UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Appunti di Relatività Generale

Trattazione non lagrangiana

Simone Cialdi

Outline

Lunghezza dei quadrivettori	pg.1-18
Derivata covariante	pg.19-26
Principio di equivalenza	pg. 27-31
Equazione di Einstein	pg. 32-47
Linearizzazione (onde gravitazionali)	pg. 48-68
Convenzione sui segni	pg. 69- 70
Inroduzione all'approccio Lagrangiano	pg. 70-74
Metrica di Schwarzschild	pg. 75-81
Metrica di Robertson-Walker e equazioni di Friedmann	pg. 82-93

Problemi:

Differenza tra coordinate e non coordinate

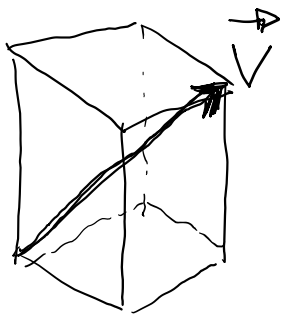
Calcolo delle forze di marea agenti su un astronauta che cade in un buco nero

Appendice:

derivazione del tensore di Riemann	pg. A1-
il tensore energia-impulso	

Lunghezza dei quadrivettori:

Nella fisica newtoniana il tempo è assoluto e la lunghezza dei vettori 3D è un invariante



$$S^2 = \vec{V}\vec{V} = V^i V^i = V^{j'} V^{j'}$$

Dove $V^i, V^{j'}$ rappresentano e componenti del vettore in due diversi sistemi di assi in sistemi di riferimento inerziali

Le proiezioni del vettore lungo i singoli assi possono cambiare la ma sua lunghezza è invariante

Anche nella relatività speciale la lunghezza del vettore è invariante ma devo considerare uno spazio 4D perchè il tempo non è assoluto. In generale abbiamo:

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$$

dove μ varia da 0 a 3. V è un quadrivettore e e_μ sono i vettori base

Formalmente possiamo scrivere:

$$S^2 = \vec{V}\vec{V} = V^\mu V^\nu \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu \overset{df}{=} \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$$

la prima coordinata rappresenta il tempo e le altre tre sono quelle spaziali

La richiesta ragionevole e ispirata dalla fisica newtoniana che questa lunghezza sia invariante ha come conseguenza che deve esistere una velocità invariante ovvero quella per cui la lunghezza è nulla. Il fatto di poter ottenere una lunghezza nulla anche se le componenti del vettore sono diverse da zero dipende da come definiamo il tensore $\eta_{\mu\nu}$ ovvero il prodotto scalare.

Consideriamo il vettore posizione: $V^\mu = x^\mu$

Le sue componenti sono: $x^0 = ct \, , \; x^1 = x \, , \; x^2 = y \, , \; x^3 = z$

Dove quindi c ha le dimensioni di una velocità. <u>Se le coordinate spaziali rappresentano un punto che si muove alla velocità c</u> e se per la parte spaziale facciamo valere il teorema di pitagora (lo spazio è piatto) ottengo una lunghezza nulla se pongo:

$$s^2 = c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) = c^2t^2 - \ell^2 = c^2t^2 - c^2t^2 = 0$$

Questo equivale a porre:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Voglio che la lunghezza sia invariante e che il prodotto scalare si scriva nello stesso modo in tutti i riferimenti inerziali e quindi:

$$S^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'} x^{\beta'}$$

dove mi riferisco a due diversi sistemi di assi

Quindi nel caso particolare di lunghezza nulla ricavo subito che la velocità che fornisce il caso a lunghezza nulla deve essere invariante (infatti posso riscrivere l'equazione della pagina precedente in entrambi i sistemi perchè la lunghezza è invariante).

Notare che per come è fatto il tensore $\eta_{\mu\nu}$ posso scrivere:

$$x^\mu \overset{df}{=} (ct, \mathbf{x}) \Rightarrow \eta_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$$

Dove x^μ è il vettore controvariante e x_μ è il vettore covariante. Ovvero con il tensore metrico posso abbassare gli indici e riscrivere in questo modo il prodotto scalare:

$$S^2 = \vec{V}\vec{V} = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2$$

In Bold indico il vettore spaziale x 3D

Estendendo questa regola ai tensori a due indici trovo:

$$T_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} \quad ; \quad T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\mu\beta} T^{\alpha\beta}$$

E quindi anche:

$$\eta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} \quad ; \quad \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\mu\beta}\eta^{\alpha\beta}$$

Inoltre:

$$\eta_{\mu\alpha}\eta_{\mu\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

E quindi:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

che posso verificare direttamente

In conclusione con i tensori $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ posso abbassare e alzare gli indici

Fin qui non abbiamo ancora detto nulla su come trasformano i quadrivettori, abbiamo solo detto che la loro lunghezza (definita dal prodotto scalare definito dal tensore $\eta_{\mu\nu}$) deve essere invariante.

In modo del tutto generico posso dire che il vettore V trasforma nel seguente modo quando passo tra due diversi sistemi (con l'indice primato indico il nuovo sistema):

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} V^{\alpha}$$

Le trasformazioni $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}$ sono quelle che conservano la lunghezza del vettore, ovvero:

$$S^2 = \eta_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} V^{\alpha} V^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta}$$

Qundi per trovare le trasformazioni devo imporre:

$$\boxed{\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}}$$

Posso scrivere: $\Lambda \overset{df}{=} e^{\omega}$; $e^{\omega} = 1 + \omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \dots$

Quindi posso trovare le proprietà di una trasformazione infinitesima e poi estenderle alla trasformazione finita:

$$\Lambda = e^{\omega} \; ; \quad \delta\Lambda = e^{\delta\omega} = e^{\omega\alpha} \approx 1 + \omega\alpha$$

Con α piccolo

Quindi posso riscrivere la trasformazione infinitesima in questo modo:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \left(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \omega^{\mu}{}_{\alpha}\right) \Rightarrow \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \omega^{\mu}{}_{\alpha}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \omega^{\nu}{}_{\beta}\right)$$

Approssimando al primo ordine in ω ottengo:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\,\delta^{\mu}{}_{\alpha}\,\delta^{\nu}{}_{\beta} + \eta_{\mu\nu}\,\delta^{\mu}{}_{\alpha}\,\omega^{\nu}{}_{\beta} + \eta_{\mu\nu}\,\delta^{\nu}{}_{\beta}\,\omega^{\mu}{}_{\alpha} =$$

$$= \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\nu}\,\omega^{\nu}{}_{\beta} + \eta_{\mu\beta}\,\omega^{\mu}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha}$$

Ovvero, deve essere:

$$\boxed{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}}$$

Tensore antisimmetrico, quindi i 4 elementi lungo la diagonale sono nulli

Il tensore che fornisce la trasformazione è:

$$\omega^{\mu}{}_{\beta} = \eta^{\mu\alpha}\,\omega_{\alpha\beta}$$

dato che il tesore con i due indici in basso è antisimmetrico si ottiene subito:

$$\omega^{0}{}_{1} = \eta^{00}\omega_{01} = \omega_{01}$$

$$\omega^{1}{}_{0} = \eta^{11}\omega_{10} = -\omega_{10} = \omega_{01}$$

$$\omega^{1}{}_{2} = \eta^{11}\omega_{12} = -\omega_{12}$$

$$\omega^{2}{}_{1} = \eta^{22}\omega_{21} = -\omega_{21} = \omega_{12}$$

$$\dots$$

$$\boxed{\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ \alpha_2 & -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ \alpha_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Quindi abbiamo un totale di 6 trasformazioni indipendenti (che corrispondono a 3 trasformazioni dell'impulso (boost) e tre rotazioni). Possiamo vedere in modo esplicito queste trasformazioni. Prendiamo ad esempio quella generata da α che riguarda il termine temporale e il primo spaziale. Possiamo ritagliare la matrice 2x2 dove compare α_1 e scrivere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\alpha_1 = \varepsilon\,\alpha_1$$

Quindi la traformazione finita è:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \mathbb{1} + \varepsilon \alpha_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \alpha_1^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 \alpha_1^3 + \frac{1}{4!}\varepsilon^4 \alpha_1^4 =$$

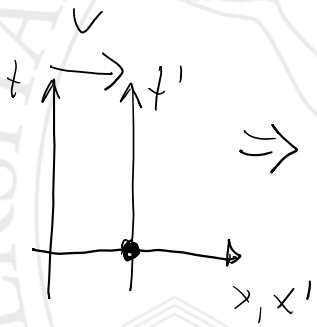
$$= \mathbb{1} + \varepsilon \alpha_1 + \frac{1}{2}\mathbb{1}\, \alpha_1^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon\, \alpha_1^3 + \frac{1}{4!}\mathbb{1}\, \alpha_1^4 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & \operatorname{senh}\alpha_1 \\ \operatorname{senh}\alpha_1 & \cosh\alpha_1 \end{pmatrix}$$

dove ε è il generatore della trasformazione

Adesso dobbiamo dare un significato fisico a α e quindi applichiamo la trasformazione al vettore posizione

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & \operatorname{senh}\alpha_1 \\ \operatorname{senh}\alpha_1 & \cosh\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow x' = 0 = \operatorname{senh}\alpha_1\, ct + \cosh\alpha_1\, vt$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} \overset{\text{def}}{=} \beta = -\operatorname{tgh}\alpha_1$$

Sapendo che: $\cosh^2\alpha_1 - \operatorname{senh}^2\alpha_1 = 1 \Rightarrow \cosh\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \overset{df}{=} \gamma$

$$\Rightarrow \operatorname{senh}\alpha_1 = -\beta\gamma$$

E quindi ho trovato la trasformazione di Lorentz lungo la direzione x:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poi per le tre trasformazioni relative ai soli termini spaziali (rotazioni) troverò appunto tre trasformazioni che corrispondono alle rotazioni rispetto ai tre assi spaziali. Per i tre boost posso introdurre tre generatori (tre matrici come la ε con l'aggiunta di una i) che chiamo K e posso fare la stessa cosa per i generatori delle rotazioni che chiamo J. Si verifica direttamente che risulta:

$$\Lambda = e^{-iJ\beta}$$

$$\Lambda = e^{+iK\alpha} \Rightarrow [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \,;\; [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k \,;\; [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k$$

Possiamo vedere che rispetto alle 6 trasformazioni di Loretnz (omogene) è possibile scrivere questa uguaglianza:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\nu}}$$

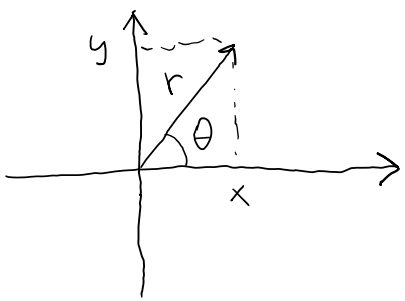
e per la trasformazione inversa:

$$\Lambda^{-1\,\mu'}{}_{\nu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{dx^{\mu'}}$$

Per verificarlo basta prendere il caso della trasfromazione del vettore posizione e della sua inversa.

Vogliamo che valga la stessa idenità anche per le trasformazioni di coordinate, o meglio, definiamo coordinate quelle per le quali vale questa relazione tra la trasformazione e le derivate del vettore posizione.

E' importante vedere l'esempio relativo alla trasformazione tra coordinate cartesiane e polari:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$V^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dx^{j}} V^{j}$$

$$e_{i'} = \frac{dx_{j}}{dx^{i'}} e_{j}$$

nota che affinchè si conservi la lunghezza i vettori base devono trasformare con l'inversa

Infatti, ritornando brevemente nello spazio 4D deve essere:

$$\vec{V}\vec{V} = V^{\mu'} e_{\mu'} V^{\nu'} e_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} V^{\alpha} \Lambda_{\mu'}{}^{\beta} e_{\beta} \Lambda^{\nu'}{}_{\gamma} V^{\gamma} \Lambda_{\nu'}{}^{\delta} e_{\delta} =$$

$$= \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\alpha}} \frac{dx^{\beta}}{dx^{\mu'}} \frac{dx^{\nu'}}{dx^{\gamma}} \frac{dx^{\delta}}{dx^{\nu'}} V^{\alpha} e_{\beta} V^{\gamma} e_{\delta} =$$

$$= \delta^{\beta}_{\alpha} \delta^{\delta}_{\gamma} V^{\alpha} e_{\beta} V^{\gamma} e_{\delta} = V^{\alpha} e_{\alpha} V^{\gamma} e_{\gamma} = V^{\alpha} V^{\gamma} \eta_{\alpha\gamma}$$

Ovvero abbiamo capito come trasformano i vettori controvarianti e covarianti (e i vettori base trasformano come vettori covarianti):

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} V^{\alpha} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\alpha}} V^{\alpha} \qquad e_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\alpha} e_{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{dx^{\mu'}} e_{\alpha}$$

Tornando all'esempio delle coordinate cartesiane e polari, possiamo vedere come sono i vettori base delle coordinate polari partendo da quelli noti delle coordinate cartesiane:

$$e_{\mu'} = \frac{dx^\alpha}{dx^{\mu'}} e_\alpha \quad \text{dove} \quad e_x = \hat{x} \quad e \quad e_y = \hat{y} \qquad \hat{x}\hat{x} = 1 \quad \hat{x}\hat{y} = 0$$

$$\Rightarrow e_r = \frac{dx}{dr}\hat{x} + \frac{dy}{dr}\hat{y} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$$

$$e_\theta = \frac{dx}{d\theta}\hat{x} + \frac{dy}{d\theta}\hat{y} = -r\sin\theta\,\hat{x} + r\cos\theta\,\hat{y}$$

Da notare che risulta:

$$\boxed{e_r \cdot e_r = 1 \quad ; \quad e_\theta \cdot e_\theta = r^2 \neq 1 \qquad e_r \cdot e_\theta = 0}$$

$$\eta_{ij} \overset{df}{=} e_i e_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Nota che affinchè siano coordinate ben definite il vettore base theta risulta avere una lunghezza diversa da 1. In caso contrario si definirebbero «non coordinate»

Conviene riassumere brevemente quando scritto fino a questo punto:

Invarianza:

$$V^{\mu'} V_{\mu'} = V^{\alpha} V_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} V_{\alpha} V_{\beta}$$

Indici alti e bassi:

$$V^{\mu} = \eta^{\mu\nu} V_{\nu} \quad ; \quad V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu}$$

Trasformazioni:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} V^{\alpha} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\alpha}} V^{\alpha}$$

$$V_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\alpha} V_{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{dx^{\mu'}} V_{\alpha}$$

Con queste regole possiamo scrivere il nuovo tensore metrico prendendo le coordinate sferiche al posto di quelle cartesiane. Si ottiene:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

Lo spazio è sempre lo spazio piatto di Minkowsky ma adesso con questa scelta di coordinate i coefficienti del tensore metrico (g) sono diversi da 1 e -1. Anche in questo caso valgono le solite regole quindi:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 =$$

$$= g_{\mu'\nu'}\, dx^{\mu'} dx^{\nu'} = dx^{\mu'} dx_{\mu'} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

Dove ho considerato una lunghezza infinitesima per convenienza rispetto a quanto andremo a dire

Una prima cosa da notare è che adesso: $g^{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}$

In generale abbiamo: $x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}$; $x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}$

E in particolare: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} dx_{\alpha} dx^{\nu} = dx_{\nu} dx^{\nu}$

E quindi deve risultare: $\boxed{g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = g_{\nu\mu} g^{\mu\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu}}$

Poiche il tensore g è simmetrico, si ottiene: $\boxed{g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}}$

Ovvero: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1/r^2 & \\ & & & -1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

Quindi abbiamo le stesse regole che avevamo scritto nel caso del tensore $\eta_{\mu\nu}$ relativo alle coordinate cartesiane:

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad ; \quad V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

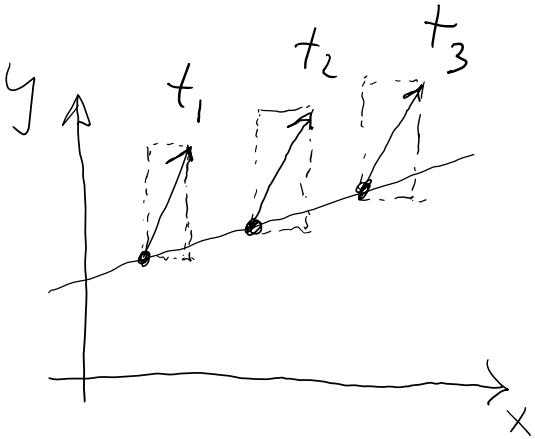
$$ds^2 = d\vec{x}\, d\vec{x} = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$$

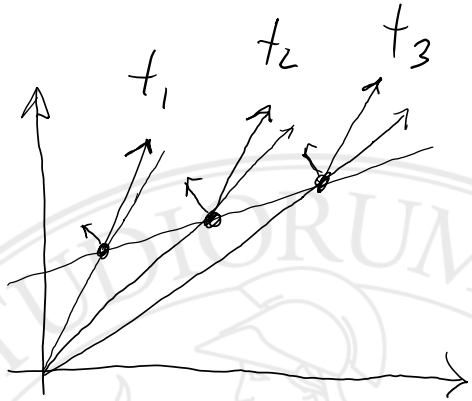
Quindi una prima importante osservazione è che se anche il tensore metrico dipende dalle coordinate questo non vuol dire che lo spazio è curvo. Un primo step per introdurre gli spazi curvi è quello di scrivere la derivata di un vettore, ovvero, la derivata di un vettore le cui componenti cambiano ad esempio nel tempo o rispetto ad un certo parametro preso come riferimento

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = ?$$

Derivata covariante:

La prima cosa da notare è questa: consideriamo un vettore V che si sposta nel tempo rimanendo parallelo a se stesso. Se consideriamo le coordinate cartesiane le sue componenti non cambiano nel tempo, mentre se consideriamo le coordinate polari cambiano:





Quinidi, in generale quando scriviamo la derivata del vettore dobbiamo anche considerare come cambiano i vettori base. Possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} V^\alpha e_\alpha = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} e_\alpha + \boxed{V^\alpha \frac{de_\alpha}{d\lambda}}$$

Qui lambda è un parametro generico. Potremmo prendere ad esempio il tempo proprio. Adesso vediamo più nel dettaglio il termine con la derivata del vettore base:

$$\frac{d\vec{V}}{d\tau} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} e_\alpha + V^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} e_\alpha + V^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial e_\alpha}{dx^\beta}$$

Dove ho scritto la derivata totale rispetto al tempo attraverso le derivate parziali del vettore base rispetto alle coordinate. Queste derivate parziali si possono scrivere a loro volta per mezzo dei vettori base:

$$\boxed{\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma}$$

Dove i $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ son i simboli di Christoffel e come si vede dipendono da tre indici.

Quindi possiamo riscrivere la derivata in questo modo:

$$\frac{d\vec{V}}{d\tau} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} e_\alpha + V^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma = \frac{dV^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} e_\alpha =$$

$$= \left[\frac{dV^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} \right] e_\alpha \stackrel{df}{=} \frac{DV^\alpha}{d\tau} e_\alpha$$

dove ho ridefinito gli indici muti in modo da tirare fuori e_α

Posso sviluppare anche la derivata totale di V e quindi ottengo:

$$\frac{dx^\beta}{d\tau} \left[\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma \right] e_\alpha \stackrel{df}{=} \frac{dx^\beta}{d\tau} \left[V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma \right] e_\alpha$$

Se uso le coordinate cartesiane il pezzo con il simbolo di Christoffel sparisce perchè le componenti dei vettori base non dipendono dalle coordinate. In generale invece i simboli di Cristoffel saranno diversi da 0 e definisco così la derivata covariante del vettore V:

$$\boxed{V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\alpha = V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} V^\gamma}$$

Qui ho usato la simmetria del simbolo rispetto allo scambio di β e γ che però non ho ancora dimostrato.

Il passo importante sarà capire come questi simboli sono collegati al tensore metrico, ovvero, come si possono calcolare una volta noto il tensore metrico. Questo è fondamentale per poter scrivere le derivate dei quadrivettori.

Prima di fare questo però vediamo come si scrive la derivata covariante dei vettori covarianti e quella dei tensori a due indici:

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\gamma}$$

$$V_{\alpha;\beta} = ? \qquad T_{\mu\nu;\beta} = ? \qquad T^{\mu\nu}{}_{;\beta} = ? \qquad T^{\mu}{}_{\nu;\beta} = ?$$

Per trovare la derivata covariante del vettore covariante sfruttiamo l'invarianza e quindi il fatto che la derivata dello scalare non dipende dai vettori base:

$$\phi = V^{\alpha} V_{\alpha} \Rightarrow \phi_{;\beta} = \phi_{,\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta} V_{\alpha} + V^{\alpha} V_{\alpha,\beta} =$$

$$= \left(V^{\alpha}{}_{;\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\gamma}\right) V_{\alpha} + V^{\alpha} V_{\alpha,\beta} = V^{\alpha}{}_{;\beta} V_{\alpha} + V^{\alpha} V_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} V^{\gamma} V_{\alpha} =$$

$$= V^{\alpha}{}_{;\beta} V_{\alpha} + V^{\alpha}\left(V_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} V_{\gamma}\right) \overset{df}{=} V^{\alpha}{}_{;\beta} V_{\alpha} + V^{\alpha} V_{\alpha;\beta}$$

Quindi abbiamo ottenuto:

$$\boxed{V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} V_{\gamma}}$$

Per quanto riguarda i tensori a due indici basta dire che questi si possono scrivere come il prodotto di tensori ad un indice:

$$T^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu} \Rightarrow T^{\mu\nu}{}_{;\beta} = A^{\mu}{}_{;\beta} B^{\nu} + A^{\mu} B^{\nu}{}_{;\beta} =$$

$$= A^{\mu}{}_{,\beta} B^{\nu} + A^{\mu} B^{\nu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} A^{\gamma} B^{\nu} + A^{\mu} \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} B^{\gamma} =$$

$$= T^{\mu\nu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} T^{\gamma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} T^{\mu\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T_{\mu\nu;\beta} &= T_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} T_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} T_{\mu\alpha} \\ T^{\mu\nu}{}_{;\beta} &= T^{\mu\nu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} T^{\mu\alpha} \\ T^{\mu}{}_{\nu;\beta} &= T^{\mu}{}_{\nu,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha}{}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} T^{\mu}{}_{\alpha} \end{aligned}}$$

Per poter ricavare il legame tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico abbiamo bisogno anche di conoscere la derivata covariante del tensore metrico:

$$g_{\mu\nu;\beta} = ?$$

Per trovare il risultato sfruttiamo il fatto che possiamo usare il tensore metrico per abbassare e alzare gli indici:

$$g_{\mu\nu}\left(V^{\nu}{}_{;\beta}\right) = V_{\mu;\beta} = \left(g_{\mu\nu}V^{\nu}\right)_{;\beta}$$

E quindi deve essere:

$$\boxed{g_{\mu\nu;\beta} = 0}$$

E in modo analogo trovo:

$$\boxed{g^{\mu\nu}{}_{;\beta} = 0}$$

Poi abbiamo bisogno di dimostrare che: $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}$

Per dimostrarlo verifichiamo che se un tensore è simmetrico in un sistema di coordinate allora lo è in tutti: $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$

$$A_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\alpha} \Lambda_{\nu'}{}^{\beta} A_{\alpha\beta}$$

α, β indici muti

$$A_{\nu'\mu'} = \Lambda_{\nu'}{}^{\alpha} \Lambda_{\mu'}{}^{\beta} A_{\alpha\beta} = \Lambda_{\nu'}{}^{\alpha} \Lambda_{\mu'}{}^{\beta} A_{\beta\alpha} = \Lambda_{\nu'}{}^{\beta} \Lambda_{\mu'}{}^{\alpha} A_{\alpha\beta} = A_{\mu'\nu'}$$

Inoltre la derivata di uno scalare è un tensore e abbiamo:

$$\phi_{,\alpha,\beta} = \phi_{,\beta,\alpha}$$

scalare

Se cambio coordinate potrò scrivere:

$$\phi_{,\alpha;\beta} = \phi_{,\beta;\alpha}$$

E scrivendo la derivata covariante ottengo:

$$\phi_{,\alpha,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \phi_{,\gamma} = \phi_{,\beta,\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} \phi_{,\gamma} \Rightarrow \boxed{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}}$$

Adesso si usa l'equazione per la derivata covariante di g, e si sfrutta la simmetria di g e di Gamma:

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\alpha\mu;\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}$$

$$g_{\beta\mu;\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad -g_{\beta\mu,\alpha} = -\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} g_{\beta\nu}$$

Si sommano questi tre termini e si sfrutta la simmetria di g: $g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$

Dei tre termini che si ottengono grazie alla simmetria di Gamma solo uno rimane:

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2 g_{\alpha\nu} \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}$$

Divido per 2 e moltiplico per $g^{\alpha\gamma}$ $\quad (g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\nu} = \delta^{\gamma}_{\nu})$

Ridefinendo gli indici ricavo:

$$\boxed{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(g_{\lambda\gamma,\beta} + g_{\beta\lambda,\gamma} - g_{\beta\gamma,\lambda} \right)}$$

Schutz pg. 134

Si nota che il simbolo di Christoffel dipende da g e dalla derivata prima di g.
Questo legame tra il simbolo con il quale costruisco la derivata covariante e il tensore metrico ci permetterà di trasformare il principio di equivalenza in equazioni.

<u>Principio di equivalenza:</u>

Secondo il principio di equivalenza un sistema di riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale è localmente inerziale. Ovvero, esiste un punto P in questo sistema di riferimento in caduta libera rispetto al quale posso definire un sistema di assi dove il tensore metrco è quello di Minkowsky e le sue derivate prime rispetto agli assi sono tutte nulle. Le derivate seconde sono invece non tutte nulle.

Quindi, in questo riferimento in caduta libera localmente inerziale le leggi della fisica sono quelle della fisica classica, intendendo per fisica classica in questo contesto quella dove si trascura l'effetto del campo gravitazionale sul tensore metrico.

Fin qui l'unica cosa che sappiamo è che il tensore metrico cambia con il cambio di coordinate e sospettiamo che il cambio di coordinate che rappresenta il passaggio dal sistema di riferimento in caduta libera ad uno non in caduta libera generi un tensore metrico in generale più complicato rispetto a quello di Minkowsky e dipendente dalle coordinate stesse (visto che l'equivalenza è solo locale)

Dal punto di vista puramente matematico dato un tensore simmetrico g_tilde (che non è detto che rappresenti l'effetto di un campo gravitazionale) esiste una trasformazione (che in generale non è una trasformazione di coordinate) per la quale abbiamo:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu}} \tilde{\eta}_{\mu\nu} \qquad \tilde{\eta}_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\alpha}\tilde{\Lambda}_{\nu}{}^{\beta} g_{\alpha\beta}$$

Dove eta_tilde ha un numero di +1, -1 e 0 lungo la diagonale che rappresentano il numero di autovalori rispettivamente positivi, negativi e nulli di g_tilde. Quindi attenzione, il tensore eta_tilde non è in generale il tensore di Minkowsky. Questa trasformazione è globale ma non è in generale una trasformazione di coordinate ovvero:

$$\tilde{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} \neq \frac{dx^{\mu}}{dx^{\nu}}$$

Si dimostra invece che esiste una trasformazione di coordinate per cui vale:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{dx^{\mu}}{dx^{\nu}}} \tilde{g}_{0\mu\nu} \quad / \quad g_0(P)_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu} \qquad g_0(P)_{\mu\nu,\beta} = 0$$

Dove queste uguaglianze valgono solo localmente e quindi nel punto P. Attenzione questo non è il principio di equivalenza.

Il tilde si riferisce al fatto che fin qui <u>non</u> abbiamo applicato il principio di equivalenza e quindi abbiamo scritto solo la conseguenza di un teorema matematico dove la fisica ancora non c'e'.

Dal principio di equivalenza deduciamo che se il tensore g rappresenta l'effetto di un campo gravitazionale allora deve esistere una trasformazione di coordinate per cui localmente otteniamo il tensore di Minkowsky con le derivate prime nulle:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{dx^{\mu}}{dx^{\nu}}} g_{0\,\mu\nu} \qquad g_0(P)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \qquad g_0(P)_{\mu\nu,\beta} = 0$$

Se g_tilde rappresenta un campo gravitazionale allora lo scrivo g ed esiste una trasformazione di coordinate che lo trasforma localmente nel tensore metrico di Minkowsky (quindi 1,-1,-1,-1) dove (localmente) valgono le leggi della fisica classica

Adesso, date queste uguaglianze dobbiamo riuscire a scrivere delle leggi della fisica valide in ogni sistema di riferimento e non solo in quelli inerziali.

Il passaggio da una legge valida in un riferimento inerziale a quelle valida in qualsiasi riferimento fa uso delle derivata covariante e del principio di equivalenza.

Per capire la logica di questo passaggio conviene riferirsi ad una equazione specifica e in particolare all'equazione più importante della meccanica classica (newtoniana):

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

In assenza di forze un corpo si muove di moto rettilineo uniforme

riscriviamo questa equazione nell'ambito della relatività speciale, quindi dobbiamo introdurre il quadrivettore p e derivarlo rispetto ad un invariante ovvero il tempo proprio:

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(p^\alpha e_\alpha\right) = \frac{dp^\alpha}{d\tau} e_\alpha = 0$$

Da notare che non ho fatto le derivate dei vettori base perchè in questo sistema di riferimento inerziale so che esiste un sistema di assi (assi cartesiani) per il quale i simboli di Christoffel sono nulli e quindi la derivata covariante è uguale a quella normale. Quindi possiamo scrivere che in assenza di forze:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\beta}{d\tau} p^\alpha{}_{,\beta} = 0$$

ovvero: $u^\beta p^\alpha{}_{,\beta} = 0 \Rightarrow \boxed{p^\beta p^\alpha{}_{,\beta} = 0}$

dove: $u^\beta \stackrel{df}{=} dx^\beta / d\tau \Rightarrow p^\beta = m u^\beta$

Notiamo quindi che in questo riferimento con questo sistema di assi vale:

$$p^\beta p^\alpha{}_{,\beta} = 0 \rightarrow p^\beta p^\alpha{}_{;\beta} = p^\beta \left(p^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\gamma \right) = 0$$

Perchè i simboli di Christoffel sono nulli. La stessa equazione con la derivata covariante quindi vale per qualsiasi altro sistema di coordinate. Ovvero vale per qualsiasi trasformazione di coordinate:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{dx^\mu}{dx^\nu}$$

Che rappresenta un cambio di coordinate nello stesso riferimento o in altri riferimenti (l'equivalente delle trasformazioni di Lorentz per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali). Quindi si conclude che la seguente equazione è valida in tutti i riferimenti:

$$\boxed{p^\beta p^\alpha{}_{;\beta} = 0}$$

Dove la derivata covariante è fatta con i simboli di Christoffel ottenuti in generale da una metrica dovuta ad un campo gravitazionale come abbiamo dedotto dal principio di equivalenza.

Quindi la procedura generale è: scrivo la legge della fisica valida nel riferimento localmente inerziale con le derivate normali e poi sostituisco le derivate normali con quelle covarianti (<u>sostituisco la , con il ;</u>)

L'equazione di Einstein:

L'equazione appena scritta è l'equazione della geodetica e ci dice come si muovono i corpi in un campo gravitazionale. Vedremo nel dettaglio questa equazione nella parte di questi appunti dedicata alla soluzione di alcuni problemi fondamentali.
Adesso invece il nostro fine è quello di continuare con la definizione teorica della Relatività Generale. Quindi dobbiamo scrivere l'equazione di Einstein, ovvero, l'equazione con la quale ricaviamo il tensore metrico.

Per fare questo dobbiamo usare il pricipio di equivalenza nella forma (sostituisco la , con il ;) al fine di trovare una legge valida in tutti i sistemi di riferimento (seguiamo un'idea che è quella di volere scrivere una legge valida in tutti i sistemi di riferimento, ovvero, ci atteniamo al principio di covarianza generale). Il terzo principio che seguiamo in questa ricerca è quello di consistenza, ovvero, in opportune condizioni l'equazione della Relatività Generale deve convergere a quella di Newton

Ci serve quindi un riferimento che parte dalla teoria di Newton che faccia da base per trovare l'equazione di Einstein. Questo riferimento è l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \Rightarrow \phi = -\frac{GM}{r}$$

Questa equazione ha un primo termine che dipende dalla derivata seconda del campo gravitazionale e un secondo termine che dipende dalla densità di massa

Sospettiamo che questi due termini provengano da due tensori che fanno parte di un'equazione tensorialmente valida che vale in tutti i sistemi di riferimento. Il primo tensore dovrà contenere in qualche modo il tensore metrico (che è quanto vogliamo trovare) e il secondo dovrà contenere la distribuzione delle masse e quindi dell'energia del sistema. Un punto importante da notare è che il campo gravitazionale compare sotto una derivata seconda. Se il campo gravitazionale ha a che fare con gli elementi della metrica allora nel primo tensore cercato dovranno comparire derivate seconde del tensore metrico. Questo esclude che il tensore cercato sia lo stesso tensore metrico g.

Proviamo ad introdurre per primo il tensore che contiene la distribuzione dell'energia del sistema che definiamo come tensore energia-impulso. Il nostro fine è quello di trovare qualche proprietà fondamentale di questo tensore che necessariamente dovrà valere anche per il tensore che contiene la metrica. Questo perchè ci piacerebbe scrivere un'uguaglianza tra questi due vettori:

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$$ ← tensore energia impulso

Dove k è una qualche costante che troveremo grazie al principio di consistenza usando l'equazione di Poisson.

Introduco il tensore energia-impulso attraverso la sua definizione:

$$T^{\mu\nu} = \left\{ \text{Flusso della componente } \mu \text{ del quadrimpulso attraverso la superficie perpendicolare a } \nu \right.$$

Questa definizione coicide con la seguente equazione:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^{\mu} U^{\nu}$$ dove U è la quadrivelocità

Dobbiamo considerare una cosa: quando qui si parla di superficie perpendicolare ci si riferisce ad una superficie 3D perchè abbiamo uno spazio 4D. Ad esempio la «superficie» perpendicolare alla componente temporale è un volume. Poi qui ci si riferisce ad una distribuzione di energia continua nello spazio che può consistere in polvere o in un fluido (anche radiazione elettromagnetica).

Per rendere più intuitivo questo tensore è conveniente considerare per semplicità un caso non relativistivo e scriverne la quadridivergenza:

$$T^{0\nu}{}_{,\nu} = \frac{\partial}{c\partial t}\rho c^2 + \nabla \underbrace{c\rho V}_{J=\rho V} = 0$$

Equazione che esprime la conservazione dell'energia nel senso che la variazione nel tempo dell'energia è uguale al flusso di energia che attraversa la superficie. La corrente J rappresenta la densità di corrente di energia.

Nel riferimento localmente inerziale esprimo la conservazione dell'energia usando le coordinate cartesiane tramite l'equazione:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

Nota: da approfondire il caso con μ diverso da 0

Quindi in generale potrò scrivere:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

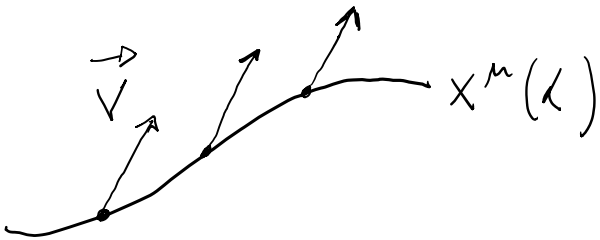
Questa per il momento è l'unica proprietà del tensore energia impulso che ci interessa mettere in evidenza insieme al fatto che la componente 00 rappresenta la densità di energia:

$$T^{00} = \rho c^2$$

Quindi il primo tensore dell'equazione di Einstein (G) deve avere la derivata covariante nulla e deve contenere le derivate seconde del tensore metrico.

Per trovare questo tensore introduco il concetto di trasporto parallelo e il tensore di Riemann

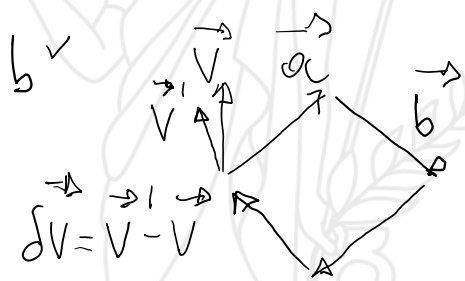
Il trasporto parallelo di un vettore consiste nello spostare un vettore lungo un percorso parametrizzato da un parametro λ (che potrebbe essere il tempo ad esempio) in modo che la sua derivata totale rispetto a tale parametro sia nulla:



$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow V^\alpha{}_{;\beta} = 0 \quad [V^\alpha{}_{,\beta} \neq 0]$$

In generale lungo questo percorso i vettori base cambieranno e quindi questa derivata la dobbiamo esprimere tramite la derivata covariante del vettore. Il punto importante è questo: se per mezzo di uno spostamento parallelo facciamo compiere ad un vettore un percorso infinitesimo che ritorna al punto di partenza possono accadere due cose (1) se lo spazio è piatto il vettore quando ritorna al punto di partenza è uguale a se stesso (2) se lo spazio è curvo (e questa ne è la definizione) allora le componenti del vettore cambiano. Il tensore di Riemann è quel tensore attraverso il quale si trova la variazione del vettore dopo questo percorso chiuso infinitesimo. Ovvero:

$$\delta V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V^\beta a^\mu b^\nu$$



Dove i vettori a e b definiscono il percorso chiuso infinitesimo lungo il quale trasportiamo parallelamente il vettore V.

In appendice ho riportato il calcolo per trovare il tensore di Riemann. Non si tratta di un conto particolarmente complesso, si deve solo applicare la definizione di derivata covariante e considerare che stiamo facendo uno spostamento infinitesimo. Riporto sotto il risultato:

$$\boxed{R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}}$$

(considero il segno – per la definizione de tensore di Riemann, vedi pg. 69)

Da notare che nei primi due termini compaiono le derivate seconde del tensore metrico e questo ci piace. Possiamo subito affermare che nel riferimento in caduta libera usando le coordinate cartesiane il 3° e il 4° termine sono nulli mentre i primi due no. Quello che non ci piace è che questo è un tensore a 4 indici e quindi non possiamo porlo uguale al tensore energia impulso per scrivere l'equazione di Einstein.

Vediamo le proprietà di simmetria di questo tensore:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha}{}_{\nu\beta\mu} + R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = 0 \quad ; \quad R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = -R^{\alpha}{}_{\beta\nu\mu}$$

Che si ricavano direttamente dalla definizione

Adesso il punto è trovare un'equazione valida nel riferimento localmente inerziale (che quindi conterrà delle derivate con la , e trasformarla in un'equazione valida in tutti i sistemi con il ;). Questo ci porterà all'identità di Bianchi che è di fondamentale importanza per trovare il tensore di Einstein.

Nel riferimento localmente inerziale come abbiamo detto i termini Gamma*Gamma del tensore di Rieman sono nulli e rimangono le derivate dei Gamma (che contengono le derivate seconde del tensore metrico). Si trova quindi che nel riferimento localmente inerziale abbiamo:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu,\lambda} + R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda,\mu} + R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu,\nu} = 0$$

E quindi in generale vale l'identità di Bianchi, ovvero:

$$\boxed{R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} + R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu;\nu} = 0}$$

Per maneggiare questa equazione e arrivare al risultato finale serve sapere che:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\alpha'} R^{\alpha'}{}_{\beta\mu\nu} \Rightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

Allora prendo l'identità di Bianchi e alzo il secondo indice con il tensore metrico:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu;\lambda} + R^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda;\mu} + R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu;\nu} = 0$$

E considerando le simmetrie scritte alla fine della pagina precedente scrivo (inverto il primo e secondo indice del secondo termine e il terzo e quarto del terzo):

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu;\lambda} - R^{\beta\alpha}{}_{\nu\lambda;\mu} - R^{\alpha\beta}{}_{\mu\lambda;\nu} = 0$$

Adesso contraggo α e μ. Questa contrazione fa nascere il <u>tensore di Ricci</u> nel primo e terzo termine:

$$R^{\beta}{}_{\nu;\lambda} - R^{\beta\mu}{}_{\nu\lambda;\mu} - R^{\beta}{}_{\lambda;\nu} = 0$$

Dove il <u>tensore di Ricci</u> è un tensore ottenuto dal tensore di Riemann per contrazione del primo e terzo termine:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \Leftarrow \boxed{R_{\beta\nu} \overset{df}{=} R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}}$$

$$R^{\alpha}{}_{\alpha\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\mu} = 0 \qquad R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu} = -R^{\mu}{}_{\beta\nu\mu}$$

Si verifica tramite le simmetrie scritte alla fine della pagina precedente che le contrazioni o sono nulle o sono opposte. Quindi il tensore di Ricci rappresenta l'unica contrazione possibile del tensore di Riemann

Adesso posso contrarre β e ν. Dal primo termine nasce lo <u>scalare di Ricci</u> mentre il secondo e terzo termine diventano uguali:

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{;\lambda} - 2R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} = 0$$

Dove lo <u>scalare di Ricci</u> è definito (da notare che è appunto uno scalare per definizione):

$$\boxed{R \overset{df}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}{}^{\mu} = R^{\mu}{}_{\mu}}$$

Possiamo scrivere:

$$R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2} R_{;\lambda} = \left(R^{\mu}{}_{\lambda} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}{}_{\lambda} R \right)_{;\mu} = 0$$

$$= \left(g_{\alpha\lambda} R^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}{}_{\lambda} R \right)_{;\mu} = g_{\alpha\lambda} \left(R^{\mu\alpha}{}_{;\mu} \right) - \frac{1}{2} \delta^{\mu}{}_{\lambda} R_{;\mu} = 0$$

E moltiplico tutto per $g^{\mu\alpha}$ $\quad \left[g^{\mu\alpha} g_{\alpha\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda} \right]$

$$\Rightarrow \delta^{\mu}{}_{\lambda} R^{\mu\alpha}{}_{;\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}{}_{\lambda} g^{\mu\alpha} R_{;\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \left(R^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} R \right)_{;\mu} = 0$$

Quindi provo a definire questo come tensore di Einstein perchè contiene le derivate secondo di g e la sua derivata covariante è nulla.

$$\boxed{G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R}$$

Dunque l'equazione da testare dovrebbe essere:

$$\boxed{G^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}}$$

Adesso proviamo a vedere se nel caso di piccoli campi e basse velocità ritrovaimo l'equazione di Poisson della fisica newtoniana. Dato che le velocità sono basse nel tensore energia impulso sopravvive solo il termine 00 (l'unico chedipende solo da c mentre tutti gli altri dipendono anche da v). Quindi ci serve solo il termine:

$$T^{00} = \rho c^2$$

Ci conviene riscrivere l'equazione di Einstein nel modo seguente:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) \cdot g^{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -\kappa T$$

$$R - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}_{\mu} = -R = -\kappa T \Rightarrow R = \kappa T$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa T g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right)$$

dove $T = T^{00} \eta_{00} = T^{00}$

$$\Rightarrow R_{00} = -\frac{1}{2} \kappa \rho c^2$$

Inoltre abbiamo:

$$R_{\mu\nu} \cong \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}$$

I termini con Gamma*Gamma sono trascurabili dato che il campo è piccolo

E possiamo scrivere:

$$R^{00} = g^{00} g^{00} R_{00} \approx \eta^{00} \eta^{00} R_{00} = R_{00}$$

Perchè il campo è piccolo e quindi posso usare il tensore di Minkowsky per alzare e abbassare gli indici:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}}$$

Considero il campo statico e quindi le derivate rispetto al tempo (x0) sono nulle

$$R_{00} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}}\right)\right]$$

$$g^{\alpha\lambda} \approx \eta^{\alpha\lambda} = \eta^{\alpha\alpha} \quad ; \quad g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h| \ll 1$$

$$\Rightarrow R_{00} = +\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\alpha}}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} h_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

Dove con l'indice i si intende i soli indici spaziali (la derivata rispetto al tempo è nulla)

$$R_{00} = -\frac{1}{2}k\rho c^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 h_{00} = k\rho c^2$$

Quindi ci deve essere una relazione lineare tra il potenziale gravitazionale e la componente h00. Potremmo anche scrivere:

$$h_{00} = k'\phi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\phi = \frac{k}{k'}\rho c^2 = 4\pi G\rho$$

Ma questo non ci permette di trovare la costante k che compare nell'equazione di Einstein

Per completare il problema e trovare k possiamo prendere l'equazione della geodetica:

$$p^\beta p^\alpha{}_{;\beta} = 0 \Rightarrow m^2 \frac{dx^\beta}{d\tau}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_{,\beta} + m^2 \frac{dx^\beta}{d\tau}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0}$$

Consideriamo solo le componenti temporali perchè dipendono da c e quindi sono più grandi e poi consideriamo nulle le derivate rispetto al tempo perchè il campo è statico

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}\left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Quindi si ricava subito che: $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = \text{costante}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^i}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla} h_{00} \Rightarrow \phi = \frac{c^2}{2}h_{00}$$

Dove i riguarda solo gli indici spaziali

E adesso possiamo trovare k:

$$\nabla^2 h_{00} = k\rho c^2 \quad ; \quad h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = \frac{1}{2} k \rho c^4 = 4\pi G \rho$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{8\pi G}{c^4}} \approx 2 \cdot 10^{-43} \ m\,kg$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} \qquad m_{Terra} = 5.97 \cdot 10^{24} \ kg \qquad r_{Terra} = 6{,}37 \cdot 10^{6} \ m$$

$$m_{Sole} = 1{,}99 \cdot 10^{30} \ kg \qquad d_{Sole} = 150 \cdot 10^{9} \ m$$

$$\phi_{Terra} = -\frac{GM_{Terra}}{r_{Terra}} = -6.27 \cdot 10^{7} \ m\,kg \Rightarrow h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi_{Terra} = 1{,}39 \cdot 10^{-9} \ll 1$$

$$\phi_{Sole} = -\frac{GM_{Sole}}{d_{Sole}} = -8.85 \cdot 10^{8} \ m\,kg \Rightarrow h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi_{Sole} = 1{,}97 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

Ricapitolando quanto fatto fino a questo punto:

Le equazioni della fisica classica possono essere estese al caso generale (Relatività Generale) sostituendo la , con il ; ovvero introducendo la derivata covariante:

Relatività Speciale Relatività Generale

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = 0 \Rightarrow p^\beta p^\alpha{}_{,\beta} = 0 \Rightarrow p^\beta p^\alpha{}_{;\beta} = 0$$

Dove:

$$p^\alpha{}_{;\beta} = p^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\gamma \qquad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda}\right)$$

Per trovare il tensore metrico uso l'equazione di Einstein:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -K T^{\mu\nu}$$

dove:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_\alpha$$

Linearizzazione dell'equazione di Einstein (onde gravitazionali):

Consideriamo adesso un campo gravitazionale piccolo e quindi uno spazio quasi piatto dove troviamo un sistema di assi con il quale possiamo scrivere:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h| \ll 1$$

Che come abbiamo visto può essere il caso del campo gravitazionale terrestre. E' un dato di fatto che quando risolviamo un problema in questo riferimento non ci preoccupiamo della metrica e banalmente scriviamo delle trasformazioni di Lorentz e consideriamo lo spazio piatto, ovvero, usiamo il tensore di Minkowsky. Come sappiamo le trasformazioni di Lorentz sono quelle per cui:

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Se applichiamo la trasformazioni di Lorentz a g troviamo che h trasforma come un campo (pensiamo al tensore F del campo elettromagnetico) che vive in uno spazio piatto:

$$h_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu h_{\mu\nu}$$

In questo scenario usiamo il tensore di Minkowsky per alzare e abbassare gli indici e pensiamo ad h come ad un campo. Ci viene quindi il sospetto che possano essere utili le trasformazioni di gauge per semplificare le equazioni del problema, o meglio, che la teoria diventi una teoria di gauge.

Il primo step è quello di inserire g=eta+h nel tensore di Einstein. Il secondo step sarà quello di semplificare il risultato per mezzo di una trasformazione di gauge. Partiamo dal tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \text{Trascuro la parte in } \Gamma\Gamma \propto h^2$$

Vediamo il secondo termine:

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{1}{2} \eta^{\alpha\lambda} \left(h_{\lambda\nu,\mu} + h_{\mu\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda} \right) = \frac{1}{2} \left(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} \right)$$

Quindi complessivamente ottengo:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(h_{,\mu\nu} + \partial^2 h_{\mu\nu} - h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} \right)}$$

Dove: $h = h^{\alpha}{}_{\alpha}$; $\partial^2 h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha}$

Notiamo che α è un indice muto e μ e ν sono in basso come è giusto che sia

Adesso aggiungiamo la seconda parte del tesore di Einstein, ovvero quella dove compare lo scalare di Ricci. Quindi scriviamo lo scalare di Ricci:

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{,\mu\nu} + \partial^2 h_{\mu\nu} - h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha}\right)\eta^{\mu\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\partial^2 h - h^{\mu}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\mu} - h^{\alpha\mu}{}_{,\mu\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(2\partial^2 h - h^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} - h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha}\right)$$

Quindi il tensore di Einstein è:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{h_{,\mu\nu}} + \underset{2}{\partial^2 h_{\mu\nu}} - \underset{3}{h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu}} - \underset{4}{h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha}}\right) - \frac{1}{4}\left(\underset{5}{2\partial^2 h} - \underset{6}{h^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta}} - \underset{7}{h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha}}\right)\eta_{\mu\nu}$$

Adesso introduciamo il tensore: $\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} \overset{df}{=} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}}$, $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$

per il quale si verifica subito che: $\bar{h} = \bar{h}_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = -h$, $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$

E quindi abbiamo: $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}$, $\bar{h} = -h$

E con pazienza andiamo a sostituire h_barra nei 7 termini del tensore di G. Vediamoli uno alla volta:

1. $h_{,\mu\nu} = -\bar{h}_{,\mu\nu}$

2. $\partial^2 h_{\mu\nu} = \partial^2\left(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}\right) = \partial^2\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^2\bar{h}\,\eta_{\mu\nu}$

3. $-h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} = -\left(\bar{h}_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\alpha}\right)^{,\alpha}{}_{,\nu} = -\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}\bar{h}^{,\alpha}{}_{,\nu}\eta_{\mu\alpha} =$

$= -\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu\nu}$

4. $-h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha}$; $h^{\alpha}{}_{\nu} = \eta^{\alpha\beta}h_{\beta\nu} = \eta^{\alpha\beta}\left(\bar{h}_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\beta\nu}\right) =$

$= \bar{h}^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu} = \bar{h}^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\delta^{\alpha}_{\nu}$

$\Rightarrow -\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} = -\left(\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)_{,\mu\alpha} = -\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu\nu}$

(5) $2\partial^2 h = -2\partial^2 \bar{h}$

(6) $-h^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta}$; $h^{\beta}{}_{\alpha} = \eta^{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} = \bar{h}^{\beta}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\bar{h}\,\delta^{\beta}_{\alpha}$

$$\Rightarrow -h^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} = -\left(\bar{h}^{\beta}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\bar{h}\,\delta^{\beta}_{\alpha}\right)^{,\alpha}{}_{,\beta} = -\bar{h}^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} + \frac{1}{2}\partial^2\bar{h}$$

(7) $-h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} = -\left(\bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\bar{h}\,\eta^{\alpha\beta}\right)_{,\alpha\beta} = -\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial^2\bar{h}$

Adesso sostituiamo in G i sette termini trovati:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(-\bar{h}_{,\mu\nu} + \partial^2\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^2\bar{h}\,\eta_{\mu\nu} - \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu\nu} - \bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha}$$
$$+ \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu\nu}\Big) - \frac{1}{4}\left(-2\partial^2\bar{h} - \bar{h}^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} + \frac{1}{2}\partial^2\bar{h} - \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial^2\bar{h}\right)\eta_{\mu\nu}$$

Tutti i termini in $\bar{h}$ si cancellano

E si ottiene:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} - \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - \bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha}\right) + \frac{1}{4}\left(\bar{h}^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} + \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}\right)\eta_{\mu\nu}$$

Il 4° e 5° termine sono uguali:

$$\bar{h}^{\beta}{}_{\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\alpha\delta}\bar{h}^{\beta\gamma}{}_{,\delta\beta} = \delta^{\delta}_{\gamma}\bar{h}^{\beta\gamma}{}_{,\delta\beta} = \bar{h}^{\beta\alpha}{}_{,\alpha\beta}$$

Quindi ottengo:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + \frac{1}{2}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}}$$

Se potessi porre: $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ il tensore si semplificherebbe notevolmente, infatti rimarrebbe solo il primo termine e otterrei un'equazione lineare e semplice:

$$\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

Per semplificare l'equazione introduciamo le trasformazioni di gauge:

$$\boxed{x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu}$$

Dove il quadrivettore ξ^μ è a sua volta funzione delle coordinate.

La prima cosa da fare è trovare come trasformano i quadrivettori controvarianti e covarianti con questa trasformazione di gauge.

$$\Lambda^{\mu'}{}_\alpha = \frac{dx^{\mu'}}{dx^\alpha} = \frac{d}{dx^\alpha}\left(x^\mu + \xi^\mu\right) = \delta^\mu_\alpha + \xi^\mu{}_{,\alpha} \Rightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\alpha V^\alpha = \delta^\mu_\alpha V^\alpha + \xi^\mu{}_{,\alpha} V^\alpha$$

Per trovare come trasformano i vettori covarianti imponiamo che sia: $\Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda_{\mu'}{}^\beta = \delta^\beta_\alpha$

Pongo in modo generico per un piccola trasformazione: $\Lambda_{\mu'}{}^\beta = \delta^\beta_\mu + f_\mu{}^\beta$

$$\Rightarrow \Lambda^{\mu'}{}_\alpha \Lambda_{\mu'}{}^\beta = \left(\delta^\mu_\alpha + \xi^\mu{}_{,\alpha}\right)\left(\delta^\beta_\mu + f_\mu{}^\beta\right) = \delta^\beta_\alpha + \delta^\mu_\alpha f_\mu{}^\beta + \delta^\beta_\mu \xi^\mu{}_{,\alpha}$$

$$\Rightarrow f_\alpha{}^\beta + \xi^\beta{}_{,\alpha} = 0 \Rightarrow \Lambda_{\mu'}{}^\beta = \delta^\beta_\mu - \xi^\beta{}_{,\mu} \Rightarrow V_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^\alpha V_\alpha = \delta^\alpha_\mu V_\alpha - \xi^\alpha{}_{,\mu} V_\alpha$$

Adesso possiamo ricavare come trasformano h e poi h_barra

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\alpha} \Lambda_{\nu'}{}^{\beta} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) = (\delta^{\alpha}_{\mu'} - \xi^{\alpha}{}_{,\mu})(\delta^{\beta}_{\nu} - \xi^{\beta}{}_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})$$

$$= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \delta^{\alpha}_{\mu} \xi^{\beta}{}_{,\nu} \eta_{\alpha\beta} - \delta^{\beta}_{\nu} \xi^{\alpha}{}_{,\mu} \eta_{\alpha\beta}$$

come prima prendo solo i pezzi fino al primo ordine

$$= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{\mu\nu} \to h_{\mu'\nu'} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}}$$

E quindi per h_barra troviamo facilmente:

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu'\nu'} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}}$$

<u>Ci piacerebe dire che G approssimato è invariante sotto questa trasformazione in modo da poter affermare che possiamo applicare questo tipo di trasformazione per semplificare il problema senza cambiare la fisica (questo punto però è da approfondire). Per il momento ci limitiamo a dire che una piccola trasformazione matiene la condizione base:</u>

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Quindi adesso il punto è trovare quella particolare trasformazione di gauge che mi semplifica l'equazione, ovvero quella trasformazione per cui si ottiene:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

In altre parole dobbiamo trovare un'equazione per ξ^μ

Vediamo: $\bar{h}^{\mu'\nu'}{}_{,\nu'} = 0 = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\nu,\mu}{}_{,\nu} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha\nu} =$

$$= \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \partial^2\xi^\mu - \xi^{\nu}{}_{,\nu}{}^{,\mu} + \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}{}^{,\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \partial^2\xi^\mu = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$$

È l'equazione che risolta mi fornisce la trasformazione cercata

Quindi per campi piccoli l'equazione di Einstein linearizzata si scrive:

$$\boxed{\frac{1}{2}\partial^2\bar{h}^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}}$$

Adesso per prendere confidenza con questa equazione per prima cosa ricaviamo la metrica nel caso di un campo gravitazionale debole (come quello terrestre ad esempio). Poi ricaveremo le onde gravitazionali.

Il campo è statico quidi la derivata temporale è nulla, inoltre ci aspettiamo anche piccole velocità per cui possiamo considerare solo il termine 00 del tensore:

$$\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}^{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 \bar{h}^{00} = -K\rho c^2 \qquad K = \frac{8\pi G}{c^4}$$

come ricavato in precedenza

$$\Rightarrow \nabla^2 \bar{h}^{00} = \frac{16\pi G}{c^2}\rho$$

sapendo che per distribuzione sferica:

$$\nabla^2 f = A\rho \Rightarrow f = -\frac{A}{4\pi}\frac{m}{r}\,;\; m = \int d^3r\,\rho$$

si ottiene: $\bar{h}^{00} = -\frac{4Gm}{c^2 r} \overset{df}{=} -\frac{2r_s}{r}$ $\qquad r_s \overset{df}{=} \frac{2Gm}{c^2}$

E quindi possiamo ricavare le componenti del tensore metrico:

$$h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta^{\mu\nu} = \bar{h}^{00} - \frac{1}{2}\bar{h}^{00}\eta^{\mu\nu}$$

$$h^{00} = \bar{h}^{00} - \frac{1}{2}\bar{h}^{00}\eta^{00} = \frac{1}{2}\bar{h}^{00} = -\frac{r_s}{r} \;;\; h_{00} = \eta_{00}\eta_{00}h^{00} = h^{00}$$

$$h^{ii} = -\frac{1}{2}\bar{h}^{00}\eta^{ii} = \frac{1}{2}\bar{h}^{00} = -\frac{r_s}{r} \;;\; h_{ii} = \eta_{ii}\eta_{ii}h^{ii} = h^{ii}$$

E quindi otteniamo:

$$g_{00} = 1 + h_{00} = 1 - \frac{r_s}{r} \quad ; \quad g_{ii} = -1 + h_{ii} = -\left(1 + \frac{r_s}{r}\right)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Questa metrica risulta anche dal caso approssimato di una metrica ricavata direttamente dell'equazione di Einstein senza approssimazioni per una sorgente sferica non rotante, ovvero la metrica di Schwarzschild (prima soluzione esatta dell'equazione di Einstein del 1916):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Adesso consideriamo il caso non stazionario dell'equazione linearizzata di Einstein. Inoltre consideriamo la sorgente dell'onda molto lontana e quindi nullo il tensore energia-impulso, quindi si ottiene:

$$\boxed{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0}$$

Come si vede è lo stesso tipo di equazione che si ottiene per il quadripontenziale del campo elettromagnetico. In effetti anche questa teoria linearizzata è una teoria di gauge ed inoltre il tensore h della metrica viene trattato proprio come un campo che vive in uno spazio piatto come il campo elettromagnetico.

E proprio come nel caso del campo elettromagnetico la soluzione dell'equazione può essere scritta come sovrapposizione di onde piane, ovvero:

$$\boxed{\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{i k_\alpha x^\alpha}}$$

Per tutto quello che diremo possiamo considerare il tensore A praticamente sostante entro il tempo di attraversamento degli apparati che vengono usati per misurare il massaggio dell'onda gravitazionale (interferometri gravitazionali che hanno lunghezze dell'ordine del km). Il nostro problema è che il tenosre A ha 16 componenti e quindi abbiamo bisogno di una strategia per semplificarlo un po'

Per prima cosa usiamo l'equazione dell'onda per ricavare informazioni su k e quindi sulla velocità di propagazione dell'onda. Per prima cosa ricordiamo che:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \; ; \; \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Rightarrow \partial^2 A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} = \partial_\beta \partial^\beta A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} =$$

$$= A^{\mu\nu} \eta^{\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma e^{ik_\alpha x^\alpha} = A^{\mu\nu} \eta^{\beta\gamma} (ik_\beta)(ik_\gamma) e^{ikx} = 0$$

$$\eta^{\beta\gamma} k_\beta k_\gamma = k_\mu k^\mu = k^2 = 0$$

Se consideriamo un'onda che propaga lungo la direzione z si ricava:

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^z) \; ; \; k^2 = 0 \Rightarrow k^0 = k^z \qquad k^\mu = (k, 0, 0, k)$$

E quindi il termine a esponente è:

$$kx = kct - kz = k(ct - z)$$

ovvero un'onda che propaga con velocità di fase c (velocità della luce)

Possiamo quindi porre (come nel caso del campo elettromagnetico nel vuoto): $k = \frac{\omega}{c}$

Abbiamo quindi a che fare un un oggetto che propaga alla velocità c. Adesso dobbiamo capire come deforma la metrica e per farlo abbiamo bisogno di semplificare A.
Esattamente come nel caso del campo elettromagnetico in assenza di cariche (gauge di Coulomb) anche in questo caso notiamo che possiamo applicare una seconda trasformazione di gauge senza intaccare la prima.
Al momento abbiamo:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

E sappiamo che la trasformazione di gauge che ci ha permesso di ottenere questa risultato è quella che soddisfa questa equazione:

$$\partial^2 \chi^\mu = \bar{h}^{\mu\nu}_{old\,,\nu}$$

E' chiaro che se aggiungiamo una nuova funzione ξ^μ che ha ∂^2 nullo la vecchia gauge è ancora verificata e posso aggiungere nuove semplificazioni.

$$\partial^2 \xi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^2(\chi^\mu + \xi^\mu) = \bar{h}^{\mu\nu}_{old\,,\nu}$$

Inoltre notiamo che la prima gauge rende il tensore A perpendicoalre a k:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \Rightarrow A^{\mu\nu}\partial_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} = iA^{\mu\nu}k_\nu e^{ikx} = 0 \Rightarrow A^{\mu\nu}k_\nu = 0$$

La prima gauge è la corrispondente della gauge di Lorentz nel caso del campo elettromagnetico, mentre la seconda nel caso dello onde gravitazionali si chiama gauge TT (transverse-traceless) e tra poco capiremo il perchè di questo nome.
Come abbiamo detto la seconda gauge deve soddisfare l'equazione:

$$\partial^2 \xi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi^\mu = B^\mu e^{i k_\alpha x^\alpha}$$

Dove il vettore k è quello dell'onda gravitazionale e B lo usiamo per semplificare A.
Come sappiamo data questa trasformazione risulta che il nuovo tensore h_barra è:

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{new} = \bar{h}^{\mu\nu}_{old} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu} \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}$$

Ovvero:

$$A^{\mu\nu}_{new} = A^{\mu\nu}_{old} - i k^\nu B^\mu - i k^\mu B^\nu + i \eta^{\mu\nu} k_\alpha B^\alpha$$

E adesso trovo B in modo tale che vengano soddisfatte due condizioni (trasverse-traceless), ovvero:

$$\boxed{A^{\mu\nu}_{new} U_\nu = 0 \qquad A^{\alpha}_{new\,\alpha} = 0}$$

Dove U è una quadrivelocità costante di convenienza

Le due considzioni poste corrispondono a 4 equazioni con le quali troviamo le componenti di B. Consideriamo la condizione di traceless:

$$\underset{new}{A^{\mu}}{}_{\mu} = 0 = \eta_{\mu\nu} \underset{old}{A^{\mu\nu}} - i\eta_{\mu\nu} k^{\nu} B^{\mu} - i\eta_{\mu\nu} k^{\mu} B^{\nu} + i\eta_{\mu\nu} k_{\alpha} B^{\alpha} \eta^{\mu\nu} =$$

$$= \underset{old}{A^{\mu}}{}_{\mu} + i4 k_{\alpha} B^{\alpha} = 0$$

E la condizione di transverse:

$$\underset{new}{A^{\mu\nu}} \epsilon_{\nu} = 0 = \underset{old}{A^{\mu\nu}} \epsilon_{\nu} - i k^{\nu} B^{\mu} \epsilon_{\nu} - i k^{\mu} B^{\nu} \epsilon_{\nu} + i k_{\alpha} B^{\alpha} \eta^{\mu\nu} \epsilon_{\nu} =$$

$$= \underset{old}{A^{\mu\nu}} \epsilon_{\nu} - i(k^{\nu} \epsilon_{\nu}) B^{\mu} - i k^{\mu} B^{\nu} \epsilon_{\nu} - \frac{1}{4} \underset{old}{A^{\alpha}}{}_{\alpha} \epsilon^{\mu} = 0$$

Dove nell'ultima equazione ho sostituito il risultato della condizione traceless. Quest'ultima euqazione contiene 4 equazioni per B. Ora vediamo come questa gauge TT unita alla gauge di Lorentz (o di oscillazione) semplifica il tensore A.

Dobbiamo considerare che h è simmetrico e quindi anche A. Quindi la gauge di oscillazione pone questi vincoli: $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \Rightarrow \underset{\text{vec}}{A^{\mu\nu}} K_\nu = 0$$

$$K_\nu = (K, 0, 0, -K)$$

$$\begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ 0 \\ -K \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A^{\mu 0} = A^{\mu 3} \quad \forall \mu$$

Poi consideriamo la condizione transverse rispetto alla quadrvelocità U. E poniamo:

$U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ quindi un punto fermo nel nostro riferimento

$$\underset{\text{vec}}{A^{\mu\nu}} U_\nu = 0$$

$$\begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$A^{\mu 0} = 0 \quad \forall \mu$$

a cui devo aggiungere:

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$$

$$A^{\mu 0} = A^{\mu 3} \quad \forall \mu$$

Quindi si ottiene che solo gli elementi della matrice interna 2x2 possono essere diversi da 0

Infine aggiungiamo la condizione traceless:

$$A^{\mu}{}_{\mu} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{21} & A^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{1}{}_{1} + A^{2}{}_{2} = 0$$

ovvero $A^{11} = -A^{22}$

Inoltre A è simmetrico quindi : $A^{12} = A^{21}$

In conclusione abbiamo ottenuto questo risultato:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ikx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ikx}$$

Inoltre data la condizione di traceless abbiamo: $\bar{h} = 0 \Rightarrow h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$

E quindi la metrica (scritta con la notazione complessa) è:

$$\boxed{ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu} = c^2dt^2 + (-1 + ae^{ikx})dx^2 + (-1 - ae^{ikx})dy^2 + 2be^{ikx}dxdy}$$

E' chiaro che scritta così non ha senso fisico, infatti dobbiamo considerare la parte reale dal momento che la metrica ci serve per determinare delle lunghezze reali.

Il punto adesso è quello di ricavare cosa succede quando l'onda gravitazione attraversa l'interferometro, ovvero come cambiano le distanze proprie e in particolare tempi di attraversamento misurati dagli osservatori solidali con l'interferometro.

La prima cosa da capire è se l'onda gravitazione va a cambiare le coordinate degli specchi dell'interferometro. Per risolvere questo problema dobbiamo usare l'equazione della geodetica che ci fornisce esattamente la dinamica delle coordanite data la metrica:

$$p^\beta p^\alpha{}_{;\beta} = 0 \Rightarrow \frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} U^\beta U^\gamma = 0$$

La gli specchi dell'interferometro hanno una velocità inziale nulla e quindi: $U = (c, 0)$

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \Gamma^\alpha_{00} U^0 U^0 \qquad \Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial h_{\lambda 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\lambda} \right) = 0$$

Quindi si ricava un'accelerazione nulla e una velocità nulla, ovvero, le coordinate non cambiano.

Per come è fatto il tensore A possiamo avere due tipi di onde, le onde + e le onde x:

Onde + sono quelle date da a mentre le onde x sono quelle date da b

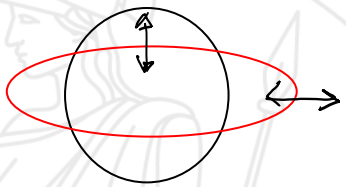
Ovvero, le onde + sono: $ds^2 = c^2 dt^2 + (-1 + a(x^\mu))dx^2 + (-1 - a(x^\mu))dy^2$

e le onde x sono: $ds^2 = c^2 dt^2 + 2b(x^\mu)\, dx\, dy$

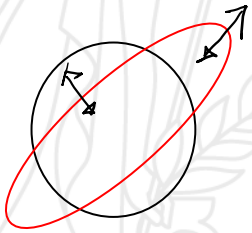
Dove ho inglobato la dipendeza spazio temporale in a e b

E' chiaro che una rotazione di 45° porta le une nelle altre. Se consideriamo delle coordinate x,y disposte lungo un cerchio allora la distanza propria dal centro (x=0, y=0) fino al punto x,y, sul cerchio di raggio unitario è (per trovare la distanza propria fisso la coordinata temporale e inverto il segno):

Onde +: $\ell^2 = (1-a)x^2 + (1+a)y^2$

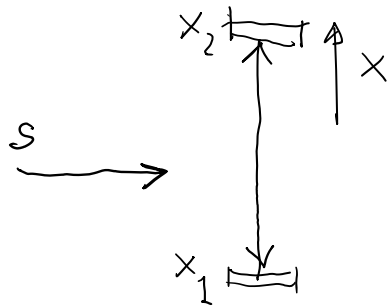


Onde x: $\ell^2 = 2bxy$



Dove la variazione della lunghezza propria seguirà l'oscillazione dell'onda

Adesso possiamo considerare un braccio dell'interferometro disposto perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda (di tipo +) lungo l'asse x e calcoliamo il tempo impiegato dalla luce (tempo proprio dell'osservatore solidale con l'interferometro) per fare un round trip considerando che in questo intervallo di tempo h è rimasto costante. Per la luce ovvaimente ds=0 quindi abbiamo:



Dove x1 e x2 come abbiamo detto sono costanti durante il passaggio dell'onda

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - (1-a)\, dx^2$$

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-a}\, dx \simeq \frac{1}{c}\sqrt{1-a}\,\Delta x \Rightarrow \Delta t_{rt} \simeq \frac{2}{c}\sqrt{1-a}\,\Delta x$$

E' chiaro che se considero gli specchi disposti lungo y il segno di a è opposto e quindi il tempo per l'osservatore è diverso. Quindi in conclusione il passaggio dell'onda gravitazionale sposta le frange di interferenza prodotte all'uscita dell'interferometro dalla sovrapposzione del percorso della luce lungo x e da quello lungo y.

Convenzione sui segni

$$K = 8\pi G / c^4 > 0$$

$$(R)\ R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu}$$

$$(g)\ ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$(G)\ G^{\mu\nu} = K T^{\mu\nu} \qquad \left[G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right] \qquad \underline{R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}} \quad \overset{1}{\sqcup}\overset{3}{}$$

In questi appunti R=-1, g=-1, G=-1

Se contraiamo gli indici 1 e 4 (e lasciamo la stessa definizione di k) allora dobbiamo porre G=1. Se ad esempio poniamo R=+1 e contraiamo gli indici 1 e 3 allora dobbiamo porre G=1

Per l'eq. di Einstein linearizzata abbiamo sempre: $\frac{1}{2}\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -K T^{\mu\nu}$
indipendentemente dal segno di R e G

E risulta: $(g)\ \partial^2 = -\partial_t^2 + \nabla^2$

Introduzione all'approccio lagrangiano

Il proposito sarebbe quello di scrivere il principio di minima azione per ricavare l'equazione di Einstein. Si potrebbe ad esempio pensare che questo approccio possa essere utile per una qualche forma di quantizzazione della relatività generale. Quando abbiamo bisogno di due invarianti per trasformazioni generali di coordinate del tipo:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\alpha}}$$

I due invarianti devono essere l'elemento infinitesimo di volume e uno scalare con il quale andremo a scrivere la densità di lagrangiana. Il primo candidato come scalare è lo scalare che abbiamo costruito a partire dal tensore di Riemann ovvero lo scalare di Ricci.
A riguardo va subito notato che lo scalare di Ricci contiene le derivate seconde del tensore metrico ed in particolare nella sua forma approssimata contiene le derivate seconde del tensore h che potremmo interpretare come il campo con il quale costruiamo la lagrangiana. Appunto è da notare il fatto che stiamo andando a definire una densità di lagrangiana che contiene la derivata seconda del campo mentre usualmente (vedi ad esempio il caso del campo elettromagnetico) la denstià di lagrangiana contiene il campo e la sua derivata prima.
Adesso però ci concentriamo sull'elemento infinitesimo di volume. Abbiamo bisogno di una scrittura invariante per trasformazioni generali.

Possiamo considerare che tra le trasformazioni generali esiste quella che ci porta in un riferimento dove esiste un sistema di assi per cui localmente lo spazio è piatto e dunque in quel punto il tensore metrico è quello di Minkowsky.
In generale data la trasformazione di coordinate possiamo usare lo Jacobiano per trasformare l'elemento di volume:

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \right| dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \quad ; \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^\alpha{}_{\mu'}$$

Dove il primo termine è scritto dove lo spazio è localmente piatto. Per quanto riguarda i tensori metrici questi sono collegati attraverso la trasformazione Lambda nel seguente modo:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_{\mu'} \Lambda^\beta{}_{\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$$

Ovvero: $$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_{\mu'} \Lambda^\beta{}_{\nu'} = \Lambda^\alpha{}_{\mu'} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_{\nu'}$$

Che può essere riscritto in forma matriciale: $$(g) = (\Lambda^t)(\eta)(\Lambda)$$

Vogliamo adesso ricavare il determinante della trasformazione (Jacobiano) da questa scrittura matriciale sfruttando il fatto che il determinante di un prodotto è uguale al prodotto dei determinanti:

$$\det(g) = \det(\Lambda^t)\det(\eta)\det(\Lambda) = -(\det(\Lambda))^2$$

$$\begin{cases} \det \eta = \prod_i \lambda_i = -1 \\ \det A = \det A^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det(\Lambda) = \sqrt{-g}$$ dove: $g \overset{df}{=} \det(g_{\mu\nu})$

Quindi abbiamo ottenuto la scrittura invariante dell'elemento di volume infinitesimo:

$$dV = \sqrt{-g}\, d^4x$$

Quindi l'azione invariante potrebbe essere:

$$\boxed{S = \int R \sqrt{-g}\, d^4x}$$

Dove R è lo scalare di Ricci

La densità di lagrangiana dovrebbe essere: $\mathcal{L} = R\sqrt{-g}$

Nel caso approssimato questa densità di lagrangiana dovrebbe essere invariante per trasformazioni di gauge.

Per poter scrivere questa lagrangiana nel caso approssimato dobbiamo sviluppare il tensore di Ricci fino al secondo ordine (fin qui lo abbiamo sviluppato solo al primo ordine in h), infatti risulterà qualcosa del tipo:

$$R\sqrt{-g} = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \propto (h_1 + h_1^2)(1 + h_2)(1 + h_3) =$$

$$= h_1 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + \underline{h_1^2}$$

Iniziamo con il tensore metrico scritto con gli indici controvarianti. Pongo:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}$$

e trovo H imponendo che

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\alpha} - h^{\nu\alpha} + H^{\nu\alpha}) =$$

$$= \delta_\mu^\alpha - \eta_{\mu\nu} h^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} h^{\nu\alpha} + \eta_{\mu\nu} H^{\nu\alpha}$$

prendo i termini fino a 2° ordine

Il secondo e terzo termine si annullano e per il 4° e 5° deve essere:

$$\eta_{\mu\nu} H^{\nu\alpha} = h_{\mu\nu} h^{\nu\alpha} \quad \Rightarrow \quad H_{\mu}{}^{\alpha} = h_{\mu\nu} h^{\nu\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad H^{\beta\alpha} = \eta^{\beta\mu} h_{\mu\nu} h^{\nu\alpha} = h^{\beta}{}_{\nu} h^{\nu\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g^{\mu\nu} \cong \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\alpha} h^{\alpha\nu}}$$

Vediamo il pezzo con la radice del determinante:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})} = \sqrt{-\det\left[\eta_{\mu\alpha}(\eta^{\alpha}{}_{\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu})\right]} =$$

$$= \sqrt{-\det\eta_{\mu\nu} \det(\delta^{\alpha}{}_{\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu})} = \sqrt{\det(\delta^{\alpha}{}_{\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu})} = \sqrt{e^{\ln(\delta^{\alpha}{}_{\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu})}} =$$

$$= \sqrt{e^{\mathrm{Tr}\ln(\delta^{\alpha}{}_{\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu})}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(\delta^{\alpha}{}_{\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu})} \simeq e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, h^{\alpha}{}_{\nu}} \simeq 1 + \frac{1}{2} h + O(h^2)$$

$$\eta^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

Metrica di Schwartzschild

E' quella generata da un corpo a simmetria sferica non rotante. Da sottilineare che la soluzione è non approssimata e rappresenta la prima soluzione esatta dell'equazione di Einstein.

Prima di usare l'equazione di Einstein dobbiamo sfruttare le simmetrie del problema per semplificare il tensore metrico. Consideriamo quindi che questa metrica descrive la geometria di uno spazio vuoto (tensore energia-impulso è nullo nello spazio dove ricaviamo la metrica), inoltre il campo è statico nel senso che la stella o il pianeta o il buco nero che genera la metrica è considerato a geometria fissata. La simmetria è sferica e un ultimo importante punto è che a grande distanza dalla sorgente di campo vogliamo che lo spazio sia piatto.

Dobbiamo quindi gestire i 16 elementi del tesoremetrico. Ovviamente g è un tensore simmetrico. Il primo punto è capire se gli elementi fuori diagonale possono essere diversi da zero.

Visto che la simmetria del problema è sferica useremo le coordinate sferiche. Gli elementi del tensore metrico sono il prodotto scalare dei vettori base. Affinchì la simmetria sia sferica (spazialmente) è chiaro che dobbiamo avere:

$$g_{r\theta} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 \qquad g_{r\phi} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = 0 \qquad g_{\theta\phi} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi = 0$$

Altrimenti l'elemento di lunghezza infinitesima avrebbe delle componenti non a simmetria sferica (ci possiamo immaginare un elissoide)

Dobbiamo adesso considerare tutti gli elementi fuori diagonale che riguardano la coordinata temporale. Vogliamo simostrare che anche per questi vale:

$$g_{0r} = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_r = 0 \qquad g_{0\theta} = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_\theta = 0 \qquad g_{0\phi} = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_\phi = 0$$

Per quanto riguarda i due termini con coordinata angolare se fossero diversi da zero avremmo un contributo a simmetria non sferica per l'elemento di lunghezza infinitesima. Quindi li poniamo nulli. Un discorso a parte va fatto per l'elemento con la coordinata radiale.
Poichè la metrica è statica oltre al fatto che gli elementi della metrica non devono dipendere dal tempo richiediamo anche che gli elementi della metrica non devono cambiare sotto una trasformazione che inverte il tempo:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha : (ct, r, \theta, \phi) \rightarrow (-ct, r, \theta, \phi)$$

Quindi abbiamo: $\Lambda^{0'}{}_0 = -1 \; ; \; \Lambda^{i'}{}_j = \delta^i{}_j$

E per gli elementi della metrica ricaviamo:

$$g_{0'0'} = \Lambda_{0'}{}^0 \Lambda_{0'}{}^0 g_{00} = g_{00}$$

$$g_{0'r'} = -g_{0r} \Rightarrow g_{0r} = 0 \longleftarrow g_{0'r'} = \Lambda_{0'}{}^0 \Lambda_{r'}{}^r g_{0r} = -g_{0r}$$

$$g_{r'r'} = \Lambda_{r'}{}^r \Lambda_{r'}{}^r g_{rr} = g_{rr}$$

Quindi abbiamo una metrica di questo tipo:

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

Data la simmetria sferica mi aspetto che ad r e t fissati gli elementi di lunghezza sono quelli che calcolo lungo una sfera appunto e quindi:

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{rr} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

Dove ho rispettato la segnatura +1,-1,-1,-1 del tensore di Minkowsky.
Al momento non è chiaro cosa rappresenti la coordinata r dal punto di vista fisico.
Intuiamo però, dato che a grande distanza dalla sorgente vogliamo che lo spazio sia piatto, che la coordinata r rappresenti la distanza misurata per l'osservatore posto a grande distanza dalla sorgente.
Poichè il numero di 1 e -1 del tensore di Minkowsky è fissato lo stesso vale per il numero di autovalori positivi e negativi del tensore metrico generale (che può essere riportato localmente e a quello di Minkowsky per mezzo di una trasformazione di coordinate).
Quinidi possiamo ascrivere:

$$ds^2 = e^{2\phi} c^2 dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

Dove questo tipo di scrittura assicura il giusto segno dei primi due termini (torneremo su questo punto quando parleremo di buchi neri). Per ragioni di simmetria sferica Phi e Lambda possono dipendere solo da r.

Adesso possiamo inserire questa metrica così semplificata nell'equazione di Eintein e trovare le due funzioni Phi e Lambda e quindi la metrica di Schwartzschild.
Poichè siamo interessati a trovare la metrica nel vuoto (quindi non dentro la sorgente) possiamo porre il tensore energia-impuso a zero e quindi abbiamo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

Possiamo moltiplicare per g e si ottiene:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}_{\mu} = R - \frac{4}{2} R = 0$$

Ovvero: $R = 0$

Quindi per trovare la metrica possiamo usare l'equazione: $R_{\mu\nu} = 0$

Da notare quindi che può essere che lo scalare e il tensore di Ricci sono nulli ma lo spazio non è piatto. Infatti è solo il tesore di Riemann che ci dice senza dubbio se lo spazio è piatto o non è piatto.

Per trovare Lambda e Phi scriviamo gli elementi diagonali del tensore di Ricci. Per fare questo dobbiamo sapere che:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \Rightarrow g^{00} = \frac{1}{e^{2\phi}} \quad g^{rr} = -\frac{1}{e^{2\Lambda}} \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \quad g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

Con pazienza dobbiamo scrivere i simboli di Christoffel e sostiuirli nel tesore di Ricci, ad esempio abbiamo:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{0\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta 0} - \Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$$

Per fare un esempio di calcolo possiamo prendere il simbolo di Christoffel del primo termine:

$$\Gamma^{\alpha}_{0\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\right) =$$

Le derivate temporali sono nulle e g ha solo elementi lungo la diagonale, quinidi:

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right) = 0$$

Alla fine si ottengono 4 equazioni:

$$R_{00} = -e^{2(\phi-\Lambda)}\left(\phi'' + (\phi')^2 - \phi'\Lambda' + \frac{2\phi'}{r}\right) = 0$$

$$R_{rr} = \phi'' + (\phi')^2 - \phi'\Lambda' - \frac{2\Lambda'}{r} = 0$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda}\left(1 + r(\phi' - \Lambda')\right) - 1 = 0$$

$$R_{\phi\phi} = \operatorname{sen}^2\theta\left(e^{-2\Lambda}\left(1 + r(\phi' - \Lambda')\right) - 1\right) = 0$$

Dove i ‘ e ‘’ sono le derivate prime e seconde rispetto a r.

Possiamo sostituire la seconda nella prima equazione e si ottiene:

$$-e^{2(\phi-\Lambda)}\left(\frac{2\Lambda'}{r} + \frac{2\phi'}{r}\right) = 0 \Rightarrow \Lambda' + \phi' = 0$$

Che integrato in r diventa: $\Lambda + \phi = \text{const}$

Dobbiamo trovare questa costante. Sfruttiamo il fatto che per r che va all'infinito lo spazio deve essere piatto e qundi:

$$e^{2\phi} \to 1 \qquad e^{2\Lambda} \to 1 \qquad \Rightarrow \qquad \phi = 0 \qquad \Lambda = 0$$

Quindi la costante cercata è zero: $\phi + \Lambda = 0$

Poi sostituisco $\phi' + \Lambda' = 0$ nella terza equazione e ottengo:

$$e^{-2\Lambda}\left(1 - 2r\Lambda'\right) = 1 = \frac{d}{dr} r e^{-2\Lambda}$$

Che integro: $r e^{-2\Lambda} = r + b \quad \Rightarrow \quad e^{2\Lambda} = \left(1 + \frac{b}{r}\right)^{-1}$

E poichè: $\phi + \Lambda = 0$ si ottiene anche: $e^{-2\phi} = \left(1 + \frac{b}{r}\right)^{-1} \Rightarrow g_{00} = \left(1 + \frac{b}{r}\right)$

Poichè b è una costante possiamo trovarla dal caso ottenuto per campi deboli e si trova:

$$b = -\frac{2GM}{c^2} \quad \Rightarrow \quad g_{00} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \; ; \; g_{rr} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \; ; \; r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Metrica di Robertson-Walker e equazioni di Friedmann

Su scale dell'ordine di 100Mpc (pc=parsec=3.26 anni luce) l'universo appare omogeneo e isotropo. Quindi il nostro fine è quello di trovare per mezzo dell'equazione di Einstein la metrica di un universo di questo tipo. Mentre nel caso della metrica di Schwartzschild avevamo una simmetria sferica rispetto ad un solo punto, qui dobbiamo trovare una metrica per la quale l'universo appare uguale in ogni punto e in ogni direzione (principio cosmologico). Inoltre considereremo l'universo interamente pervaso da un fluido che genera una densità di energia e una pressione e che consiste di almeno tre diverse sorgenti di campo, ovvero, polvere, radiazione e energia oscura. In questo universo tutte le galassie mantengono nel tempo le stesse coordinate ma le distanze tra di loro cambiano perchè globalmente l'universo si espande o si contrae e quindi la metrica dipende dal tempo.
Poichè l'universo è omogeneo e isotropo il tempo deve scorrere nello stesso modo ovunque, ovvero, l'elemento temporale della metrica viene posto uguale a 1. Quindi per partire possiamo scrivere:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{0i}\, dx^0 dx^i - g_{ij}\, dx^i dx^j \qquad i,j = 1,2,3$$

Come nel caso della metrica di Schwartzschild la simmetria sferica (che qui vale rispetto ad ogni punto) ci permette di porre a zero gli elementi fuori diagonale. Particolare attenzione va fatta per l'elemento:

g_{0r} dal momento che in questo caso il campo non è stazionario

Quindi abbiamo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ii} dx^{i\,2}$$

Possiamo fissare il tempo e analizzare la metrica 3D relativa alla sola parte spaziale. Gli elementi infinitesi delle distanze proprie risultano:

$$dl^2 = g_{ii}(t)\, dx^{i\,2}$$

Poichè l'universo deve essere omogeneo e isotropo queste distanze devo crescere o diminuire nel tempo in modo uniforme quindi evidentemente tutte le distanze devono essere moltiplicate per uno stesso fattore di scala dipendente dal tempo, ovvero:

$$dl^2 = R^2(t)\, h_{ii}\, dx^{i\,2}$$

Adesso dimentichiamoci della dipendenza temporale e concentriamoci sulle simmetrie della metrica. E' chiaro che possiamo rifare ovviamente tutte le considerazioni fatte nel caso della metrica di Schwartzschild ma in più dobbiamo imporre che la curvatura sia la stessa ovunque dato che l'universo deve essere omogeneo e isotropo.

Seguiremo questa procedura: scriviamo la metrica generale come abbiamo fatto nel caso della metrica di Schwartzschild:

$$ds^2 = e^{2\phi} c^2 dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

Dove evidentemente r ingloba anche il fattore di scala di cui adesso non ci stiamo occupando. Come abbiamo visto in questo caso possiamo porre:

$$\phi = 0$$

Possiamo quindi riprendere le componenti del tensore di Ricci calcolate nel caso della metrica di Schwartzschild considerando appunto che Phi=0

$$R_{00} = 0 \qquad (\phi = 0)$$

$$R_{rr} = -\frac{2\Lambda'}{r}$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda}(1 - r\Lambda') - 1$$

$$R_{\phi\phi} = \operatorname{sen}^2\theta \left[e^{-2\Lambda}(1 - r\Lambda') - 1 \right]$$

E' importante notare che in questo caso il tensore energia impulso non è affatto nullo ma anzi descrive un fluido che pervade tutto l'universo, quindi la metrica che cerchiamo è una metrica che vive nel fluido.

Ovvero, in generale abbiamo:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}$$

E dobbiamo considerare il tensore di Ricci e quindi anche lo scalare dove T non è nullo.

Poichè consideriamo l'universo omogeneo e isotropo dobbiamo trovare una metrica che presenta la stessa curvatura ovunque. Proviamo quindi a ricavare lo scalare di Ricci e a imporre che sia costante per trovare la funzione Λ

E' chiaro che porre lo scalare di Ricci costante è condizione necessaria per ottenere la metrica di un universo omogeneo e isotropo ma non siamo sicuri che sia anche condizione sufficiente. Quindi una volta trovata la metrica andrà verificato che rappresenti un universo omogeneo e isotropo.

Intanto diciamo che questa costante può essere diversa da zero perchè:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -\kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R - \frac{4}{2} R = -\kappa T \Rightarrow R = \kappa T$$

E T non è necessariamente nullo anche se la distribuzione di energia è omogenea e isotropa.

Scriviamo lo scalare di Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \qquad (R_{00} = 0)$$

E per come abbiamo scritto la metrica risulta:

$$g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = e^{-2\Lambda} \; ; \; g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \frac{-1}{r^2} \; ; \; g^{\phi\phi} = \frac{1}{g_{\phi\phi}} = \frac{-1}{r^2 \sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{4\Lambda'}{r} - \frac{2}{r^2} \right) e^{-2\Lambda} + \frac{2}{r^2} = a$$ dove a è costante

Provo a sostituire in questa equazione: $e^{2\Lambda} = \frac{1}{1-kr^2}$ dove k è una costante

risulta: $\frac{d}{dr} e^{-2\Lambda} = -2\Lambda' e^{-2\Lambda} = -2kr \Rightarrow \Lambda' = \frac{kr}{1-kr^2}$

sostituisco e ottengo: $4k - \frac{2}{r^2} + 2k + \frac{2}{r^2} = a \Rightarrow 6k = a$

Da notare che per r=0 il termine $g_{rr}|_{r=0}$ diventa 1. Ovvero abbiamo uno spazio localmente piatto. Questa metrica descrive uno spazio in caduta libera dove le coordinate sono costanti e che è quindi localmente piatto per il principio di equivalenza.

Quindi abbiamo ottenuto:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{1}{1-kr^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Adesso ripristiniamo il fatto che a tempi diversi le distanze proprie possono essere diverse e che devono cambiare in modo che lo spazio rimanga omogeneo e isotropo, quindi aggiugiamo il fattore di scala dipendente dal tempo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \right]$$

Possiamo anche ridefinire r in modo che la costante k possa assumere solo i tre valori: 0,-1, 1. Noto che nel caso k=0 a t costante lo spazio è quello della metrica di Minkowsky che rappresenta evidentemente uno spazio omogeneo e isotropo e quindi va bene. Nel caso k=1 abbiamo:

$$dl^2 = R^2 \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \right]$$

Posso porre: $d\chi \overset{df}{=} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \Rightarrow r = \operatorname{sen}\chi$ quindi abbiamo un r limitato e posso scrivere

$$dl^2 = R^2\left[d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi\, d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi^2\right]$$

Così come l'elemento:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

Rappresenta l'elemento infinitesimo di lunghezza dl su una sfera ricavata in uno spazio 3D, il nostro nuovo elemento di lungheza dl rappresenta l'elemento infinitesimo di lunghezza su una sfera (con superificie 3D) ricavata in uno spazio 4D. Se è così allora la metrica con k=1 anche rappresenta uno spazio omogeneo e isotropo.

In 3D abbiamo:

$$z = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$
$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$

In 4D abbiamo:

$$w = r\cos\chi$$
$$z = r\operatorname{sen}\chi\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\chi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$x = r\operatorname{sen}\chi\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$

Per ricavare gli elementi della metrica sulla sfera di superficie 3D si procede come segue:

$$\begin{cases} \vec{e}_\chi = \frac{dx}{d\chi}\hat{x} + \dots + \frac{dw}{d\chi}\hat{w} \\ \vec{e}_\theta = \frac{dx}{d\theta}\hat{x} + \dots + \frac{dw}{d\theta}\hat{w} \\ \vec{e}_\phi = \frac{dx}{d\phi}\hat{x} + \dots + \frac{dw}{d\phi}\hat{w} \end{cases} \quad \text{dove} \quad \hat{x}\hat{x} = 1 \quad \hat{x}\hat{y} = 0 \dots$$

Gli elementi della metrica quindi sono:

$$g_{\chi\chi} = \vec{e}_\chi \vec{e}_\chi \qquad g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta \qquad g_{\phi\phi} = \vec{e}_\phi \vec{e}_\phi$$

Da cui si ottiene il risultato cercato

Infine nel caso di k=-1 si ottiene:

$$d\chi = \frac{dr}{1+r^2} \Rightarrow r = \sinh \chi$$

quindi in questo caso r non è limitato

$$\Rightarrow dl^2 = R^2\left[d\chi^2 + \sinh^2\chi\, d\theta^2 + \sinh^2\chi \sin^2\theta\, d\phi^2\right]$$

da completare

La metrica trovata però è ancora indefinita perchè il fattore di scala R non è definito. Per trovare R adesso dobbiamo sostituire la metrica attuale nell'equazione di Einstein e trovare R. Il risultato dipenderà da come è fatto il tensore energia-impulso.

Come abbiamo detto le coordinate delle «galassie» in questo universo sono costanti, ovvero la quadriverlocità che descrive il moto del fluido ha solo la componente temporale divesa da 0:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\mu U^\nu - p\, g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & \frac{1-kr^2}{R^2} p & & \\ & & \frac{p}{R^2 r^2} & \\ & & & \frac{p}{R^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Possiamo provare a ricavare un'equazione di stato del lfuido che pervade l'universo e per fare questo l'equazione candidata è quella che abbiamo ricavato scrivendo la conservazione dell'energia: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$

Abbiamo 4 scelte per mu e scegliamo mu=0. Per scrivere la derivata covariante ricodiamo che:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\beta} = T^{\mu\nu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} T^{\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow T^{0\nu}{}_{;\nu} = T^{0\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{0}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} T^{0\alpha}$$

Dove abbiamo:

$$g^{00} = 1 \qquad i \neq 0$$

(1) $$T^{0\nu}{}_{,\nu} = T^{00}{}_{,0} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\rho c^2$$

(2) $$\Gamma^{0}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} = \Gamma^{0}_{\nu\nu} T^{\nu\nu} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^0}\right) T^{\nu\nu} = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^0} T^{ii} =$$

$$= +\frac{1}{2c}\frac{d}{dt}\left(\frac{R^2}{1-kr^2}\right)\frac{1-kr^2}{R^2}p + \frac{1}{2c}\frac{d}{dt}\left(R^2 r^2\right)\frac{1}{R^2 r^2}p + \frac{1}{2c}\frac{d}{dt}\left(R^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\frac{p}{R^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$= 3p\,\frac{\dot{R}}{cR}$$

(3) $$\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} T^{0\alpha} = \Gamma^{\nu}_{0\nu} T^{00} = \frac{1}{2} g^{\nu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^0} + \cancel{\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\nu}} - \cancel{\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^\nu}}\right)\rho c^2 = \frac{1}{2} g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^0}\rho c^2 =$$

$$= \frac{1}{2c}\frac{1-kr^2}{R^2}\frac{d}{dt}\frac{R^2}{1-kr^2}\rho c^2 + \frac{1}{2c}\frac{1}{R^2 r^2}\frac{d}{dt}\left(R^2 r^2\right)\rho c^2 + \frac{1}{2c}\frac{1}{R^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{d}{dt}\left(R^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\rho c^2 =$$

$$= 3\rho c\,\frac{\dot{R}}{R}$$

E quindi otteniamo la seguente equazione di stato:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

Se abbiamo solo polvere e quindi p=0 si ottiene:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}\rho \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}$$

Se abbiamo solo radiazione: $p = \frac{1}{3}\rho c^2$

$$\dot{\rho} = -4\frac{\dot{R}}{R}\rho \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{R_0^4}{R^4}$$

In questo caso la densità di energia diminuisce perchè aumenta il volume e per il redshift cosmologico

Questa equazione ci servirà per trovare le equazioni di Friedmann

Dall'elemento temporale dell'equazione di Einstein si ricava la prima equazione di Friedmann, ovvero:

$$G^{00} = -\kappa T^{00} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R^2}} \qquad K = 0, \pm 1$$

I tre termini di questa equazione possono essere visti come:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 = -Kc^2$$

energia tot

energia cinetica

$\rho R^2 \propto \frac{1}{R}$ energia potenziale

Per ricavare la seconda equazione di Friedmann (eq. per l'accelerazione) posso derivare la prima rispetto al tempo e poi usare l'eq. di stato del fluido:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - Kc^2 \Rightarrow 2\dot{R}\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}R^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho 2\dot{R}R$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{4\pi G}{3}\left(\frac{\dot{\rho}}{\dot{R}}R^2 + 2\rho R\right)$$

ma $\frac{\dot{\rho}}{\dot{R}} = -\frac{3}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^3}\right)$ eq. di stato

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R}$$

nota che una pressione negativa del tipo: $P = -\rho c^2$
Tenderebbe a prevalere sull'effetto attrattivo dato dalla densità di energia e porterebbe l'universo ad espondersi in modo accelerato

Differenza tra coordinate e non-coordinate

Una trasformazione di coordinate è data da: $V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} V^{\nu} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\nu}} V^{\nu}$

Ad esempio nel passaggio da coordinate cartesiane e polari abbiamo:

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

E quindi si ricava: $e_r = \Lambda_r{}^i \hat{x}_i$ con $\hat{x}_i = (\hat{x}, \hat{y})$

Da cui: $g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ Quindi la base non è ortonormale

Se adesso voglio rendere ortonormali i vettori base per r e theta allora non ho più una trasformazione di coordinate per passare dalle coordinate cartesiane alle non-coordinate polari.

In generale posso scrivere:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Ma in generale se voglio che : $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ovvero, voglio una base ortonormale,

non esisterà una trasfromazione di coordinate $\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}$ che permette questa trasformazione

Ma la RG è basata sulle trasformazioni di coordinate perchè sono queste che permettono di scrivere equazioni tensoriali valide in tutti i sistemi di riferimento:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} G^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \kappa T^{\mu'\nu'}$$

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\beta'}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} G^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\beta'}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \kappa T^{\mu'\nu'}$$

$$\delta^{\alpha'}{}_{\mu'} \delta^{\beta'}{}_{\nu'} G^{\mu'\nu'} = \kappa \delta^{\alpha'}{}_{\mu'} \delta^{\beta'}{}_{\nu'} T^{\mu'\nu'}$$

$$G^{\alpha'\beta'} = \kappa T^{\alpha'\beta'}$$

Tutto questo funziona perchè: $\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \Lambda^{\alpha'}{}_{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{dx^{\mu'}} \frac{dx^{\alpha'}}{dx^{\mu}} = \frac{dx^{\alpha'}}{dx^{\mu'}} = \delta^{\alpha'}{}_{\mu'}$

Calcolo delle forze di marea agenti su un astronauta che cade in un buco nero

Per calcolare le forze di marea uso l'equazione della deviazione della geodetica (ad esempio vedere Schutz pg. 161) ed in particolare mi metto nel riferimento dell'astronauta che si trova in caduta libera nel buco nero:

$$\frac{D}{d\tau}\left(\frac{D}{d\tau}\xi^{\alpha}\right) = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}\, U^{\mu} U^{\nu} \xi^{\beta} \Longrightarrow \frac{D}{d\tau}\left(\frac{D}{d\tau}\xi^{\alpha'}\right) = R^{\alpha'}{}_{0'0'\beta'}\, c^{2}\, \xi^{\beta'}$$

Scritta nel ref dell'astronauta (dove gli indici hanno un ')

Dove ξ^{α} è il vettore di connessione tra due geodetiche prese allo stesso tempo (o parametro affine):

$$\frac{D}{d\tau}V^{\alpha} \overset{df}{=} \frac{d}{d\tau}V^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, U^{\beta} V^{\gamma}$$

È la derivata covariante del vettore V che tiene conto attraverso i simboli di Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ di come cambiano i vettori base

$$U^{\mu} \overset{df}{=} \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

È la quadrivelocità dove tau è il tempo proprio. Nel riferimento dell'astronauta le componenti spaziali sono nulle.

$\xi^{\alpha'}$

Nel riferimento dell'astronauta il vettore connessione si riferisce allo shift spaziale rispetto a centro di massa di questo e quindi questi vettori (essendo questo riferimento localmente inerziale) rappresentano le lunghezze proprie relative ai punti dell'astronauta. Quindi se in un ref inerziale l'astronauta è alto 2metri allora il vettore connessione che unisce piedi e testa dell'astronauta lungo r ha una lunghezza di 2m

$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}$

È il tensore di Riemann. In particolare (vedere Gravitation pg. 820 e pg. 860) questo tensore è noto nel riferimento solidale al buco nero dove il tensore metrico è quello di Schwarzschild:

$$\text{segnatura} = (1,-1,-1,-1)$$

$$g_{00} = 1 - \frac{r_s}{r} \qquad g_{rr} = \frac{-1}{1-\frac{r_s}{r}} \qquad g_{\theta\theta} = -r^2 \qquad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow g^{00} = \frac{1}{g_{00}} \qquad g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} \qquad g^{\phi\phi} = \frac{1}{g_{\phi\phi}}$$

In particolare abbiamo che: $R^{\alpha}{}_{00\beta} = 0$ per $\alpha \neq \beta$ nel ref solidale con il buco nero

Noi siamo interessati a scrivere l'equazione della deviazione della geodetica per $\xi^{r'}$ nel riferimento dell'astronauta, ovvero:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\xi^{r'} = R^{r'}{}_{0'0'\beta'}\, c^2 \xi^{\beta'}$$

Quindi il nostro problema sta nel trasformare il tensore di Riemann dal ref solidale con il buco nero a quello in caduta libera dell'astronauta:

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} \xrightarrow{?} R^{\alpha'}{}_{\mu'\nu'\beta'}$$

Una possibilità è quella di scrivere una trasformazione di coordinate: $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \dfrac{dx^{\mu'}}{dx^{\nu}}$

Sotto questa trasformazione avremmo che : $e_{\mu} \cdot e_{\nu} = g_{\mu\nu}$ e $e_{\mu'} e_{\nu'} = g_{\mu'\nu'}$

Ma io non conosco $g_{\mu'\nu'}$

Allora provo a seguire una diversa strategia:
1)Introduco una base ortonormale per mezzo di un «campo e»
2)Faccio un boost di Lorentz tra le basi ortonormali dal ref solidale con il BH a quello in caduta libera

Nel seguito giustificherò nel dettaglio questi passaggi.

Introduco la base ortonormale nel ref solidale con il buco nero per mezzo del «campo e» (vedere https://arxiv.org/abs/1106.2037v1) :

$$e_{\bar{a}} \overset{df}{=} e^{\mu}{}_{\bar{a}}\, e_{\mu}$$

Dove il barra negli indici indica che ci troviamo nel sistema delle non-coordinate con base ortonormale

$$e_{\bar{a}} e_{\bar{b}} = \eta_{\bar{a}\bar{b}} = e^{\mu}{}_{\bar{a}}\, e^{\nu}{}_{\bar{b}}\, e_{\mu} e_{\nu} = e^{\mu}{}_{\bar{a}}\, e^{\nu}{}_{\bar{b}}\, g_{\mu\nu} \Rightarrow$$

tensore di Minkowski (perchè la base è ortonormale)

$$\boxed{\eta_{\bar{a}\bar{a}} = \left(e^{\mu}{}_{\bar{a}}\right)^2 g_{\mu\mu}}$$

Quindi nel caso della metrica di Schwarzschild ricavo:

$$e^{0}{}_{\bar{0}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} \qquad e^{r}{}_{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{rr}}} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r}} \qquad e^{\theta}{}_{\bar{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{\theta\theta}}} = r$$

$$e^{\phi}{}_{\bar{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{\phi\phi}}} = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Per mezzo del «campo e» posso trasformare i vettori ed i tensori in genere dal sistema delle coordinate a quello delle non coordinate con base ortonormale:

$$\vec{V} = V^{\bar{a}} e_{\bar{a}} = V^{\bar{a}} e^{\mu}{}_{\bar{a}} e_{\mu} = V^{\mu} e_{\mu} \Rightarrow V^{\mu} = e^{\mu}{}_{\bar{a}} V^{\bar{a}}$$

E quindi posso introdurre i «campo e» inverso che genera la trasformazine opposta:

$$e^{\mu}{}_{\bar{a}}\, e_{\mu}{}^{\bar{b}} = \delta^{\bar{b}}_{\bar{a}} \Rightarrow V^{\bar{a}} = e_{\mu}{}^{\bar{a}} V^{\mu}$$

$$e_{0}{}^{\bar{0}} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r}} \qquad e_{r}{}^{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} \qquad e_{\theta}{}^{\bar{\theta}} = \frac{1}{r} \qquad e_{\phi}{}^{\bar{\phi}} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Abbiamo trovato come trasformano le componenti «in alto» (vettori controvarianti nello spazio delle coordinate), adesso devo trovare come trasformano le componenti «in basso» (vettori covarianti nello spazio delle coordinate). Per fare questo impongo la conservazione della lunghezza dei vettori:

$$V^{\bar{a}} V_{\bar{a}} = V^{\mu} V_{\mu} = e^{\mu}{}_{\bar{a}} V^{\bar{a}} V_{\mu} \Rightarrow V_{\bar{a}} = e^{\mu}{}_{\bar{a}} V_{\mu} \Rightarrow V_{\mu} = e_{\mu}{}^{\bar{a}} V_{\bar{a}}$$

Riassumendo ho le seguenti regole di trasformazione tra coordinate e non coordinate:

$$\boxed{\begin{array}{ll} V^{\mu} = e^{\mu}{}_{\bar{a}} V^{\bar{a}} & V^{\bar{a}} = e_{\mu}{}^{\bar{a}} V^{\mu} \\ V_{\mu} = e_{\mu}{}^{\bar{a}} V_{\bar{a}} & V_{\bar{a}} = e^{\mu}{}_{\bar{a}} V_{\mu} \end{array}}$$

E nel riferimento solidale con il buco nero ho:

$$\boxed{\begin{array}{llll} e^{0}{}_{\bar{0}} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{00}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} & e^{r}{}_{\bar{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{rr}}} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r}} & e^{\theta}{}_{\bar{\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} = r & e^{\phi}{}_{\bar{\phi}} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ e_{0}{}^{\bar{0}} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r}} & e_{r}{}^{\bar{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} & e_{\theta}{}^{\bar{\theta}} = \dfrac{1}{r} & e_{\phi}{}^{\bar{\phi}} = \dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} \end{array}}$$

Quindi se mi trovo nel riferimento solidale con il buco nero e voglio trasformare il tensore di Riemann per passare dallo spazio dell coordinate a quello con base ortonormale (non coordinate) scrivo:

$$R^{a}{}_{\bar{b}\bar{c}\bar{d}} = e_{\mu}{}^{\bar{a}}\, e^{\nu}{}_{\bar{b}}\, e^{\lambda}{}_{\bar{c}}\, e^{\eta}{}_{\bar{d}}\, R^{\mu}{}_{\nu\lambda\eta}$$

Adesso posso introdurre il boost di Lorentz tra le due basi ortonormali per passare dal riferimento solidale con il buco nero a quello in caduta libera dell'astronauta.

Posso usare il boost di Lorentz perchè le trasformazioni di Lorentz sono proprio quelle che conservano il tensore di Minkowski e in questo caso devo proprio passare tra due basi ortonormali dove il prodotto dei vettori base fornisce il tensore di Minkowski. E' comunque istruttivo ripetere tutti i passaggi in particolare per capire bene quale velocità inserire nel boost di Lorentz, quindi scrivo l'elemento invariante:

$$ds^2 = dx^{\bar{a}'} dx_{\bar{a}'} = \eta_{\bar{a}'\bar{b}'}\, dx^{\bar{a}'} dx^{\bar{b}'} = \eta_{\bar{a}'\bar{b}'}\, \Lambda^{\bar{a}'}{}_{\bar{\mu}}\, \Lambda^{\bar{b}'}{}_{\bar{\nu}}\, dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\, dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}}$$

$$\Rightarrow \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{\bar{a}'\bar{b}'}\, \Lambda^{\bar{a}'}{}_{\bar{\mu}}\, \Lambda^{\bar{b}'}{}_{\bar{\nu}}$$

Dove le Lambda sono le trasformazioni (trasformazioni di Lorentz) che mi fanno passare tra le due basi ortonormali definite nei due riferimenti

Scrivo la trasformazione approssimata al primo ordine e ne trovo le proprietà:

$$\Lambda^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}} \simeq \delta^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}} + \omega^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}}$$

$$\Rightarrow \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{\bar{e}'\bar{b}'}\left(\delta^{\bar{e}'}{}_{\mu} + \omega^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}}\right)\left(\delta^{\bar{b}'}{}_{\nu} + \omega^{\bar{b}'}{}_{\bar{\nu}}\right) \simeq \eta_{\bar{e}'\bar{b}'}\,\delta^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}}\,\delta^{\bar{b}'}{}_{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{e}'\bar{b}'}\,\delta^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}}\,\omega^{\bar{b}'}{}_{\bar{\nu}} +$$

$$+ \eta_{\bar{e}'\bar{b}'}\,\delta^{\bar{b}'}{}_{\nu}\,\omega^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \eta_{\bar{\mu}\bar{b}'}\,\omega^{\bar{b}'}{}_{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{e}'\bar{\nu}}\,\omega^{\bar{e}'}{}_{\bar{\mu}} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \omega_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \omega_{\bar{\nu}\bar{\mu}}$$

$$\Rightarrow \omega_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = -\omega_{\bar{\nu}\bar{\mu}}$$

dove ho usato il tensore di Minkowski per alzare e abbassare gli indici

Consideriamo in particolare un boost lungo r e quindi consideriamo la matrice 2x2 con indici 0 (temporale) e r

$$\omega_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha\sigma_x$$

Quindi abbiamo:

$$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = e^{\omega^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}} = \mathbb{1} + \alpha\sigma_x + \frac{1}{2!}(\alpha\sigma_x)^2 + \dots = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

Adesso devo dare un significato fisico ad alpha. Quindi scrivo esplicitamente le non-coordinate:

$$\begin{pmatrix} dx^{\bar{0}'} \\ dx^{\bar{r}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \operatorname{senh}\alpha \\ \operatorname{senh}\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^{\bar{0}} \\ dx^{\bar{r}} \end{pmatrix}$$

E impongo: $dx^{\bar{r}'} = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{senh}\alpha \, dx^{\bar{0}} = -\cosh\alpha \, dx^{\bar{r}} \Rightarrow \operatorname{tgh}\alpha = -\frac{dx^{\bar{r}}}{dx^{\bar{0}}} \overset{df}{=} -\beta$$

E usando: $\cosh^2\alpha - \operatorname{senh}^2\alpha = 1$ trovo:

$$\Lambda^{\bar{\mu}'}{}_{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

dove $\gamma = 1 / \sqrt{1-\beta^2}$

Quindi adesso devo trovare beta usando il «campo e» per passare dalle non coordinate alle coordinate:

$$\boxed{\beta = +\frac{dx^{\bar{r}}}{dx^{\bar{0}}} = +\frac{e_r{}^{\bar{r}} dx^r}{e_0{}^{\bar{0}} dx^0} = +\frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} \frac{dx^r}{dx^0} = +\frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}}$$

devo trovare il dr/dt e quinidi inizio a scrivere l'invariante per il quadrimpulso dell'astronauta in caduta libera:

$$p^2 = m^2c^2 \Rightarrow g^{00}p_0^2 + g_{rr}p^{r^2} = m^2c^2 \Rightarrow \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\left(\frac{mc^2}{c}\right)^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\left(m\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = m^2c^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 - c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right) = c^2\frac{r_s}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{\frac{r_s}{r}}}$$

Nota: da cui si ricava che il tempo proprio per l'astronauta che cade rimane finito per raggiungere l'orizzonte degli eventi (nel conto l'astronauta è partito con velocità nulla)

Per trovare dr/dt procedo come segue:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{dt} = -c\sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad ; \quad c^2d\tau^2 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}dr^2 \Rightarrow$$

$$1 = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\frac{1}{c^2} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\frac{r_s}{r} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}$$

E quindi si ricava:

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c\sqrt{\frac{r_s}{r}} \Rightarrow \boxed{\beta = -\sqrt{\frac{r_s}{r}}} \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}}}$$

Adesso ho le due trasformazioni che mi permettono di scrivere il tensore di Riemann nel riferimento in caduta libera. In particolare come abbiamo visto l'equazione da risolvere è:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\xi^{\alpha'} = R^{\alpha'}{}_{0'0'\beta'}\, c^2\, \xi^{\beta'}$$

Il riferimento in caduta libera è localmente inerziale quindi il passaggio tra le coordinate e le non coordinate è immediato perchè il «campo e» è dato dalla matrice identità (localmente il tensore metrico è il tensore di Minkowski) ovvero:

$$R^{\bar{\alpha}'}{}_{\bar{0}'\bar{0}'\bar{\beta}'} = R^{\alpha'}{}_{0'0'\beta'}$$

In realtà quel beta può essere solo r date le simmetrie del tensore di Riemann nel riferimento solidale al buco nero, al fatto che il «campo e» è diagonale (anche nel riferimento solidale con il buco nero) e al fatto che la trasformazione di Lorentz ha elementi fuori diagonale solo per 0r.
Però conviene prendere confidenza con il tensore di Riemann scritto nel riferimento solidale con il buco nero. Gli elementi diversi da zero sono (vedi Gravitation pg. 820 e 860):

$$R^{r}{}_{r0r} \quad R^{r}{}_{\theta\theta r} \quad R^{r}{}_{\phi\phi r} \quad R^{\theta}{}_{00\theta} \quad R^{\phi}{}_{00\phi} \quad R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta}$$

gli altri sono zero eccetto quelli ottenuti dalle simmetrie del tensore di Riemann

In particolare a noi interessa l'elemento $R^r{}_{00r}$ che calcoliamo esplicitamente:

$$R^r{}_{00r} = \underbrace{\Gamma^r{}_{0r,0}}_{0} - \Gamma^r{}_{00,r} + \Gamma^\alpha{}_{0r}\Gamma^r{}_{\alpha 0} - \Gamma^\alpha{}_{00}\Gamma^r{}_{\alpha r}$$

$$-\Gamma^r{}_{00,r} = \left[-\frac{1}{2}g^{rr}\left(\frac{\partial g_{r0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0r}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial r}\right)\right]_{,r} = \left[\frac{1}{2}g^{rr}\frac{\partial g_{00}}{\partial r}\right]_{,r} = \frac{r_s}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{r_s^2}{r^4}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{0r}\Gamma^r{}_{\alpha 0} = -\frac{1}{4}g^{\alpha\alpha}g^{rr}\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial r}\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial r} = \frac{1}{4}\frac{r_s^2}{r^4}$$

$$-\Gamma^\alpha{}_{00}\Gamma^r{}_{\alpha r} = \frac{1}{4}g^{rr\,2}\frac{\partial g_{00}}{\partial r}\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{4}\frac{r_s^2}{r^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^r{}_{00r} = \frac{r_s}{r^3}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}$$

Scriviamo esplicitamente la trasformazione completa che porta da $R^{r'}{}_{o'o'r'}$ a $R^{r}{}_{oor}$

$$R^{r'}{}_{o'o'r'} = R^{\bar{r}'}{}_{\bar{o}'\bar{o}'\bar{r}'} = \Lambda^{\bar{r}'}{}_{\bar{\alpha}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{\beta}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{\gamma}} \Lambda_{\bar{r}'}{}^{\bar{\lambda}} R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\lambda}} =$$

abbiamo 4 casi possibili

$$= \Lambda^{\bar{r}'}{}_{\bar{r}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{o}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{o}} \Lambda_{\bar{r}'}{}^{\bar{r}} R^{\bar{r}}{}_{\bar{o}\bar{o}\bar{r}} +$$

$$+ \Lambda^{\bar{r}'}{}_{\bar{o}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{r}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{r}} \Lambda_{\bar{r}'}{}^{\bar{o}} R^{\bar{o}}{}_{\bar{r}\bar{r}\bar{o}} +$$

$$+ \Lambda^{\bar{r}'}{}_{\bar{r}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{o}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{r}} \Lambda_{\bar{r}'}{}^{\bar{o}} R^{\bar{r}}{}_{\bar{o}\bar{r}\bar{o}} +$$

$$+ \Lambda^{\bar{r}'}{}_{\bar{o}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{r}} \Lambda_{\bar{o}'}{}^{\bar{o}} \Lambda_{\bar{r}'}{}^{\bar{r}} R^{\bar{o}}{}_{\bar{r}\bar{o}\bar{r}} =$$

dove:

$$\Lambda^{\bar{\alpha}'}{}_{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\bar{\alpha}'}{}^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^4 R^{\bar{r}}{}_{\bar{o}\bar{o}\bar{r}} - \beta^4\gamma^4 R^{\bar{o}}{}_{\bar{r}\bar{r}\bar{o}} + \beta^2\gamma^4 R^{\bar{r}}{}_{\bar{o}\bar{r}\bar{o}} - \beta^2\gamma^4 R^{\bar{o}}{}_{\bar{r}\bar{o}\bar{r}}$$

attenzione ai segni

Adesso devo usare il «campo e» per passare dallo spazio delle non coordinate a quello delle coordinate nel riferimento solidale con il buco nero. Scrivo esplicitamente i 4 termini del tensore di Riemann:

$$R^{\bar{r}}{}_{\bar{0}\bar{0}\bar{r}} = e_r{}^{\bar{r}}\, e^0{}_{\bar{0}}\, e^0{}_{\bar{0}}\, e^r{}_{\bar{r}}\, R^r{}_{00r} = \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} R^r{}_{00r}$$

$$R^{\bar{0}}{}_{\bar{r}\bar{r}\bar{0}} = e_0{}^{\bar{0}}\, e^r{}_{\bar{r}}\, e^r{}_{\bar{r}}\, e^0{}_{\bar{0}}\, R^0{}_{rr0} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right) g^{00} R_{0rr0} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right) g^{00} R_{r00r} =$$

$$= \left(1-\frac{r_s}{r}\right) g^{00} g_{rr} R^r{}_{00r} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right) \frac{-1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} R^r{}_{00r} = \frac{-1}{1-\frac{r_s}{r}} R^r{}_{00r}$$

$$R^{\bar{r}}{}_{\bar{0}\bar{r}\bar{0}} = e_r{}^{\bar{r}}\, e^0{}_{\bar{0}}\, e^r{}_{\bar{r}}\, e^0{}_{\bar{0}}\, R^r{}_{0r0} = \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} (-1) R^r{}_{00r}$$

$$R^{\bar{0}}{}_{\bar{r}\bar{0}\bar{r}} = e_0{}^{\bar{0}}\, e^r{}_{\bar{r}}\, e^0{}_{\bar{0}}\, e^r{}_{\bar{r}}\, R^0{}_{r0r} = \left(1-\frac{r_s}{r}\right) g^{00} R_{0r0r} = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right) g^{00} R_{r00r} =$$

$$= -\left(1-\frac{r_s}{r}\right) g^{00} g_{rr} R^r{}_{00r} = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right) \frac{-1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} R^r{}_{00r} = \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} R^r{}_{00r}$$

E adesso rimetto tutto insieme:

$$R^{r'}{}_{0'0'r'} = \gamma^4 R^{\bar r}{}_{\bar 0 \bar 0 \bar r} - \beta^4\gamma^4 R^{\bar 0}{}_{\bar r \bar r \bar 0} + \beta^2\gamma^4 R^{\bar r}{}_{\bar 0 \bar r \bar 0} - \beta^2\gamma^4 R^{\bar 0}{}_{\bar r \bar 0 \bar r} =$$

$$= \left(\gamma^4 \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} - \beta^4\gamma^4 \frac{-1}{1-\frac{r_s}{r}} + \beta^2\gamma^4 \frac{-1}{1-\frac{r_s}{r}} - \beta^2\gamma^4 \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\right) R^r{}_{00r} =$$

$$= \left(\frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3} + \frac{\left(\frac{r_s}{r}\right)^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3} - \frac{2\frac{r_s}{r}}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3}\right) R^r{}_{00r} = \frac{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^3} R^r{}_{00r} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{r_s}{r^3} = \frac{r_s}{r^3}$$

E quindi ottengo:

$$\boxed{\frac{D}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\xi^{r'} = \frac{r_s}{r^3} c^2 \xi^{r'}}$$

Nel riferimento in caduta libera con base ortonormale posso scrivere che la derivata covariante è uguale alla derivata della componente e quindi:

$$a_r = \frac{r_s}{r^3} c^2 \hat{e}^r = \frac{2GM}{r^3 \cancel{c^2}} \cancel{c^2} \hat{e}^r$$

che è il risultato classico

Posso integrare sul volume dell'astronauta ma posso anche scrivere la forza su una massa di 1kg alla distanza h del centro di massa dell'astronauta:

$$F = m a_r = \frac{2GMm}{r^3} h$$

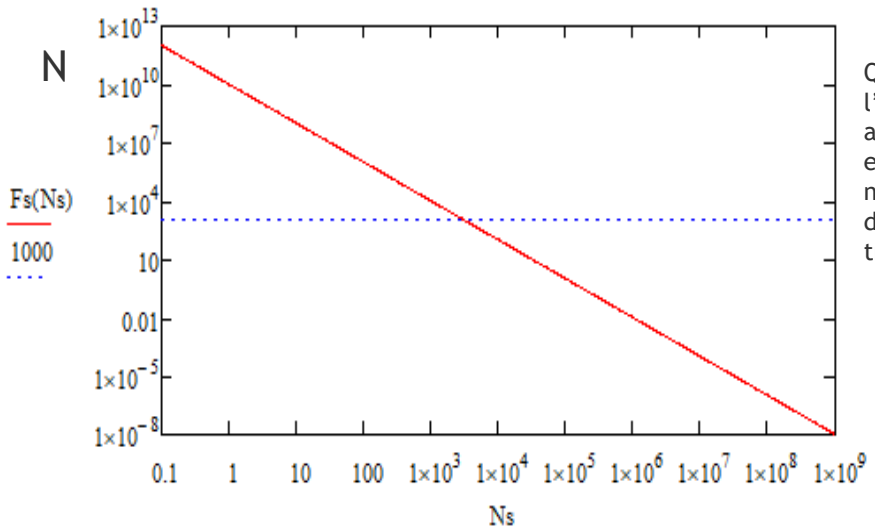
E pongo come forza che inzia a essere dolorosa una forza di 1000N (equivalente circa a 100kg) con h=1m

Se considero la distanza r=rs otte

$$F_s = \frac{c^6 m h}{(2GM)^2} \qquad m = 1kg \qquad h = 1m$$

$$M = N_s \cdot M_\odot \approx N_s \cdot 2 \cdot 10^{30} kg$$

massa del Sole



Quindi quando l'astronauta arriva all'orizzonte degli eventi di un buco nero galattico la forza di marea è trascurabile

Vediamo il caso relativo all'accelerazione lungo θ

$$\frac{D}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\xi^{\theta'} = R^{\theta'}{}_{\alpha'\alpha'\beta'}c^2\xi^{\beta'}$$

Scritta nel riferimento dell'astronauta

Il assaggio alle non coordinate non è banale perchè il modulo del vettore base lungo θ non è unitario

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad e_\theta \cdot e_\theta$$

Quindi uso il «campo e» per la trasformazione:

$$R^{\theta'}{}_{\alpha'\alpha'\beta'} = e^{\theta'}{}_{\bar\theta'}e_{\alpha'}{}^{\bar\alpha'}e_{\alpha'}{}^{\bar\alpha'}e_{\beta'}{}^{\bar\beta'}R^{\bar\theta'}{}_{\bar\alpha'\bar\alpha'\bar\beta'}$$

$$e^{\theta'}{}_{\bar\theta'} = \frac{1}{r} \qquad e_{\alpha'}{}^{\bar\alpha'} = 1$$

$$R^{\theta'}{}_{0'0'\beta'} = \frac{1}{r} e_{\beta'}{}^{\bar\beta'} R^{\bar\theta'}{}_{\bar 0'\bar 0'\bar\beta'} = R^{\bar\theta'}{}_{\bar 0'\bar 0'\bar\theta'}$$

Questo è l'unico valore di beta permesso considrando le trasformazioni di Lorentz (che vediamo sotto) e le proprietà di R nel riferimento solidale al buco nero.

$$R^{\bar\theta'}{}_{\bar 0'\bar 0'\bar\theta'} = \Lambda^{\bar\theta'}{}_{\theta} \Lambda_{\bar 0'}{}^{\bar 0} \Lambda_{\bar 0'}{}^{\bar 0} \Lambda_{\bar\theta'}{}^{\bar\theta} R^{\bar\theta}{}_{\bar 0\bar 0\bar\theta} +$$

$$+ \Lambda^{\theta'}{}_{\theta} \Lambda_{\bar 0'}{}^{\bar r} \Lambda_{\bar 0'}{}^{\bar r} \Lambda_{\bar\theta'}{}^{\bar\theta} R^{\bar\theta}{}_{\bar r\bar r\bar\theta} =$$

$$= \gamma^2 e_{\theta}{}^{\bar\theta} e^{0}{}_{\bar 0} e^{0}{}_{\bar 0} e^{\theta}{}_{\bar\theta} R^{\theta}{}_{00\theta} + \beta^2\gamma^2 e_{\theta}{}^{\bar\theta} e^{r}{}_{\bar r} e^{r}{}_{\bar r} e^{\theta}{}_{\bar\theta} R^{\theta}{}_{rr\theta} =$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} R^{\theta}{}_{00\theta} + \frac{r_s}{r} R^{\theta}{}_{rr\theta}$$

$$R^{\theta}{}_{00\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{0\theta,0} - \Gamma^{\theta}{}_{00,\theta} + \Gamma^{\alpha}_{0\theta}\Gamma^{\theta}_{\alpha 0} - \Gamma^{\alpha}_{00}\Gamma^{\theta}_{\alpha\theta} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{r_s}{r^3}$$

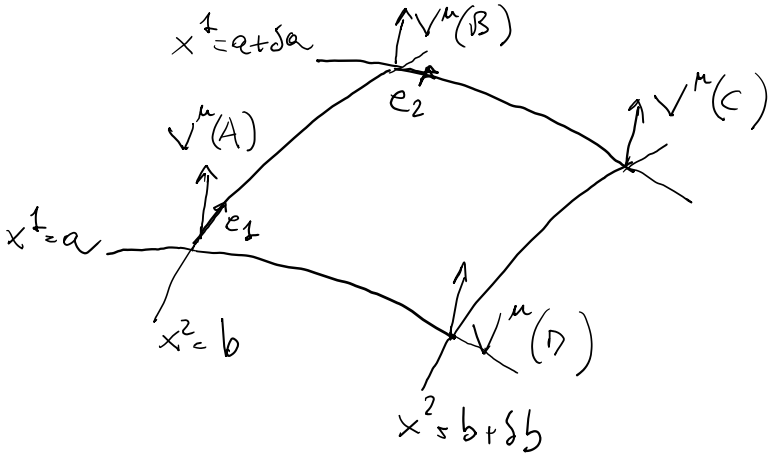
$$R^{\theta}{}_{rr\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{r\theta,r} - \Gamma^{\theta}{}_{rr,\theta} + \Gamma^{\alpha}_{r\theta}\Gamma^{\theta}_{\alpha r} - \Gamma^{\alpha}_{rr}\Gamma^{\theta}_{\alpha\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\frac{r_s}{r^3}$$

$$\Rightarrow R^{\theta'}{}_{0'0'\theta'} = -\frac{1}{2}\frac{r_s}{r^3}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\xi^{\theta'} = -\frac{1}{2}\frac{r_s}{r^3}c^2\xi^{\theta'} = -\frac{GM}{r^3}\xi^{\theta'}$$

Appendice: derivazione del tensore di Riemann



$$V^\mu{}_{;1} = 0 = V^\mu{}_{,1} + \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha$$

$$V^\mu{}_{;2} = 0 = V^\mu{}_{,2} + \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha$$

$$V^\mu(B) = V^\mu(A) + \int_A^B V^\mu{}_{,1}\, dx^1 = V^\mu(A) - \int_A^B \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha dx^1$$

$$V^\mu(C) = V^\mu(B) - \int_B^C \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha dx^2$$

$$V^\mu(D) = V^\mu(C) - \int_C^D \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha dx^1$$

$$V'^\mu(A) = V^\mu(D) - \int_D^A \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha dx^2$$

$$\delta V^\mu = V'^\mu(A) - V^\mu(A) = -\int_{A\,(x^2=b)}^{B} \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha dx^1 - \int_{C\,(x^2=b+\delta b)}^{D} \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha dx^1$$

$$- \int_{B\,(x^1=a+\delta a)}^{C} \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha dx^2 - \int_{D\,(x^1=a)}^{A} \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha dx^2 =$$

$$= -\int_a^{a+\delta a} \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha dx^1 + \int_a^{a+\delta a} \left[\Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha + \left(\Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha\right)_{,2} \delta b\right] dx^1$$

$$- \int_b^{b+\delta b} \left[\Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha + \left(\Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha\right)_{,1} \delta a\right] dx^2 + \int_b^{b+\delta b} \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha dx^2 =$$

$$= \left[\left(\Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha\right)_{,2} - \left(\Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha\right)_{,1}\right] \delta a\, \delta b =$$

$$= \left(\Gamma^\mu_{1\alpha,2} V^\alpha + \Gamma^\mu_{1\alpha} V^\alpha{}_{,2} - \Gamma^\mu_{2\alpha,1} V^\alpha - \Gamma^\mu_{2\alpha} V^\alpha{}_{,1}\right) \delta a\, \delta b =$$

$$= \left(\Gamma^\mu_{1\alpha,2} V^\alpha - \Gamma^\mu_{1\alpha} \Gamma^\alpha_{2\beta} V^\beta - \Gamma^\mu_{2\alpha,1} V^\alpha + \Gamma^\mu_{2\alpha} \Gamma^\alpha_{1\beta} V^\beta\right) \delta a\, \delta b =$$

Nei termini con Gamma*Gamma scambio α e β

$$\delta V^\mu = \left(\Gamma^\mu{}_{1\alpha,2} V^\alpha - \Gamma^\mu{}_{1\beta} \Gamma^\beta{}_{2\alpha} V^\alpha - \Gamma^\mu{}_{2\alpha,1} V^\alpha + \Gamma^\mu{}_{2\beta} \Gamma^\beta{}_{1\alpha} V^\alpha \right) \delta a \delta b =$$

Applico la simmetria di Gamma rispetto agli indici in basso

$$\delta V^\mu = \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha 1,2} - \Gamma^\mu{}_{\beta 1} \Gamma^\beta{}_{\alpha 2} - \Gamma^\mu{}_{\alpha 2,1} + \Gamma^\mu{}_{\beta 2} \Gamma^\beta{}_{\alpha 1} \right) V^\alpha \delta a \delta b$$

Adesso sostituisco σ a β e ν ad α

$$\delta V^\mu = \left(\Gamma^\mu{}_{\nu 1,2} - \Gamma^\mu{}_{\sigma 1} \Gamma^\sigma{}_{\nu 2} - \Gamma^\mu{}_{\nu 2,1} + \Gamma^\mu{}_{\sigma 2} \Gamma^\sigma{}_{\nu 1} \right) V^\nu \delta a \delta b$$

Metto β al posto di 1 e α al posto di 2

$$\delta V^\mu = \left(\Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha} \right) a^\beta b^\alpha V^\nu$$

$$\delta V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} a^\beta b^\alpha V^\nu \qquad \left(\text{segno} \quad R = +1 \right)$$