio crea un problema se la inseriamo nel tensore energia-impulso che usiamo per trovare il tensore metrico nel caso della relatività generale.

Eq. di Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

2° eq. di Friedmann

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R$$

densità di energia

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad \text{per la radiazione}$$

Quindi sembrerebbe ragionevole trovare un modo per eliminare questo termine $\frac{1}{2}$ ma al tempo stesso si dovrebbe trovare il modo per far ricomparire le fluttuazioni di vuoto tutte le volte che queste hanno un effetto fisico, ad esempio nel caso del Lamb shift, direi anche nel caso dell'effetto Casimir (anche se è un caso più sporco da analizzare).

C'è poi il problema della misura delle fluttuazioni di vuoto nel caso della rivelazione omodina (un classico dell'ottica quantistica) che andrebbe ripensato.

Introduciamo quindi un ultimo step nel procedimento di quantizzazione che è il seguente: gli operatori devono essere messi in normal ordering

Normal ordering vuol dire che gli operatori di creazione vanno messi alla sinistra di quelli di distruzione, quindi nel caso dell'Hamiltoniana:

$$H = N \left\{ \frac{1}{2} \sum_k \int d^3p \, \varepsilon_p \left(a_{p,k} a_{p,k}^\dagger + a_{p,k}^\dagger a_{p,k} \right) \right\} = \sum_k \int d^3p \, \varepsilon_p \, \hat{n}_{p,k}$$


 Normal ordering

Dove il termine $\frac{1}{2}$ è sparito e quindi anche l'energia infinita e quindi anche le fluttuazioni di vuoto dello stato di vuoto dell'Hamiltoniana del campo libero



Prima di proseguire possiamo riassumere gli step per la seconda quantizzazione:

- 1) Si scrive la densità di Lagrangiana
- 2) Si calcola il momento coniugato
- 3) Si impone il commutatore fondamentale tra l'operatore di campo e il suo momento coniugato allo stesso tempo
- 4) Si scrive l'Hamiltoniana integrando nello spazio la trasformata di Legendre.
- 5) Si mette tutto in normal ordering

Al fine di recuperare qualcosa che abbia a che fare con le fluttuazioni di vuoto dobbiamo notare che lo stato di vuoto così come tutti gli stati di Fock è autostato dell'Hamiltoniana che descrive il campo libero. Ovvero i fotoni sono le eccitazioni del campo libero così come gli elettroni (e i positroni) sono le eccitazioni del campo di Dirac libero. Però abbiamo anche un termine di interazione (ineliminabile perchè la teoria è una teoria di gauge) per la quale queste particelle non sono autostati:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}(\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Campi liberi: fotoni, elettroni e positroni}} - \underbrace{q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu}_{\text{Interazione (fotoni, elettroni e positroni non sono autostati)}}$$

Campi liberi: fotoni, elettroni e positroni

Interazione (fotoni, elettroni e positroni non sono autostati)



Per verificare che non sono autostati possiamo introdurre il campo di Dirac senza definirlo nel dettaglio:

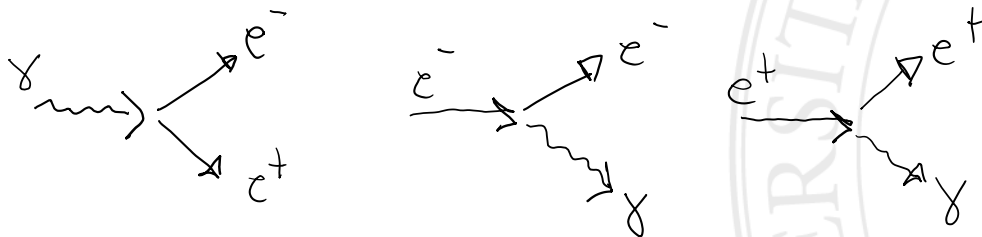
$$\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 (2E_p)^{1/2}} \sum_s \left[u_s(p) b_{ps} e^{-ipx} + v_s(p) c_{ps}^+ e^{+ipx} \right]$$

Dove b distrugge la particella (elettrone) e c^+ crea l'antiparticella (positrone). Quindi abbiamo qualcosa del tipo:

$$A = a + a^\dagger, \quad \psi = b + c^\dagger; \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = b^\dagger + c$$

Il termine di interazione prende i fotoni, gli elettroni e i positroni e li trasforma:

$$\bar{\psi} A \psi \sim (b^\dagger + c)(a + a^\dagger)(b + c^\dagger)$$



e così via all'infinito

Nota: per come è fatta l'interazione abbiamo sempre un vertice con tre gambe



Elettroni, positroni e fotoni non sono autostati della Lagrangiana di interazione e questa produce una continua fluttuazione nello stato del sistema. Quindi sembrerebbe ragionevole sviluppare una teoria dove tutti i fenomeni che prima venivano spiegati attraverso le fluttuazioni del vuoto del campo libero, vengono invece spiegati attraverso questa Lagrangiana di interazione. Questa teoria porta ai diagrammi di Feynman.

Prima di introdurre i diagrammi di Feynman è opportuno formalizzare il fatto che tutte le dimostrazioni che fanno uso delle fluttuazioni dello stato di vuoto (dell'Hamiltoniana libera) per spiegare certi fenomeni fisici (Lamb shift, Casimir, misure delle fluttuazioni di vuoto in genere) non sono rigorosamente corrette.

Per meglio mettere in evidenza questo punto possiamo scrivere l'Hamiltoniana completa:

$$H = H_{\varphi} + H_A + H_{int}$$

Dove:

$$H_{\varphi} = \int d^3p \sum_s \varepsilon_p (b_{ps}^\dagger b_{ps} + c_{ps}^\dagger c_{ps}) \quad ; \quad H_A = \int d^3p \sum_{\lambda} \varepsilon_p a_{p\lambda}^\dagger a_{p\lambda}$$

$$H_{int} = \int d^3x (-\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi)$$



H_φ è l'Hamiltoniana del campo libero di Dirac. La cosa importante da notare è che:

$$[H_\varphi, H_A] = 0 \quad \text{e quindi:}$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = i [H_A, \varphi] = 0$$

$$\frac{d\tilde{A}}{dt} = i [H_\varphi, A] = 0$$

Dove ho indicato con un tilde la derivata temporale dovuta rispettivamente solo all'Hamiltoniana del campo di gauge libero e al campo di Dirac libero.

Questo vuol dire che tutte le «dimostrazioni» che fanno uso delle soluzioni del campo di gauge libero (quindi anche lo stato di vuoto) per spiegare forze che agiscono sugli elettroni (come l'effetto Casimir vedi appendice (C)) senza prendere in considerazione l'Hamiltoniana di interazione, devono essere non corrette.

Potremmo catalogare queste «dimostrazioni» non corrette come di **tipo (A)**, ovvero dimostrazioni che non fanno uso dell'Hamiltoniana di interazione e che quindi sono certamente non corrette perchè le Hamiltoniane dei campi liberi commutano e quindi non ci possono essere interazioni senza considerare altre Hamiltoniane (quindi appunto l'Hamiltoniana di interazione)

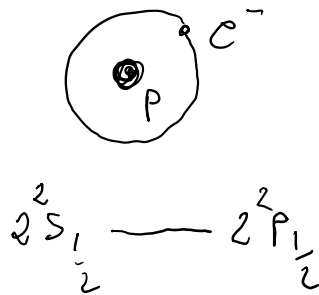


Provo a fare un primo elenco di dimostrazioni di tipo (A):

- effetto Casimir spiegato con le fluttuazioni di vuoto,
- forse l'equazione per il BS trovata imponendo la conservazione dei commutatori (da chiarire)

Propongo adesso di considerare un altro tipo di dimostrazioni (che definisco di tipo (B)) che invece fanno uso in qualche modo l'Hamiltoniana di interazione ma che considerano comunque le fluttuazioni del vuoto dell'Hamiltoniana libera. E' un esempio la dimostrazione del Lamb shift che si trova solitamente nei libri di Quantum Optics.

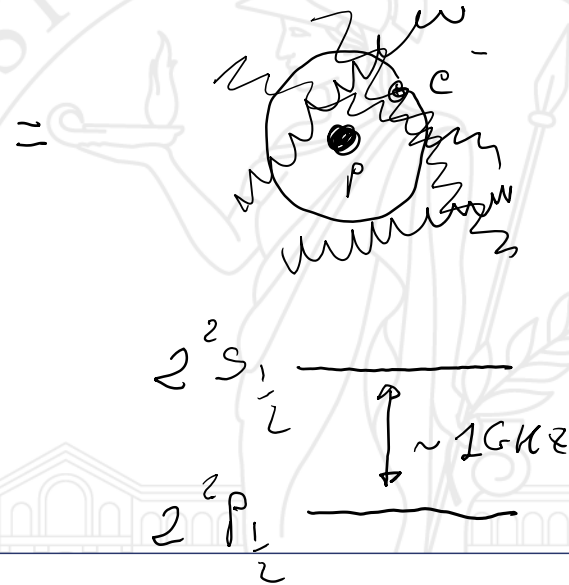
In tale approccio il Lamb shift viene trovato perchè l'elettrone risente della forza generata dalle fluttuazioni di vuoto (il vuoto dell'Hamiltoniana libera)



Livelli degeneri

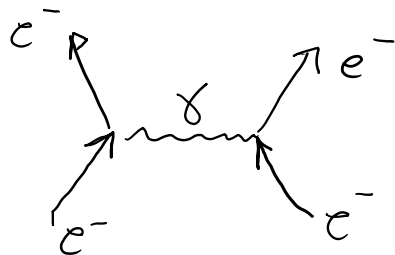


Fluttuazioni di vuoto

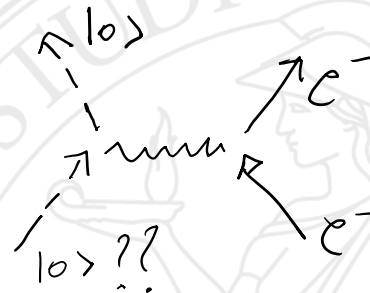


Nel caso di dimostrazioni che usano l'Hamiltoniana di interazione e contemporaneamente le fluttuazioni dello stato di vuoto dell'Hamiltoniana libera (dimostrazioni di tipo (B)) per capire se sono corrette dobbiamo introdurre i diagrammi di Feynman. Infatti, nelle QFT le interazioni tra le particelle (dovute all'Hamiltoniana di interazione) vengono studiate attraverso i diagrammi di Feynman.

Poichè vogliamo capire se ha senso affermare che il vuoto (dell'Hamiltoniana libera) agisce sugli elettroni, dobbiamo capire se è possibile introdurre lo stato di vuoto in un diagramma di Feynman



Interazione tra due elettroni:
in ingresso e uscita ho sempre
particelle



posso mettere lo stato di vuoto in
ingresso o in uscita da un
diagramma?

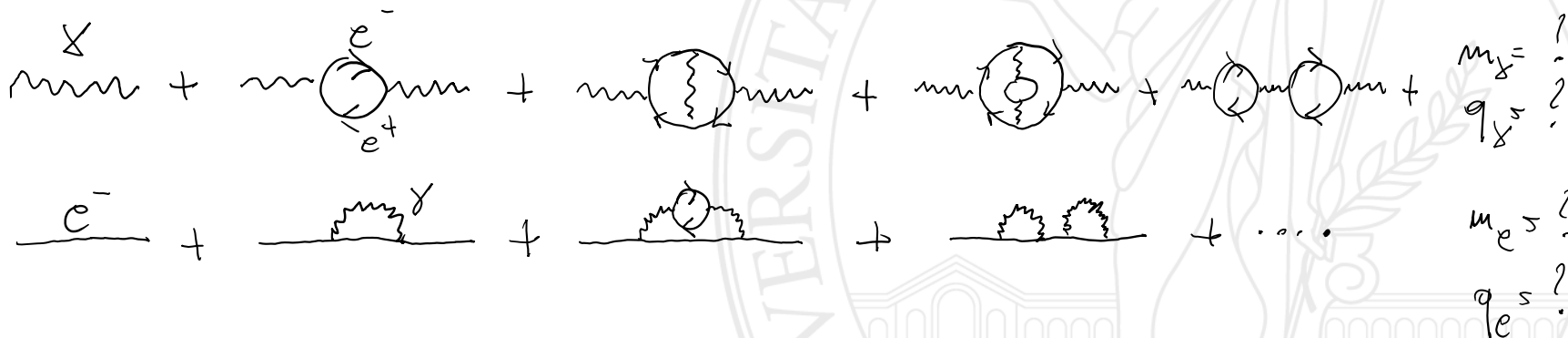
Per considerare l'Hamiltoniana di interazione abbiamo bisogno di un approccio perturbativo perchè non sappiamo diagonalizzare l'Hamiltoniana totale così come invece abbiamo fatto per le due Hamiltoniane libere.

Quindi introdurremo un approccio perturbativo nella rappresentazione di interazione. Ma prima di fare questo è necessario sottolineare un punto importante.

Proviamo ad immaginarci un fotone o un elettrone che propagano tra due punti. Nessuno dei due (a causa della presenza ineliminabile dell'Hamiltoniana di interazione) è un autostato della propagazione.

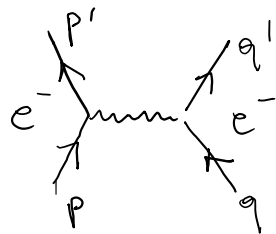
Quindi sia il fotone che l'elettrone nella loro propagazione si vestiranno con gli infiniti diagrammi possibili (e ad ognuno di questi diagrammi sarà associata una ampiezza di probabilità). La regola quantistica è che tutte le ampiezze di probabilità devono essere sommate per trovare l'ampiezza complessiva.

Quindi nasce una domanda fondamentale: la massa e la carica misurate corrispondono alle masse e alle cariche delle particelle «nude» autostati delle Hamiltoniane libere, oppure le particelle virtuali* «vestono» la particella cambiandone le sue caratteristiche misurabili?



Riponiamo momentaneamente nel cassetto questa domanda sulle masse e sulle cariche misurate e proviamo ad riassumere velocemente i punti principali necessari per definire le regole di Feynman per scrivere i diagrammi.

Quello che vogliamo è saper scrivere l'ampiezza di probabilità per un certo processo con certe particelle in ingresso e certe particelle in uscita:



$$A = \underbrace{\langle p' | \langle q' |}_{out} ? \underbrace{| p \rangle | q \rangle}_{in}$$

Diciamo che p, p', q, q' rappresentano gli impulsi delle particelle a grande distanza (si va da $t=-\infty$ a $t=+\infty$) dal punto di interazione e quindi sono interpretati come gli autostati delle Hamiltoniane libere (su questo bisognerà tornare perchè appunto l'Hint è ineliminabile). Per scrivere l'interazione consideriamo la rappresentazione di interazione e sviluppiamo la serie di Dyson considerando il problema del time-ordering:

$$A = \underbrace{\langle p' | \langle q' |}_{out} \underbrace{T}_{\text{time-ordering}} \left\{ e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}} \right\} \underbrace{| p \rangle | q \rangle}_{in} = \underbrace{\langle p' | \langle q' |}_{out} \underbrace{T}_{\text{time-ordering}} \left\{ e^{-i \int d^4x \mathcal{H}(x)} \right\} \underbrace{| p \rangle | q \rangle}_{in}$$

time-ordering
Hamiltoniana di interazione
densità di Hamiltoniana di interazione



Il grosso problema sta nel trovare un metodo per mettere tutto in normal ordering in modo relativamente semplice. Vediamo nel dettaglio cosa vuol dire time-ordering. Per fare questo andiamo a sviluppare fino al secondo ordine l'operatore di evoluzione temporale:

$$\begin{aligned}
 U(+\infty, -\infty) &\stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \text{"} T e^{-i \int_{t_0}^t H dt'} = \\
 &= \lim_{\text{"}} \left\{ \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t H(t') dt' + (-i)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} H(t') H(t'') dt' dt'' + \dots \right\} = \\
 &= \lim_{\text{"}} \left\{ \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t H(t') dt' + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t T \{ H(t') H(t'') \} dt' dt'' + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

notare che ho messo gli integrali in time-ordering

notare il 2! notare il time-ordering

dove:

$$T \{ H(t') H(t'') \} = \begin{cases} H(t') H(t'') & \text{se } t' > t'' \\ H(t'') H(t') & \text{se } t' < t'' \end{cases}$$



Nel caso in esame (l'interazione tra due elettroni) l'operazione di time ordering si dovrebbe applicare ai campi delle due Hamiltoniane di interazione presenti nel termine al secondo ordine:

$$T \left\{ (-i)^2 \int d^4x d^4y q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) q \bar{\psi}(y) \gamma^\nu A_\nu(y) \psi(y) \right\} = ???$$

La soluzione di questo problema sta nel teorema di Wick (vedere Peskin pg.88) il quale introduce il concetto di «contrazione». Il teorema nel caso di due soli operatori A e B afferma che:

$$\langle 0 | T \{ AB \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | [A^-(x), B^+(y)] | 0 \rangle & x_0 > y_0 \\ \langle 0 | [B^-(y), A^+(x)] | 0 \rangle & x_0 < y_0 \end{cases} = \begin{matrix} AB \\ \downarrow \\ \text{contrazione} \end{matrix}$$

dove ho scritto: $A = A^- + A^+$, $B = B^- + B^+$

In questa notazione A^+ è la parte di operatore di campo che contiene gli operatori di creazione e A^- quella che contiene gli operatori di distruzione (spesso si trova l'opposto intendendo le parti a frequenza negativa e positiva)



Nel caso di tanti operatori da mettere in time-ordering il teorema di Wick diventa:

$$T\{AB \dots z\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normal ordering}}}{N}\{AB \dots z\} + \text{tutte le possibili contrazioni di } AB \dots z\}$$

Se consideriamo il «panino» sullo stato di vuoto si ottiene:

$$\langle 0 | T\{AB \dots z\} | 0 \rangle = \langle 0 | \text{tutte le contrazioni complete} | 0 \rangle$$

Vediamo un esempio con 4 operatori:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\{ABCD\} | 0 \rangle &= \langle 0 | N\{ABCD\} | 0 \rangle + \langle 0 | \underbrace{N\{AB\}CD}_{\text{contraction}} | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | \underbrace{N\{AC\}BD}_{\text{contraction}} | 0 \rangle + \langle 0 | \underbrace{N\{AD\}BC}_{\text{contraction}} | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | \underbrace{N\{BC\}AD}_{\text{contraction}} | 0 \rangle + \langle 0 | \underbrace{N\{BD\}AC}_{\text{contraction}} | 0 \rangle + \underbrace{\langle 0 | \underbrace{N\{CD\}AB}_{\text{contraction}} | 0 \rangle}_{\text{contraction}} + \\ &+ \underbrace{\langle 0 | \underbrace{N\{ACD\}B}_{\text{contraction}} | 0 \rangle}_{\text{contraction}} + \underbrace{\langle 0 | \underbrace{N\{BCD\}A}_{\text{contraction}} | 0 \rangle}_{\text{contraction}} \end{aligned}$$

Dove ho evidenziato i 3 termini che sopravvivono dopo aver calcolato il valore di aspettazione sul vuoto fatto il normal-ordering. Sono le tre contrazioni complete, ovvero che coprono tutti i campi.



Dobbiamo quindi spiegare meglio da dove è saltato fuori il valore di aspettazione sullo stato di vuoto, quindi rivediamo il calcolo che stiamo facendo:

$$\begin{aligned}
 A &= \langle p' | \langle q' | T \left\{ e^{-i \int d^4x \mathcal{H}(x)} \right\} | p \rangle | q \rangle = \\
 &= \langle 0 | a_{p'} a_{q'} T \left\{ e^{-i \int d^4x \mathcal{H}(x)} \right\} a_p^\dagger a_q^\dagger | 0 \rangle = \\
 &= \langle 0 | T \left\{ a_{p'} a_{q'} e^{-i \int d^4x \mathcal{H}(x)} a_p^\dagger a_q^\dagger \right\} | 0 \rangle = 2' \text{ ordine} = \\
 &= \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle 0 | T \left\{ a_{p'} a_{q'} \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi a_p^\dagger a_q^\dagger \right\} | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

Adesso per ricavare le regole di Feynman dobbiamo considerare tre cose: il teorema di Wick, gli integrali in dx^4 e gli integrali in dp^3 che compaiono in tutti gli operatori di campo.



Per quanto riguarda il teorema di Wick abbiamo diverse possibilità che dobbiamo considerare separatamente. Infatti possiamo contrarre campi dello stesso tipo, campi di tipo diverso e poi abbiamo i casi in cui dobbiamo contrarre un campo e un operatore di creazione o distruzione:

$$\langle 0 | A_\mu A_\nu | 0 \rangle$$

da cui nasce il propagatore del fotone

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$$

da cui nasce il propagatore dell'elettrone

$$\langle 0 | A_\mu a^\dagger | 0 \rangle \quad e \quad \langle 0 | \psi a^\dagger | 0 \rangle$$

da cui nascono le gambe in entrata del diagramma

$$\langle 0 | a A_\mu | 0 \rangle \quad e \quad \langle 0 | a \bar{\psi} | 0 \rangle$$

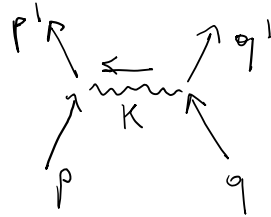
da cui nascono le gambe in uscita del diagramma

Facendo gli integrali scopriamo che per ogni vertice l'impulso si deve conservare, inoltre si deve conservare l'impulso complessivo del processo e si trovano delle regole generali che riassumo:



Regola sulla conservazione dell'impulso (quadrimpulso):

del processo complessivo:

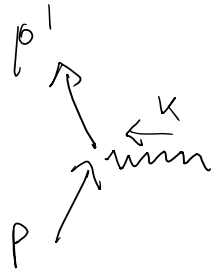


$$\rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q)$$

Dove p, p', q, q' sono particelle reali per le quali:

$$p_\mu p^\mu = m^2$$

del singolo vertice:



$$\rightarrow \delta^4(p' - p - k)$$

nel caso del singolo vertice si deduce che il fotone (in questo caso) deve essere una particella virtuale ovvero una particella per cui:

$$k_\mu k^\mu \neq m_\gamma^2 = 0$$

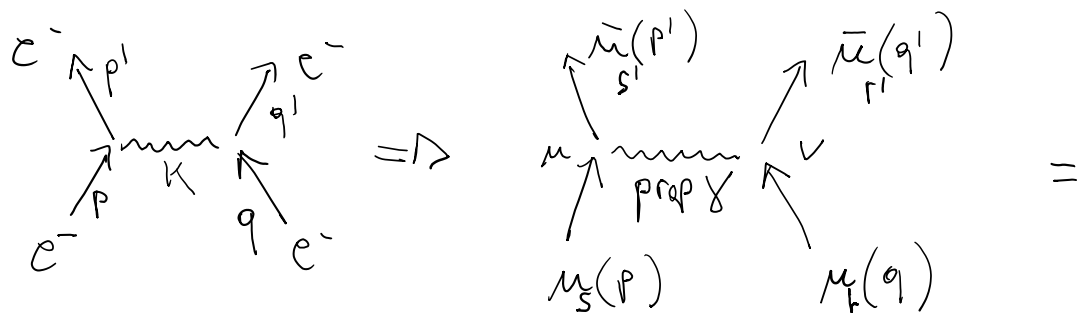
Infatti dalla delta si ricava che deve essere: $(p' - p)^2 = k^2$

e che in generale la misura di $p-p'$ sarà diversa da 0



Regole di Feynman per la QED:

Vediamole per il diagramma che stiamo studiando:



$$= A = (2\pi)^4 \delta^4(p' + q' - p - q) \cdot \bar{u}_{s'}(p') \gamma^\mu u_s(p) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{K^2} \bar{u}_{r'}(q') \gamma^\nu u_r(q)$$

Dove: $\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{K^2}$ È il propagatore del fotone e s, s', r, r' sono gli indici di spin degli spinori base

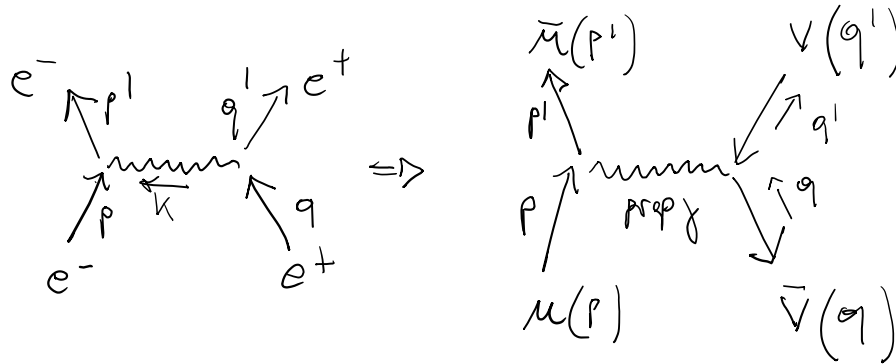
Quindi abbiamo: $u(p) [\bar{v}(p)]$ per ogni particella entrante [antiparticella]
 $\bar{u}(p') [v(p')]$ per ogni particella uscente [antiparticella]

$-ie\gamma^\mu$

per ogni vertice (dove e è la carica dell'elettrone (particella))



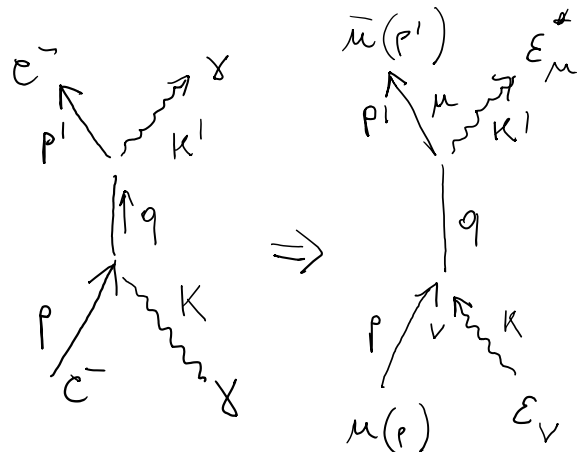
Per completare le regole vediamo altri due importanti diagrammi che rappresentano l'interazione tra un elettrone e un positrone e l'interazione tra un elettrone e un fotone (Compton):



Ometto la delta

$$i\mathcal{M} = (-1)(-ie)^2 \bar{\mu}(p') \gamma^\mu \mu(p) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} \bar{V}(q') \gamma^\nu V(q)$$

Nasce dal riordinamento degli operatori di creazione e distruzione quando si applica il teorema di Wick (non dal vertice)



$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{\mu}(p') \gamma^\mu \epsilon_\mu^\dagger \frac{i}{\not{q} - m} \epsilon_\nu \gamma^\nu \mu(p)$$

dove: $\frac{i}{\not{q} - m}$ è il propagatore dell'elettrone

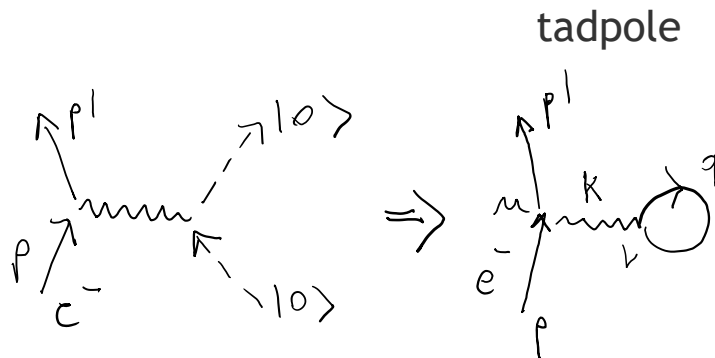
quindi abbiamo: ϵ_μ per ogni fotone entrante

$\epsilon_\mu^\dagger$ per ogni fotone uscente



Adesso, una volta che le regole per costruire i diagrammi sono state più o meno definite (senza la pretesa di una trattazione esaustiva che non è certo il fine di questi appunti) possiamo chiederci cosa vuol dire inserire lo stato di vuoto nei diagrammi e possiamo cercare di capire se questo produce un qualche effetto.

In generale direi che esistono due modi di far entrare il vuoto nei diagrammi, attraverso un «tadpole» e attraverso un diagramma disconnesso (iniziamo a vederli):



In entrambi i casi devo mettere una sola particella entrante e una sola particella uscente

$$\begin{aligned}
 & (-ie)^2 T \langle 0 | b_{p'} \bar{\psi} \gamma^\mu A_\nu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi b_p^\dagger | 0 \rangle = \\
 & = (-ie)^2 \langle 0 | b_{p'} \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\mu A_\nu \psi}_{\text{tadpole}} \underbrace{\bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi}_{\text{tadpole}} b_p^\dagger | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

Quindi mi ritrovo con un propagatore elettronico che parte e arriva nello stesso punto.

diagramma disconnesso

$$e \uparrow + \text{fluctuation} \Rightarrow \begin{array}{c} p' \\ | \\ e^- \downarrow p \end{array} \quad \text{diagramma disconnesso}$$

$$(-ie)^2 T < 0 | b_{p'} \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi b_p^\dagger | 0 > =$$

$$= (-ie)^2 < 0 | \underbrace{b_{p'} \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi b_p^\dagger}_{\text{diagramma disconnesso}} | 0 >$$

In questo diagramma l'elettrone non è connesso alla restante parte del diagramma e quindi ci dobbiamo chiedere se la parte disconnessa può cambiare anche l'ampiezza (modulo) del processo o se si limita a dare un contributo di fase irrilevante per il processo.

Abbiamo tre possibili casi:

- «tadpole» e diagrammi disconnessi danno un contributo in modulo all'ampiezza (quindi hanno effetto sull'interazione)
- «tadpole» e diagrammi disconnessi non partecipano all'interazione ma danno un contributo di fase che corrisponde ad un cambio di riferimento dell'energia (questo sarebbe equivalente al problema dell'1/2 dal punto di vista della relatività generale)
- «tadpole» e diagrammi disconnessi non partecipano all'interazione e non danno un contributo all'energia dell'universo

Per quanto riguarda i diagrammi di vuoto disconnessi si ottiene che il loro contributo può essere «esponenzializzato» (vedi Peskin pg. 96-99) ovvero contribuiscono soltanto con una fase. Quindi i diagrammi disconnessi non producono effetti fisici (tipo Lamb Shift) ma contribuiscono all'energia di «vuoto» dell'universo, intendendo in questo caso per energia di «vuoto» l'energia dello stato ground dell'Hamiltoniana completa.

I diagrammi «tadpole» (vedi ad esempio Peskin pg. 318) non danno contributo ai diagrammi (quindi anche loro non producono effetti fisici tipo Lamb Shift) ma al momento non mi è chiaro se danno un contributo all'energia di vuoto (da chiarire).

La dimostrazione che il «tadpole» fornisce un contributo nullo è basata su ragioni di simmetria. La contrazione dell'operatore di campo di Dirac nello stesso punto porta ad un integrale:

$$\begin{aligned} \bigcirc_{mm} &= -ie \int d^4x e^{-iqx} \langle 0 | T J^m | 0 \rangle \\ \text{dove } J^m &= \bar{\psi} \gamma^m \psi \quad \text{e per cui} \quad C|0\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \\ C^{-1} J^m C &= -J^m \quad \text{L'ottiene} \quad \bigcirc_{mm} = 0 \end{aligned}$$

Dove l'operatore C è la coniugazione di carica.



Quindi, riassumendo, la situazione appare la seguente:

- Le dimostrazioni di tipo (A) non sono corrette perchè non ci può essere azione da parte del vuoto senza considerare l'Hamiltoniana di interazione
- Le dimostrazioni di tipo (B) non sono corrette perchè i diagrammi tipo «tadpole» e i diagrammi disconnessi non contribuiscono all'interazione
- Certamente i diagrammi disconnessi (non è chiaro se anche i «tadpole») contribuiscono all'energia dello stato ground dell'Hamiltoniana completa e quindi il problema del termine $\frac{1}{2}$ dal punto di vista della relatività generale non sembra essere risolto.

Definizione: abbiamo definito come dimostrazioni di tipo (A) quelle che cercavano di spiegare effetti sui fermioni dovuti alla sola presenza dell'Hamiltoniana libera del campo di gauge (tipo effetto Casimir spiegato con le fluttuazioni del vuoto). Abbiamo definito come dimostrazioni di tipo (B) quelle che cercano di spiegare le azioni sui fermioni (come il Lamb Shift) considerando l'Hamiltoniana di interazione e inserendo in questa lo stato di vuoto dell'Hamiltoniana imperturbata.

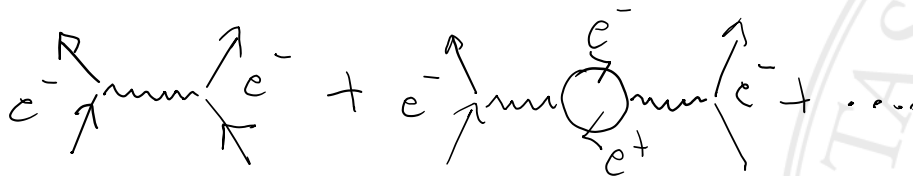
Nota: la «misura» delle fluttuazioni di vuoto tramite rivelazione omodina non rientra ne' nel tipo (A) ne' in quello (B), infatti l'interpretazione che la misura riguardi le fluttuazioni di vuoto in questo caso risiede solo nel fatto che si usa un modello semiclassico dove il LO non è quantizzato (vedere appendice (B) per l'interpretazione della rivelazione omodina)



Una volta chiarito quali dimostrazioni non sono formalmente corrette (perchè fanno un uso non corretto delle fluttuazioni del vuoto dell'Hamiltoniana libera) dobbiamo ritrovare la spiegazione di questi fenomeni tramite un diverso approccio basato sui diagrammi di Feynman.

Questo approccio è basato sulla rinormalizzazione.

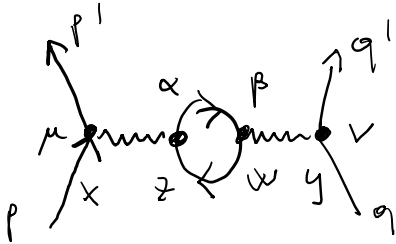
Dobbiamo chiarire due aspetti, uno è quello della relazione tra la carica e la massa delle particelle nude e delle particelle «misurate» che avevamo già accennato e l'altro è quello relativo al fatto che la teoria sviluppata fino a questo punto produce degli infiniti inaccettabili. Infatti, quello che si vorrebbe è una teoria perturbativa in cui l'ordine successivo produce solo delle piccole variazioni rispetto al precedente. Il problema è che non è così. Prendiamo il solito esempio, quello dell'interazione tra due elettroni e aggiungiamo un diagramma al solito che abbiamo visto (sappiamo che dovremmo sommare su tutte le ampiezze e quindi su tutti i diagrammi per avere il risultato completo):



Il contributo del secondo diagramma è infinito

Adesso con le regole di Feynman scriviamo il secondo diagramma e dimostriamo che produce un infinito

devo considerare 4 vertici



In particolare siamo interessati alle contrazioni evidenziate che sono quelle relative al loop fermionico

$$A = (-ie)^4 \langle 0 | a_{p'} a_q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi \bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi a_p^\dagger a_q^\dagger | 0 \rangle$$

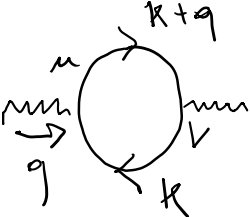
metto in evidenza le sole contrazioni relative al loop fermionico

$$= \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \bar{\psi} \gamma^\beta \psi = (-1) \underset{\text{traccia}}{\text{Tr}} \left[\gamma^\alpha \underset{\text{propagatore}}{\psi \bar{\psi}} \gamma^\beta \psi \bar{\psi} \right] =$$

questo è un risultato generale che si estende al caso di un loop con più gambe:

$$\text{diagramma} = (-1) \text{Tr} \left[\gamma^{\mu_1} \psi \bar{\psi} \cdot \dots \cdot \gamma^{\mu_n} \psi \bar{\psi} \right]$$

Quindi riscrivendo nel dettaglio la sola parte relativa al solo loop fermionico e considerando le conservazioni degli impulsi si ottiene:

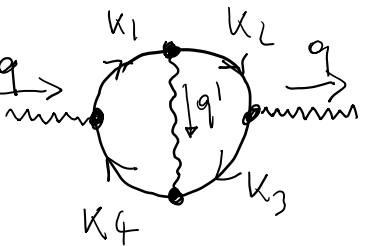


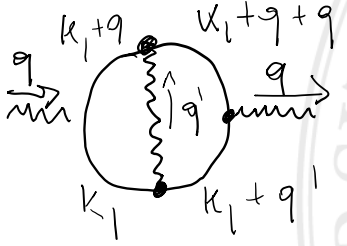
$$= (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \stackrel{\text{def}}{=} i \Pi_2^{\mu\nu}(q)$$

Da notare che l'impulso k è libero e quindi devo integrare in dk^4

Si nota che il nominatore va come p^4 mentre il denominatore va come p^2 e quindi l'integrale diverge come p^2 .

E' opportuno notare due cose. Se aumentiamo l'ordine del diagramma il grado di divergenza non cambia. Ad esempio se aggiungo due vertici:



$$=$$


Quindi rimangono liberi due impulsi k e q' e quindi due integrali che portano un p^8 . A denominatore ho quattro propagatori fermionici (che portano un p^4) e un propagatore fotonico che porta un p^2 quindi in tutto p^6 . Complessivamente diverge come p^2 come nel precedente caso.

La seconda cosa da notare è che poichè stiamo usando le unità naturali (vedi appendice sulle unità naturali) l'azione è adimensionale e lo deve essere a tutti gli ordini. La carica per la QED anche risulta essere adimensionale e quindi all'aumentare dell'ordine del diagramma il termine e^n non contribuisce con una potenza di p . Poichè la densità di hamiltoniana va come p^4 e dx^4 va come p^{-4} si trova in generale che all'aumentare dell'ordine del diagramma non si ottiene un'esplosione della divergenza:

$$S = \int d^4x (-H_{int}) = \text{adimensionale}$$

$$e^{-i \int d^4x H_{int}} = 1 - i q \int d^4x \bar{\psi} A \psi + \dots + (-iq)^n \left[\int d^4x \bar{\psi} A \psi \right]^n$$

Se la dimensione di q fosse stata una potenza negativa di p per compensarla (l'azione deve essere adimensionale) sarebbero stati necessari integrali a divergenza via via crescente all'aumentare dell'ordine del diagramma.

Quindi abbiamo delle divergenze ma sembra che non divergano dimensionalmente all'aumentare dell'ordine del diagramma e questa è come vedremo una cosa positiva per la rinormalizzazione del teoria.



Breve introduzione alla rinormalizzazione della QED

Inizio a scrivere la lagrangiana dove compare la massa e la carica delle particelle nude (autostati delle Hamiltoniane libere):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \left(i \gamma^\mu \underset{\uparrow}{\partial}_\mu - \underset{\uparrow}{m_0} \right) \psi - e_0 \underset{\uparrow}{\bar{\psi}} \gamma^\mu \underset{\uparrow}{A}_\mu \psi$$

Se scriviamo il propagatore dell'elettrone e del fotone usando questa lagrangiana dobbiamo considerare gli infiniti diagrammi introdotti dall'Hamiltoniana di interazione per la quale fotone e elettrone non sono autostati. Inoltre sappiamo che tutti i loop (sia elettrostatici che fotonici) divergono e questo vuol dire che i propagatori così definiti non hanno senso. Allora (in questo caso con un approccio un po' intuitivo) introduciamo dei fattori di scala che trasformano i campi dai campi della teoria con le particelle nude alla teoria con le particelle vestite da tutte le particelle virtuali (nel caso del campo di gauge che è hermitiano si tratta proprio del campo misurabile). Quindi pongo:

$$\psi = z_2^{\frac{1}{2}} \psi_r \quad A^\mu = z_3^{\frac{1}{2}} A_r^\mu$$

E li sostituisco nella lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} A_3 \bar{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}_r \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0 \right) \psi_r - e_0 z_2 z_3^{\frac{1}{2}} \bar{\psi}_r \gamma^\mu A_{r\mu} \psi_r$$



Adesso la procedura consiste nel dividere la lagrangiana in due parti di cui la prima è quella che avrei scritto subito con le masse e le cariche misurate e imporre che sia uguale a quella appena scritta:

$$e_0 z_2 z_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{df}{=} e z_1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \bar{F}_{r\mu\nu} F_r^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_r (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_r - e \bar{\Psi}_r \gamma^\mu A_{r\mu} \Psi_r \\ & - \frac{1}{4} \delta_3 \bar{F}_{r\mu\nu} F_r^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_r (i \delta_2 \gamma^\mu \partial_\mu - \delta_m) \Psi_r - e \delta_1 \bar{\Psi}_r \gamma^\mu A_{r\mu} \Psi_r \end{aligned}$$

confrontando questa lagrangiana con la precedente si ricava:

$$\delta_3 = z_3 - 1 \quad ; \quad \delta_2 = z_2 - 1 \quad ; \quad \delta_m = z_2 m_0 - m \quad ;$$

$$\delta_1 = z_1 - 1 = \left(\frac{e_0}{e} \right) z_2 z_3^{\frac{1}{2}} - 1$$

I primi tre pezzi della lagrangiana sono quelli che abbiamo già visto. I primi due possono essere diagonalizzati e rappresentano la teoria «libera», il terzo rappresenta l'interazione ed è quello che compariva nella teoria perturbativa.

Fino a questo punto la teoria fornisce le seguenti regole di Feynman:



Propagatori liberi:

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \mu \rightarrow q \rightarrow \nu \end{array} = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \qquad \begin{array}{c} \text{solid line with arrow} \\ p \end{array} = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

Vertice:

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \mu \\ \text{solid lines} \end{array} = -ie\gamma^\mu$$

Ma adesso dobbiamo considerare anche i nuovi tre pezzi che rappresentano i «controtermini» che fanno passare dalla lagrangiana scritta con le masse e le cariche misurate a quella con le cariche e le masse nude.

Questa parte della Lagrangiana non deve essere diagonalizzata ma deve essere considerata come una parte della lagrangiana di interazione e dunque va messa nello sviluppo perturbativo. In altre parole dobbiamo trovare le nuove regole di Feynman per questa parte con i «controtermini». Questo vuol dire che dobbiamo rifare la procedura, e trovare i contributi applicando il teorema di Wick e facendo gli integrali nello spazio e nell'impulso.



Questo procedimento porta ai seguenti vertici per i tre controtermini della lagrangiana (che si ricavano rispettivamente dal 4° , 5° e 6° termine della lagrangiana):

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= -i (\not{q}^\mu q^\nu - q^\mu \not{q}^\nu) \delta_3 \\
 \text{Diagram 2} &= i (\not{\not{p}} \delta_2 - \delta_m) \\
 \text{Diagram 3} &= -ie \gamma^\mu \delta_1
 \end{aligned}
 \quad \text{Vedere Appendice (A)}$$

Il primo è certamente quello più difficile da ricavare mentre il secondo e il terzo si deducono in modo abbastanza intuitivo. Adesso però il punto è capire come vanno usati per rinormalizzare la teoria.

Notiamo che abbiamo introdotto nella teoria 4 nuovi coefficienti che devono essere definiti in qualche modo: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_m$

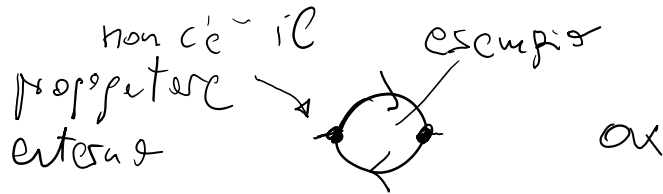
Il punto è riuscire a trovare 4 vincoli fisici da cui estrarre i valori di questi coefficienti



Il punto importante della rinormalizzazione è proprio questo, ovvero, la rinormalizzazione non è un banale metodo matematico per eliminare gli infiniti ma è un metodo che serve a rendere la teoria fisica.

In altre parole i vincoli che inseriremo servono a far sì che i propagatori delle particelle siano i propagatori delle particelle misurate, ovvero, propagatori di particelle singole con massa e carica misurate.

Ora, dobbiamo riscrivere i propagatori considerando tutti i possibili diagrammi con due gambe esterne (quelle dei propagatori). Per fare questo introduciamo il concetto di diagrammi 1PI (1 particle irreducible). Ovvero diagrammi che non si possono dividere in due tagliando una sola gamba interna:



Consideriamo adesso il propagatore dell'elettrone. Certamente dovrà considerare tutti i diagrammi del tipo 1PI. Questa somma di diagrammi la chiamo:

p

$$df = -i \Sigma(p)$$

questa funzione sigma è un casino da calcolare ma dipende solo da p perchè ho solo due gambe esterne e l'impulso esterno è p

Inoltre la funzione sigma contiene diagrammi certamente divergenti come abbiamo visto.

Adesso a questi diagrammi 1PI aggiungo il controtermine relativo all'elettrone:

$$\text{diagram with } 1\text{PI} \stackrel{df}{=} \text{diagram with } 1\text{PI} + \text{diagram with } \otimes \rightarrow = -i \tilde{\Sigma}(\not{p})$$

Per completare il propagatore devo considerare gli infiniti diagrammi costituiti da diagrammi 1PI in serie:

$$\text{diagram with } P \rightarrow \text{diagram with } \otimes \rightarrow = \text{diagram with } \rightarrow + \overset{\text{propagatore}}{\downarrow} \text{diagram with } 1\text{PI} \rightarrow + \text{diagram with } 1\text{PI} \rightarrow 1\text{PI} \rightarrow + \dots$$

e questa somma infinita la trattiamo come una serie geometrica:

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{\not{p}-m} + \frac{i}{\not{p}-m} (-i \tilde{\Sigma}) \frac{i}{\not{p}-m} + \frac{i}{\not{p}-m} (-i \tilde{\Sigma}) \frac{i}{\not{p}-m} (-i \tilde{\Sigma}) \frac{i}{\not{p}-m} + \dots = \\ &= \frac{i}{\not{p}-m} \left[1 + \frac{\tilde{\Sigma}}{\not{p}-m} + \left(\frac{\tilde{\Sigma}}{\not{p}-m} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\tilde{\Sigma}}{\not{p}-m} \right)^n + \dots \right] = \frac{i}{\not{p}-m} \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\Sigma}}{\not{p}-m}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m - \tilde{\Sigma}(\not{p})}$$

Questo è il propagatore considerando tutti i diagrammi possibili.

Per capire quali sono le condizioni da porre per renderlo «fisico» va confrontato con il propagatore di partenza, ovvero:

$$D(p) = \frac{i}{\not{p} - m}$$

questo propagatore ha due caratteristiche importanti, a denominatore compare la massa misurata, a numeratore il coefficiente di i è 1 e rappresenta il propagatore di un singolo fermione nel dominio dell'impulso con massa m .

Nel nuovo propagatore compare una funzione sigma che a sua volta contiene i due coefficienti del controtermine elettronico δ_2, δ_m e quindi ci aspettiamo di trovare due vincoli fisici per definire questi due coefficienti.

Ci chiediamo cosa deve accadere al nuovo propagatore quando $\not{p} = m$ e nell'intorno di questo valore.

Nel propagatore originale per $\not{p} = m$ il denominatore si annulla e al numeratore abbiamo 1. Quindi richiediamo questi due vincoli anche al nuovo propagatore. Il senso è: stiamo sviluppando una teoria perturbativa quindi voglio che in prossimità di $\not{p} = m$ la soluzione sia quella di partenza.



Porre il vincolo per $\not{p} = m$ vuol dire porre il vincolo per impulsi 3D piccoli ovvero nel caso non relativistico. Quindi mi aspetto che poi le cose cambino nel caso relativistico.

Quindi per ottenere:

$$\frac{i}{\not{p} - m - \tilde{\Sigma}(\not{p})} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m} \quad \text{per } \not{p} = m$$

Devo certamente imporre $\tilde{\Sigma}(\not{p} = m) = 0$

E poi posso sviluppare al primo ordine sigma nell'intorno di $\not{p} = m$ e imporre che il termine al primo ordine sia nullo:

$$\frac{i}{\not{p} - m - \tilde{\Sigma}(\not{p} = m) - \left. \frac{d\tilde{\Sigma}}{d\not{p}} \right|_{\not{p} = m} (\not{p} - m)} = \frac{i}{\not{p} - m} \Rightarrow \left. \frac{d\tilde{\Sigma}}{d\not{p}} \right|_{\not{p} = m} = 0$$



Gli altri due vincoli per trovare δ_3, δ_1 si trovano imponendo che il denominatore del propagatore del fotone si annulli per impulso nullo e che compaia la carica misurata nel vertice:

$$\tilde{\Pi}(q^2=0) = 0 \quad \text{e} \quad -ie \tilde{\Gamma}^\mu(p'=p=0) = -ie \gamma^\mu$$

Dove $\tilde{\Gamma}$ è l'analogo della funzione $\tilde{\Sigma}$ nel caso del propagatore del fotone.

Come si nota sia nel caso del propagatore del fotone che nel caso del vertice il vincolo viene posto nel caso di fotoni a bassa energia (0). Quindi ci aspettiamo di vedere deviazioni nel caso ad alta energia. Ad esempio ci aspettiamo di vedere una deviazione dalla legge di Coulomb quando siamo ad alta energia, ovvero, quando andiamo a «vedere» l'elettrone più da vicino (più vicino alla particella nuda).

Poichè come abbiamo visto nel caso della QED la potenza della divergenza non aumenta all'aumentare dell'ordine del diagramma possiamo calcolare le funzioni $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}$ fermandoci ad un certo ordine perturbativo ad esempio il secondo ed inserire nel conto le funzioni: $\tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Pi}_2, \tilde{\Gamma}_2$



Quindi gli infiniti che comparivano nelle funzioni $\Sigma, \mathcal{T}, \Gamma$ sono stati eliminati aggiungendo i controtermini e trovando i coefficienti dei controtermini imponendo dei vincoli fisici sulle funzioni $\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\Gamma}$

Inoltre abbiamo visto che le funzioni $\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\Gamma}$ possono essere calcolate con approccio perturbativo fermanoci ad un certo ordine (ad esempio il secondo) ed imponendo quindi i vincoli sulle funzioni: $\tilde{\Sigma}_2, \tilde{\mathcal{T}}_2, \tilde{\Gamma}_2$

Quindi adesso possiamo tornare alla nostra domanda: come possiamo calcolare con i diagrammi di Feynman gli effetti che nelle dimostrazioni di tipo A e di tipo B erano dovuti alle fluttuazioni del vuoto dell'Hamiltoniana libera (ad esempio il Lamb Shift)?

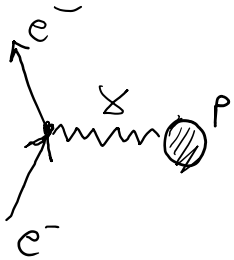
Gli effetti di questo tipo sono sempre da ricercarsi nella deviazione perturbativa dal caso fondamentale che si ottiene aggiungendo diagrammi di ordine superiore dopo averli rinormalizzati con i controtermini.

Vediamo (anche se solo superficialmente) il caso del Lamb Shift:



Lamb shift con i diagrammi di Feynman

Prima di tutto dobbiamo applicare all'elettrone il campo A dovuto alla presenza del protone e descrivere uno stato legato. Per fare questo si scrive un vertice dove compare il campo statico del protone



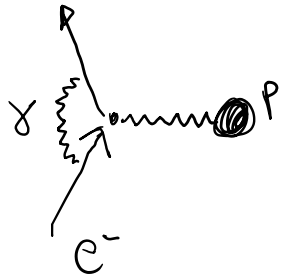
Questo vuol dire risolvere l'equazione di Dirac con l'aggiunta di un campo che genera un sistema legato. Come è noto questa trattazione fornisce dei livelli elettronici dipendenti dal momento angolare totale. Quindi i livelli:

$$2^2S_{1/2} \text{ e } 2^2P_{1/2} \text{ risultano degeneri}$$

Per trovare il Lamb Shift dobbiamo aggiungere dei nuovi diagrammi e rinormalizzarli attraverso i controtermini. In questo caso i nuovi diagrammi devono riguardare il vertice rappresentato sopra.



Il primo contributo importante al vertice è il seguente:



Che contiene un loop e quindi deve essere rinormalizzato, ovvero è necessario aggiungere un controtermine relativo al vertice del tipo:

$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu \delta_1$$

The diagram shows a vertex with a photon line and two fermion lines, with a cross inside the vertex. This is equated to the expression $-ie\gamma^\mu \delta_1$.

E imporre: $-ie\tilde{\Gamma}_2(p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu$

Mi limito qui a raccontare vagamente l'idea che c'è dietro al calcolo da fare. Il punto però è che seguendo questa procedura si ottiene il risultato misurato (vedi ad esempio Weinberg volume 1 di The Quantum Theory of Fields pg. 578). I calcoli sono molto complicati, ma possono essere fatti trovando contributi fino a ordini molto alti per ottenere un perfetto accordo con la misura. Cosa che non è possibile con altri approcci (se non per trovare gli ordini di grandezza).

Breve richiamo sulle unità naturali:

$$\hbar = 1$$

$$c = 1$$

Quindi lunghezza (l), massa (m) e tempo (t) si misurano tutti come potenze dell'energia:

$$l = \frac{\hbar c}{E} = E^{-1} \quad ; \quad m = \frac{E}{c^2} = E^1 \quad ; \quad t = \frac{\hbar}{E} = E^{-1}$$

Quindi anche l'impulso di misura in unità di energia:

$$p \approx m \frac{l}{t} \approx E^1$$

L'azione è adimensionale e quindi la densità di lagrangiana va come E^4

$$S \approx \int d^4x \mathcal{L} = E^{-4} \cdot E^4$$

$$\mathcal{L} \propto \bar{\psi}_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu} \propto (2_{\mu} A_{\mu})^2 \rightarrow A_{\mu} \approx E^1$$

$$\mathcal{L} \propto \bar{\psi} \psi \rightarrow \psi \approx E^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{L} \propto q \bar{\psi} A_{\mu} \psi \rightarrow q \approx E^0$$

La carica è adimensionale e quindi la teoria è rinormalizzabile...



Quindi tempo e spazio si misurano in Joule^{-1}

Passaggio da unità naturali a MKS

$$t_h (\text{J}^{-1}) \rightarrow t_h = \frac{t_{\text{rus}}}{\hbar}$$

$$l_h (\text{J}^{-1}) \rightarrow l_h = \frac{l_{\text{rus}}}{\hbar c}$$

$$m_h (\text{J}^{-1}) \rightarrow m_h = m_{\text{rus}} \cdot c^2$$



Nota sulle teorie di gauge: nelle teorie di gauge nascono campi con proprietà che dipendono dalla dimensione della trasformazione rispetto alla quale la lagrangiana è invariante. Per qualche motivo questa «ricetta» è adatta a spiegare le forze della natura eccetto la gravità (la RG non è una teoria di gauge)

E' interessante vedere cosa succede se proviamo a scrivere una densità di lagrangiana per i fermioni dove invece di prendere un singolo spinore ψ prendiamo un doppietto di spinori:

$$\psi \rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \bar{\Psi} \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \Psi$$

$$\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2)$$

Questa lagrangiana è invariante sotto le trasformazioni del gruppo SU(2) definite da 3 generatori:

$$\Psi \rightarrow e^{+i\frac{\alpha}{2} \tau \cdot \alpha} \Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\frac{\alpha}{2} \tau \cdot \alpha}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\tau_i, \tau_j] = 2i \epsilon_{ijk} \tau_k$$



All'invarianza sotto $SU(2)$ globale corrisponde una carica conservata (che in questo caso chiamiamo isospin), se avessimo considerato dei tripletti l'invarianza sotto $SU(3)$ globale avrebbe dato una carica conservata chiamata carica di colore (con tre diverse cariche di colore).

Tornando a $SU(2)$ notiamo che α ha tre componenti e la ricetta per trasformare l'invarianza sotto $SU(2)$ da globale a locale prevede l'introduzione di una derivata covariante:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i g \tau \cdot W_\mu \quad W_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

Dove W è il campo di gauge di questa teoria. Adesso, come fatto per $U(1)$ vediamo cosa succede se imponiamo l'invarianza sotto $SU(2)$ locale, ovvero troviamo come deve trasformare W per eliminare tutti gli extratermini. La natura non-commutativa (non abeliana) di questa teoria ci riserva delle sorprese notevoli.

Dobbiamo avere un approccio perturbativo, ovvero introduciamo una piccola trasformazione di gauge:

$$e^{+i \frac{1}{2} \tau \cdot \alpha} \approx 1 + i \frac{1}{2} \tau \cdot \alpha$$



Sostituisco nella lagrangiana la derivata covariante e le trasformazioni di gauge (per il campo introduco la delta-W perturbativa da trovare come nel caso U(1)):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \rightarrow & \bar{\psi} \left(1 - i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \alpha \right) \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \left(1 + i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \alpha \right) \psi + \\
 & \frac{g}{2} \bar{\psi} \left(1 - i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \alpha \right) \left(i \gamma^\mu i \varepsilon \cdot \omega_\mu \right) \left(1 + i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \alpha \right) \psi + \\
 & \frac{g}{2} \bar{\psi} \left(1 - i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \alpha \right) \left(i \gamma^\mu i \varepsilon \cdot \delta \omega_\mu \right) \left(1 + i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \alpha \right) \psi \approx \\
 \approx & \bar{\psi} \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi - g \bar{\psi} \gamma^\mu \varepsilon \cdot \omega_\mu \psi + \\
 & + \bar{\psi} \left(i \gamma^\mu i \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \partial_\mu \alpha \right) \psi + \\
 & + i \frac{g}{2} \bar{\psi} \left\{ \frac{1}{2} \gamma^\mu \left[(\varepsilon \alpha)(\varepsilon \omega_\mu) - (\varepsilon \omega_\mu)(\varepsilon \alpha) \right] \right\} \psi + \\
 & - \frac{g}{2} \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \varepsilon \cdot \delta \omega_\mu \right) \psi
 \end{aligned}$$

Devo buttare i pezzi di ordine superiore al primo



Il punto è che i generatori τ non commutano e quindi il pezzo:

$$(\tau \alpha)(\tau \psi_\mu) - (\tau \psi_\mu)(\tau \alpha) \neq 0$$

esplicitando gli indici ottengo:

$$(\tau \alpha)(\tau \psi_\mu) = \tau_i \alpha_i \tau_j \psi_{\mu j} = \delta_{ij} \alpha_i \psi_{\mu j} + i \varepsilon_{ijk} \alpha_i \psi_{\mu j} \tau_k$$

e quindi:

$$(\tau \alpha)(\tau \psi_\mu) - (\tau \psi_\mu)(\tau \alpha) = i \varepsilon_{ijk} \alpha_i \psi_{\mu j} \tau_k - i \varepsilon_{ikj} \psi_{\mu j} \alpha_i \tau_k =$$

ruoto gli indici:

$$= i \varepsilon_{kij} \tau_k (\alpha_i \psi_{\mu j} - \psi_{\mu j} \alpha_i) =$$

Sfrutto il fatto che ε è un tensore totalmente antisimmetrico e ridefinisco gli indici del secondo termine, ottengo:

$$= 2i \varepsilon_{ijk} \tau_k \alpha_i \psi_{\mu j} = 2i \tau (\alpha \times \psi_\mu)$$

Da cui ricavo che il campo di gauge trasforma come:

$$\psi_\mu \rightarrow \psi_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha - \alpha \times \psi_\mu$$



Quindi nella trasformazione del campo di gauge è comparso un termine aggiuntivo. Questo termine va a modificare la lagrangiana libera del campo di gauge che infatti dovrà essere invariante rispetto alla nuova trasformazione. Si dimostra che:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + g W_\mu \times W_\nu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

Quindi compaiono due termini aggiuntivi non lineari che rappresentano le interazioni tra le particelle del campo di gauge

$$\partial W (W \times W) \rightarrow \text{diagramma a tre linee wavy che si incontrano in un punto}$$

$$(W \times W)(W \times W) \rightarrow \text{diagramma a quattro linee wavy che si incontrano in un punto}$$

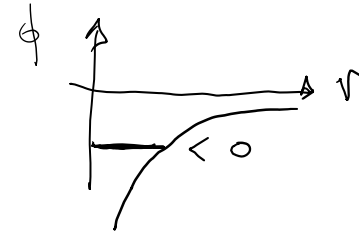
Queste interazioni sono dovute al fatto che le stesse particelle del campo di gauge sono dotate della carica. Ad esempio i gluoni sono dotati di carica di colore.

Questa interazione va a modificare il potenziale effettivo di questo campo.



Nel caso dei fotoni i termini aggiuntivi non ci sono e il potenziale va come:

$$\partial^2 \phi = 0 \rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi \sim -\frac{1}{r}$$



Nel caso dei gluoni i termini non lineari aggiuntivi generano un potenziale effettivo che a grande distanza rappresenta una forza costante

$$\phi \sim -\frac{A}{r} + Br$$



Mentre nel primo caso un sistema legato ha sempre una massa inferiore a quella dei suoi costituenti nel secondo caso accade l'opposto, infatti il protone è ben più massivo dei due quarks up e del quark down.



Appendice (A): controtermine fotonico

dimostrazione che  = $-i(\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \delta_3$

si parte da $\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4} \delta_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \delta_3 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) =$
 $= -\frac{1}{2} \delta_3 \left[\underset{\uparrow 1^3}{\partial_\mu A_\nu} \partial^\mu A^\nu - \underset{\uparrow 2^3}{\partial_\mu A_\nu} \partial^\nu A^\mu \right]$

1³ $\partial_\mu [A_\nu \partial^\mu A^\nu] = \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu \Rightarrow \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = \partial_\mu [A_\nu \partial^\mu A^\nu] - A_\nu \partial^2 A^\nu$

2³ $\partial_\mu [A_\nu \partial^\nu A^\mu] = \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \Rightarrow \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu [A_\nu \partial^\nu A^\mu] - A_\nu \underset{\substack{\uparrow \\ \nu, \mu}}{\partial^\mu \partial^\nu} A^\mu$

quando la integro in dx^4 la quadridivergenza sparisce, quindi ottengo:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} \delta_3 [A_\nu \partial^2 A^\nu - A_\nu \partial^\mu \partial^\nu A_\mu] = \frac{1}{2} \delta_3 [A_\nu (\partial^2 \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu] =$$

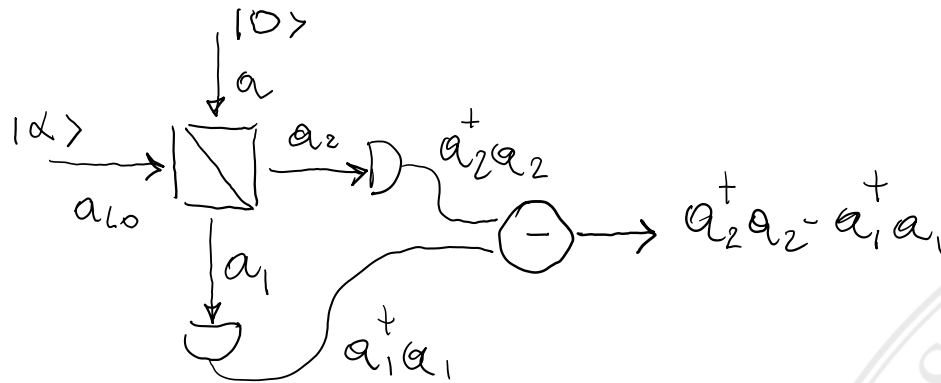
$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2} \delta_3 [A_\nu (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) A_\mu]$$

poi devo considerare il (-1) per ottenere Hint e il (-i) dell'evoluzione temporale...



Appendice (B): interpretazione della rivelazione omodina

Il punto è capire se le fluttuazioni che si vedono con la rivelazione omodina possono essere interpretate come fluttuazioni dello stato di vuoto. Ci riferiamo al caso in cui in ingresso al BS (Beam Splitter) abbiamo un coerente ad alta potenza (Local Oscillator) e il vuoto come descritto nello schema sotto:



In/out del BS:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_{lo} \end{pmatrix}$$

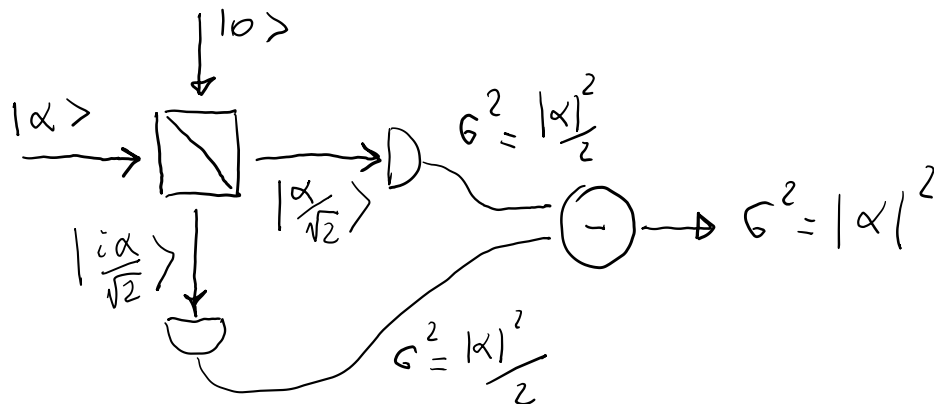


$$a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1 = i a a_{lo}^+ - i a^+ a_{lo}$$

Interpretiamo l'esperimento con tre diversi approcci: 1) rappresentazione di Schrodinger, 2) rappresentazione di Heisenberg con LO classico, 3) rappresentazione di Heisenberg con LO quantum



(1) Interpretazione della rivelazione omodina nella rappresentazione di Schrodinger



Faccio evolvere lo stato dopo il BS. Ottengo due coerenti ad alta potenza ognuno con una potenza pari a metà di quella iniziale. Su ogni rivelatore vedo una fluttuazione con distribuzione Poissoniana dei conteggi su una finestra temporale. Le due fluttuazioni sono scorrelate e quando le sottraggo vedo una varianza che è la somma delle due. Quindi quello che vedo non sono le fluttuazioni di vuoto. Nota: nel caso di uno stato squeezed le due uscite del BS diventano correlate.

Fisicamente il fatto che le due uscite siano scorrelate non dipende dallo stato di vuoto che «entra» nel BS ma dall'interazione tra gli elettroni del BS e i fotoni che entrano nel BS dal solo ingresso dove abbiamo il LO, ovvero, dall'Hamiltoniana di interazione e quindi dai diagrammi di Feynman che ne derivano.

(2) Interpretazione della rivelazione omodina nella rappresentazione di Heisenberg con LO classico

$$a(t) = a e^{-i\omega_0 t}$$

$$a_{LO} = |\alpha| e^{-i\omega_0 t + i\phi}$$

LO classico con ampiezza α e portante ω_0

Quindi l'operatore all'uscita dell'omodina si scrive:

$$i a(t) a_{LO}^* - i a^\dagger(t) a_{LO} = |\alpha| (a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{+i\theta}) \stackrel{df}{=} |\alpha| \hat{X}(\theta) \quad \theta \stackrel{df}{=} \phi - \frac{\pi}{2}$$

In questa rappresentazione lo stato è fisso (il vuoto) e l'operatore evolve, quindi abbiamo:

$$\langle 0 | \hat{X}(\theta) | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \Delta \hat{X}^2(\theta) | 0 \rangle = 1$$

Quindi interpreto questo risultato come misura delle fluttuazioni di vuoto che «entrano» nel BS



(3) Interpretazione della rivelazione omodina nella rappresentazione di Heisenberg con LO quantum

$$\hat{y} \approx i a a_{LO}^{\dagger} - i a^{\dagger} a_{LO}$$

$$\langle 0 | a^{\dagger} a | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \langle \alpha | \Delta \hat{y}^2 | \alpha \rangle | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \langle \alpha | (1 + a^{\dagger} a) a_{LO}^{\dagger} a_{LO} | \alpha \rangle | 0 \rangle + \underbrace{\langle 0 | \langle \alpha | a^{\dagger} a (1 + a_{LO}^{\dagger} a_{LO}) | \alpha \rangle | 0 \rangle}_{=0}$$

$$= \underbrace{\langle \alpha | a_{LO}^{\dagger} a_{LO} | \alpha \rangle}_{\text{rumore del LO}} = |\alpha|^2 \underbrace{\langle 0 | 1 + a^{\dagger} a | 0 \rangle}_{\text{rumore del vuoto} = 0}$$

Quindi a seconda di quale valore di aspettazione calcolo per primo ho una diversa interpretazione. Il problema è che non posso dare interpretazioni conclusive ad un procedimento sospeso a metà strada. Quindi la rappresentazione di Schrodinger appare come quella più adatta a dare un'interpretazione non ambigua.

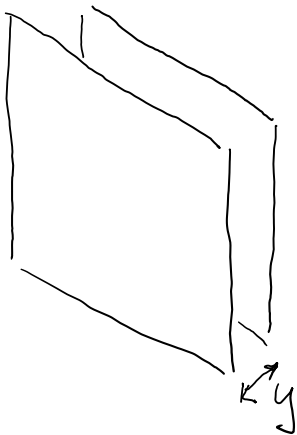
Quindi per concludere possiamo affermare che l'omodina non è un modo per misurare le fluttuazioni di vuoto. L'interpretazione del rumore visto dall'omodina come misura delle fluttuazioni di vuoto è solo dovuto al fatto che viene usato un modello semiclassico nel quale il LO classico non contiene rumore.



Appendice (C): effetto Casimir spiegato con una dimostrazione (non corretta) di tipo (A)

L'effetto Casimir si riferisce alla forza che si origina tra due piastre metalliche poste a piccola distanza.

La dimostrazione di tipo (A) dell'effetto Casimir procede come segue: si sostiene che la forza è dovuta all'energia di vuoto. Si considera un parallelepipedo e si scrive l'energia di vuoto dovuta a tutti i modi compatibili con la geometria del parallelepipedo. Si ottiene un'energia complessiva che dipende dalla distanza tra le due facce grandi del parallelepipedo:



dove la v sta ad indicare che è un'energia calcolata sullo stato di vuoto

L'energia di vuoto per singolo modo considerando le due possibili polarizzazioni è:

$$E(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{2} \hbar \omega$$

E' chiaro che il numero di modi che stanno nel parallelepipedo è una funzione della coordinata y che rappresenta la distanza tra le due piastre, quindi abbiamo:

$$\rightarrow H_v = \int d^3x \overset{\text{densità di Hamiltoniana}}{H_v} = H_v(y)$$

In un approccio Hamiltoniano (classico) si vorrebbe scrivere la seguente equazione del moto per l'impulso coniugato della variabile canonica y :

$$\dot{p}_y = - \frac{\partial H_v}{\partial y} - \{H_v, p_y\} \quad \leftarrow \text{parentesi di Poisson}$$

È chiaro che H_v dipende da y e quindi la derivata sarà diversa da zero, ovvero, si ottiene una forza tra le due lastre.

Un primo dubbio che questo procedimento non sia corretto è che abbiamo preso una soluzione particolare per il campo e l'abbiamo sostituita nell'Hamiltoniana generale e poi abbiamo fatto la derivata. Ma le equazioni di Hamilton dovrebbero servire proprio per trovare le soluzioni che invece in questo caso erano già note.

Un secondo dubbio riguarda il fatto che stiamo mescolando due teorie non omogenee, una quantistica, quella di partenza che mi ha portato alla definizione dello stato di vuoto e poi una classica che è quella attraverso la quale ho messo in relazione la forza e la derivata rispetto a y (l'equazione di Hamilton).

In questo approccio semiclassico però il dubbio che il procedimento sia in qualche modo corretto rimane perchè alla fine i conti portano ad un risultato compatibile con l'esperimento.



Per chiarire il dubbio dobbiamo seguire un approccio full-quantum e dedurre se il vuoto (dovuto all'Hamiltoniana libera del campo) può generare una forza sulle piastre.

Quindi dobbiamo riscrivere l'equazione per l'impulso coniugato nella versione quantum. Ovvero sostituiamo alle parentesi di Poisson il commutatore:

$$\dot{p}_y = - \{H, p_y\} \quad \Rightarrow \quad i\hbar \hat{p}_y = - [\hat{H}, \hat{p}_y]$$

In generale l'Hamiltoniana, come sappiamo, sarà la somma di tre termini:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_\psi + \hat{H}_{int}$$

Ma nella dimostrazione di tipo (A) dobbiamo considerare solo l'Hamiltoniana libera del campo di gauge e quindi solo H_A (H_ψ è quella degli elettroni e H_{int} è quella di interazione) e quindi siamo interessati alla seguente equazione:

$$i\hbar \dot{\hat{p}}_y = - [\hat{H}_A, \hat{p}_y]$$



Adesso possiamo anche riprovare a procedere come nel caso semiclassico, ovvero, quantizziamo H_A su un volume che dipende da y .

La prima cosa da notare è che in questo approccio relativistico (come è inevitabilmente quello della seconda quantizzazione del campo di gauge) la posizione non è un osservabile quindi non può comparire da nessuna parte un operatore del tipo:

$\hat{y}$ per il quale ci si aspetterebbe qualcosa del tipo: $[\hat{y}, \hat{p}_y] \neq 0$

Gli unici operatori che possono comparire in H_A e P_y sono gli operatori di distruzione e creazione dei fotoni in H_A e gli operatori di creazione e distruzione degli elettroni (e dei positroni) in P_y . Quindi si ottiene:

$$i\hbar \hat{p}_y = -[\hat{H}_A, \hat{p}_y] = 0$$

ovvero, la forza non è dovuta al vuoto. Quindi per trovare la soluzione giusta dobbiamo introdurre l'Hamiltoniana di interazione e spiegare l'interazione tra le due piastre attraverso i campi generati dagli elettroni delle piastre. In tal caso possiamo avere:

$$[\hat{H}, \hat{p}_y] \neq 0$$