



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Cavità ottiche

Introduzione al progetto di una cavità LASER



Simone Cialdi

Outline

Analisi delle prime misure

Introduzione

Strumenti matematici:

Formalismo ABCD

Integrale di Huygens

Propagazione

Propagazione del fascio gaussiano

Autofunzioni della propagazione

Modi della cavità:

Condizione di stabilità

R e w sul piano di riferimento

Frequenze dei modi

Tipi di cavità

Diagramma g_1g_2

Cavità instabili

Cavità ottica come filtro spaziale e spettrale

Larghezza di riga del modo

Finesse e misura della finesse

Fattore M^2

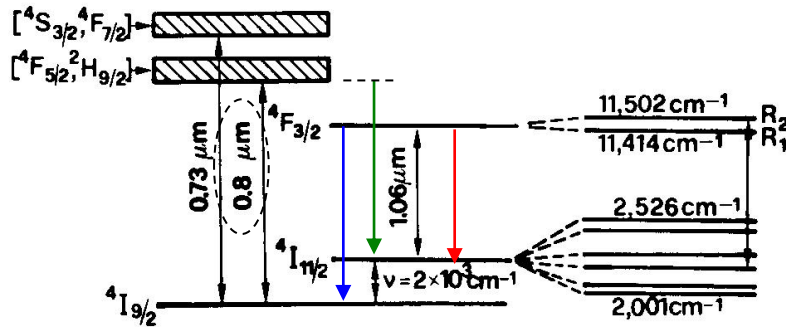
Appendice

Trasformata di Fourier con una lente



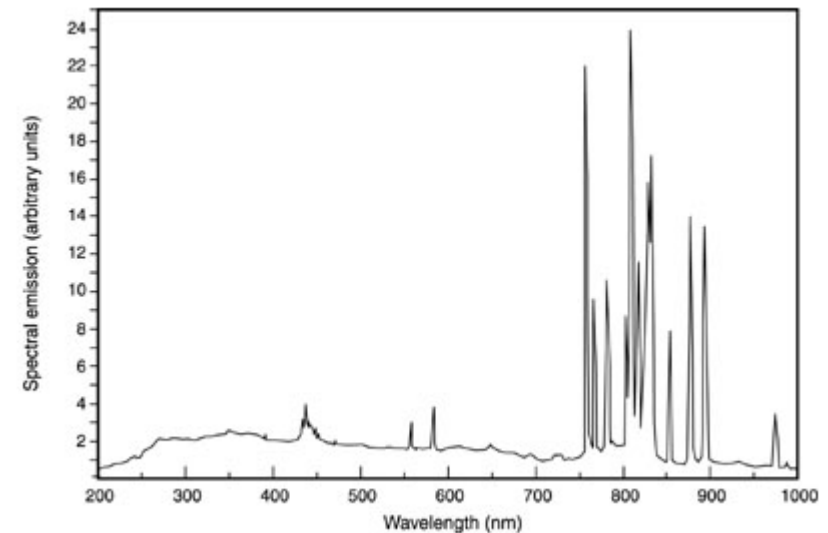
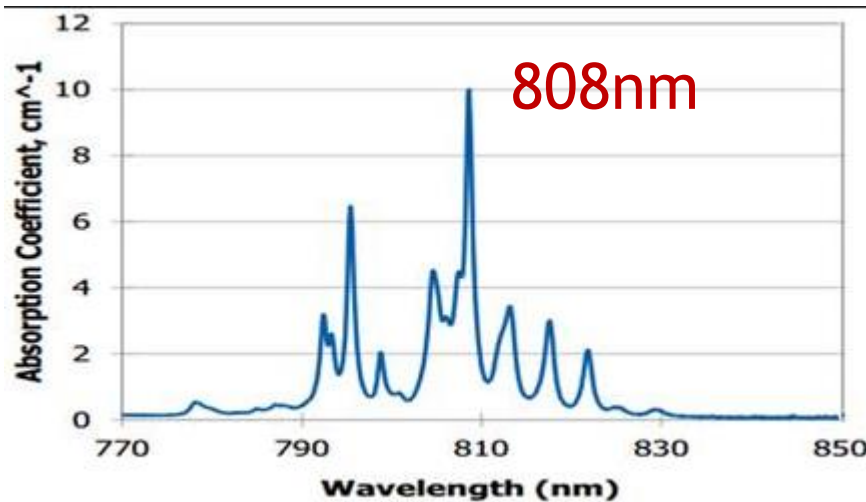
Analisi delle prime misure

Livelli del Nd³⁺ in YAG



Per pompare il Nd:YAG possiamo usare un diodo laser a 808nm oppure una lampada al Krypton

Spettro di assorbimento del Nd:YAG

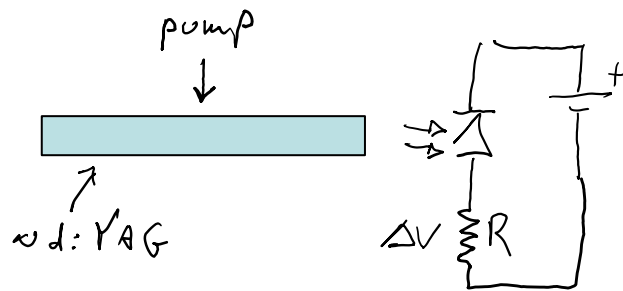


Spettro di emissione di una lampada al Krypton



P_{out} vs I dei diodi di pompa del Nd:YAG

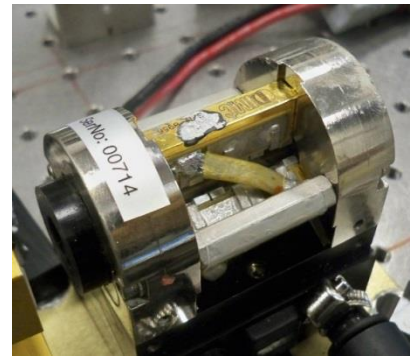
Poiché il Laser Nd:YAG è spento la potenza di pompa va tutta in emissione spontanea, quindi la curva dell'emissione spontanea ci dice come va la potenza di pompa in funzione della corrente.



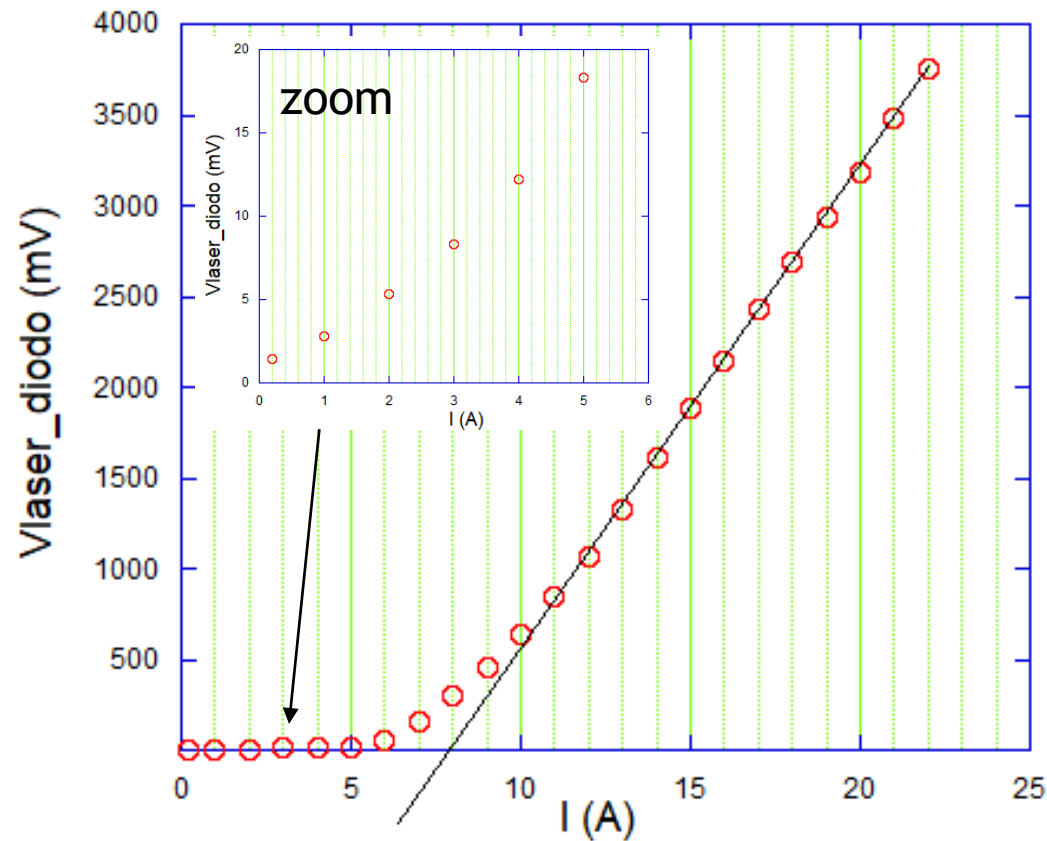
$$\Delta V = R R_{diode} I$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 = R_p - \frac{1}{\tau} N$$

$$P_{diode} \propto \frac{N}{\tau} = R_p \propto P_p$$



Si misura parte dell'emissione spontanea del mezzo attivo con un fotodiodo di Si in funzione della corrente di pompa

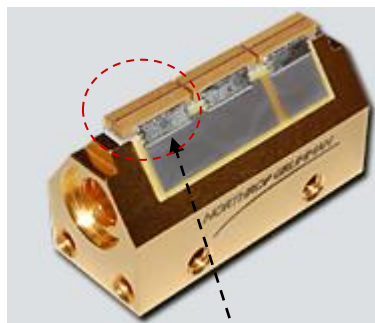


Ogni piscina contiene 3 array di laser a diodi. Ogni array è composto da 3 barre di diodi collegate in serie.

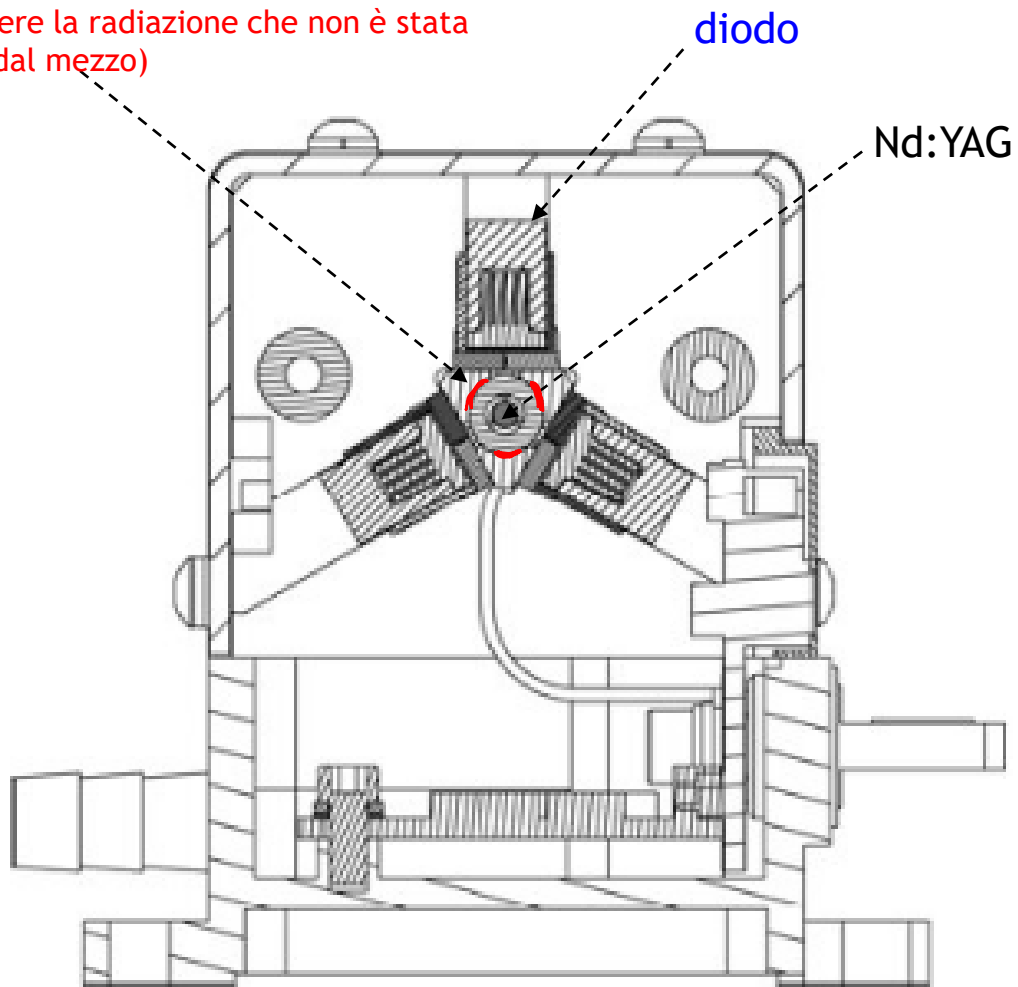
Cilindro di Fused Silica

(in rosso indicato uno strato metallico usato per riflettere la radiazione che non è stata assorbita dal mezzo)

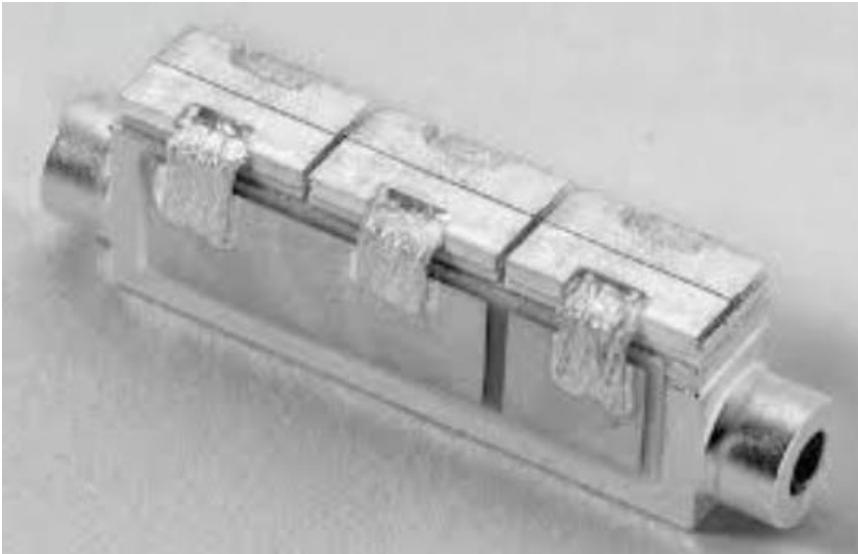
Array



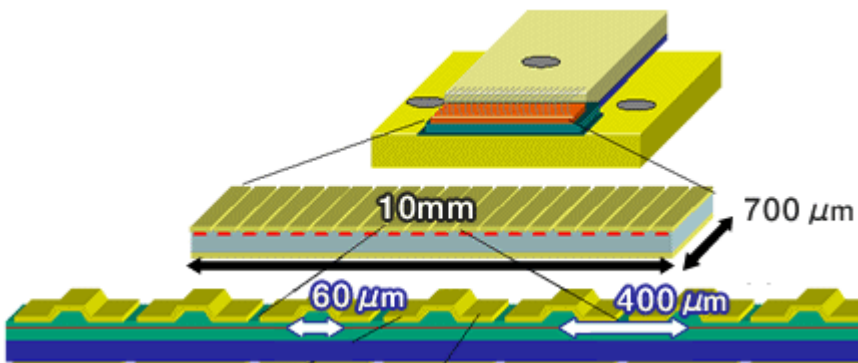
Barra da 20W



Tipici laser a diodi sono composti da InGaAlP/GaAs (720-850nm) AlGaAs/GaAs (1200-1650nm) InGaAsP/InP(900-1100nm) InGaAs/GaAs (630-700nm).



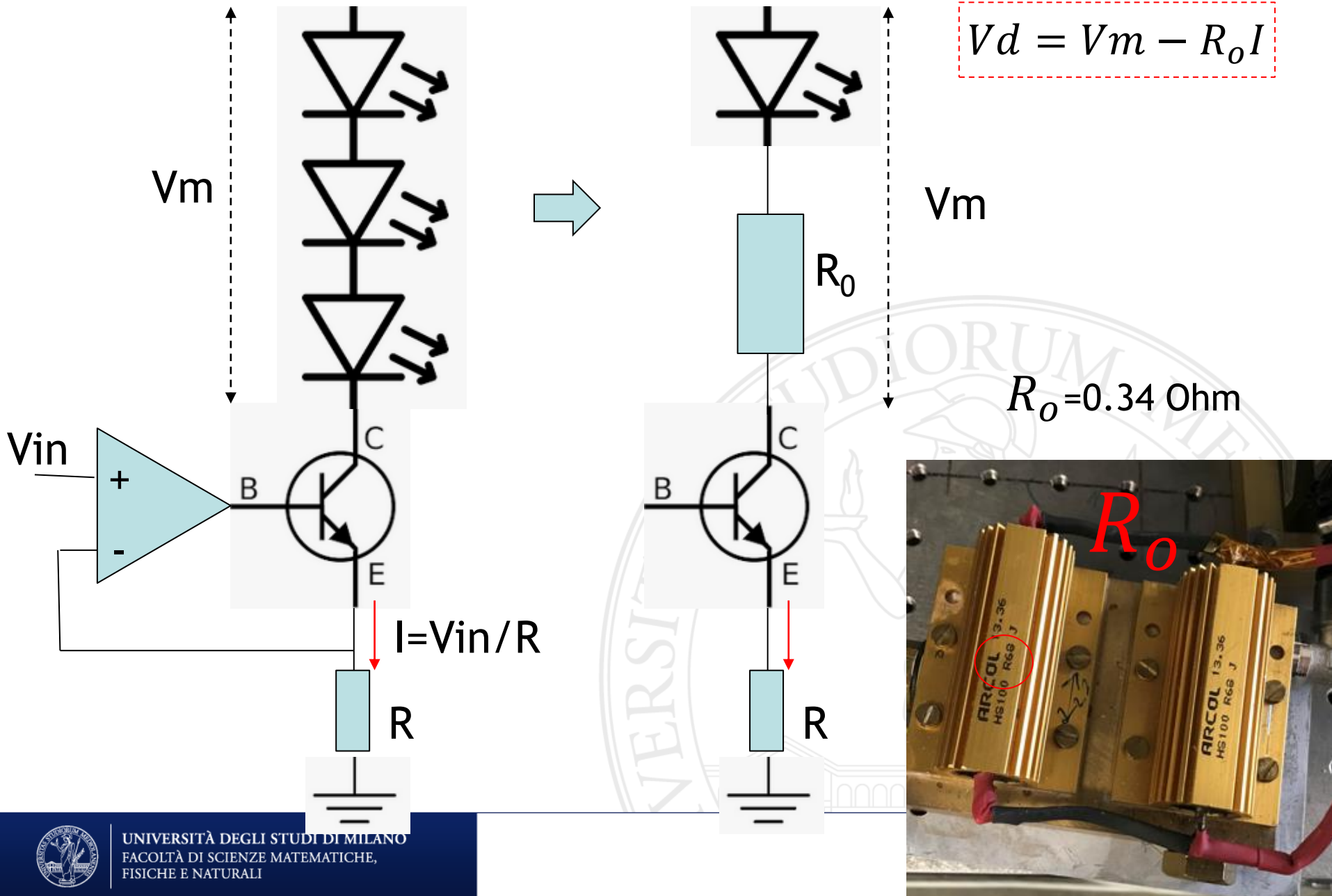
Gli array di diodi come quello usato per pompare il Nd:YAG suddivisi in barre e ognuna di queste barre è formata da moltissimi laser a diodo come si vede nella figura sotto.



La distanza tra i singoli laser è dell'ordine del centinaio di μm .

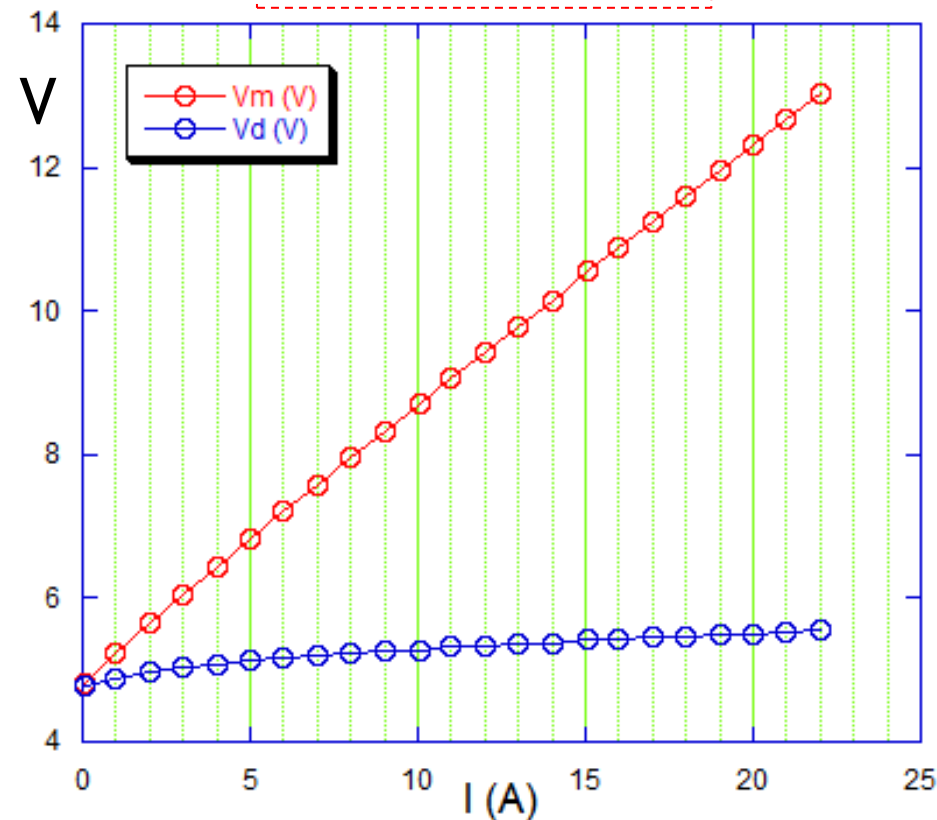


Misura della tensione dei diodi di pompa



Differenza di potenziale ai capi del diodo

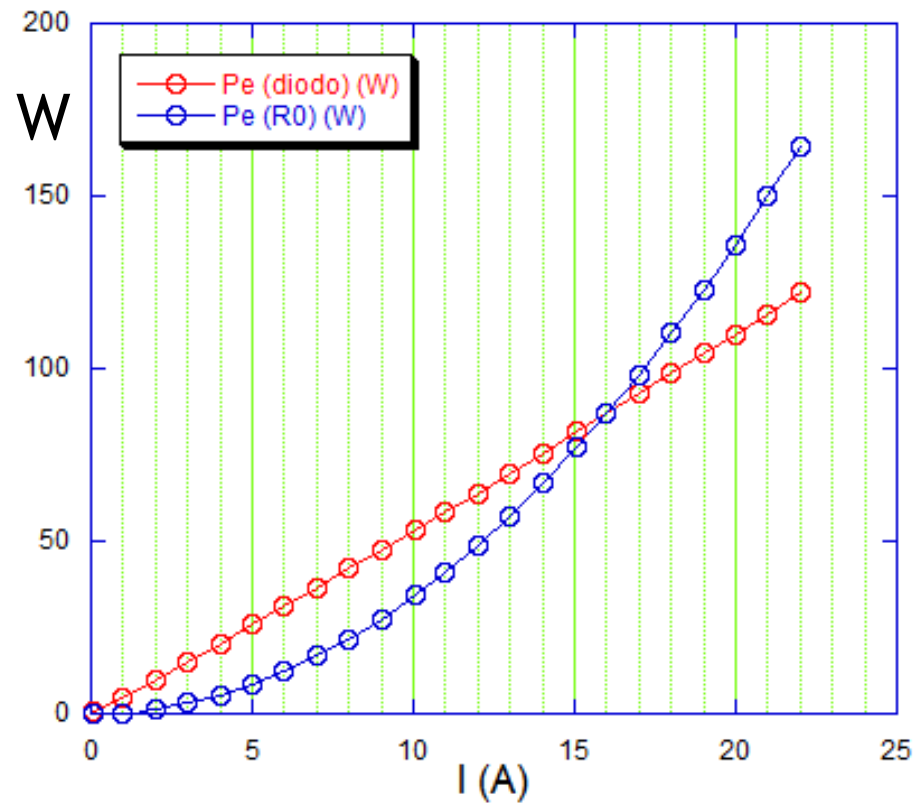
$$V_d = V_m - R_o I$$



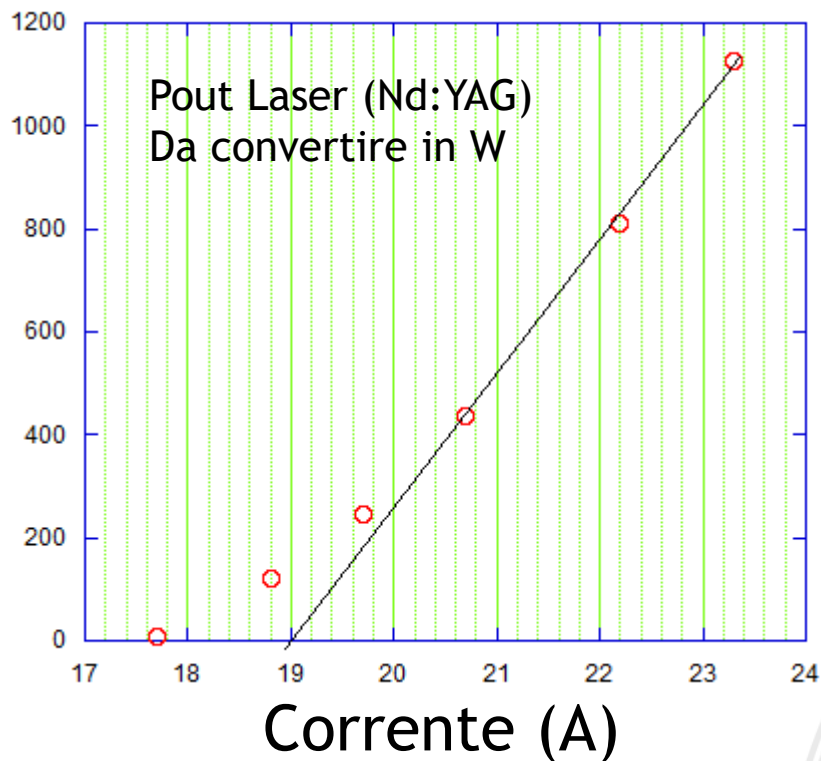
Potenza elettrica assorbita dal diodo e dalla resistenza

$$P_e(\text{diodo}) = V_d \cdot I \propto I$$

$$P_e(R_o) = V_R \cdot I \propto I^2$$



Pout Nd:YAG

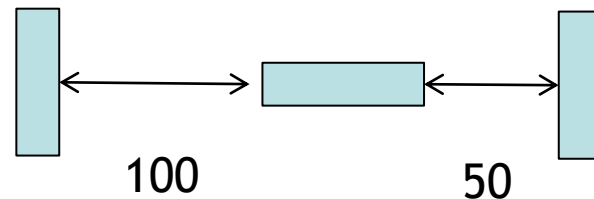


Approssimativamente posso scrivere:

$$P_{out} = A \left(\frac{I - I_{th-D}}{I_{th-Nd:YAG} - I_{th-D}} - 1 \right)$$

T=90%

R=224



$$P_{out} = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma} \right) \frac{\gamma_1}{2} S \left(\frac{P_p}{P_{p(soglia)}} - 1 \right)$$

Nella zona di interesse:

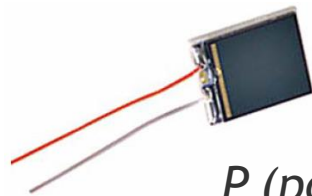
$$P_p \propto I - I_{th-D}$$

Dove:

$$I_{th-D} \sim 8A$$

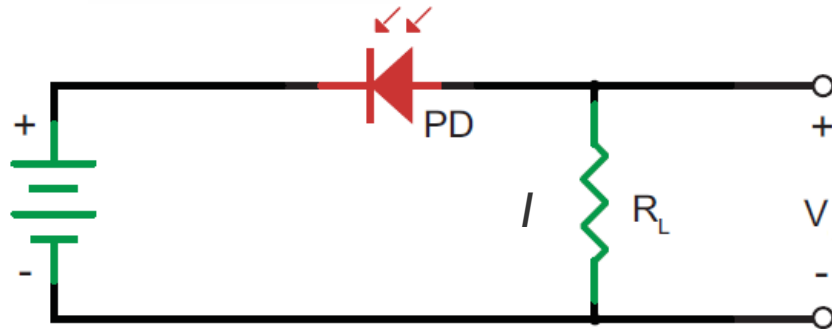
$$I_{th-Nd:YAG} \sim 19A$$

Power Meter



FDS1010

P (potenza della radiazione)



Posso considerare il fotodiodo come un generatore di corrente.

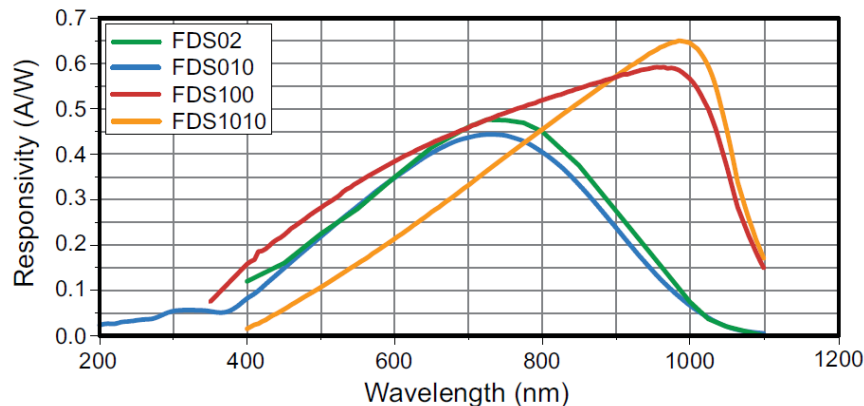
La corrente (elettroni che attraversano il conduttore nell'unità di tempo) è proporzionale alla potenza (numero di fotoni che arriva nell'unità di tempo)

$$I = \mathfrak{R} P$$

Dunque per la legge di Ohm:

$$V = R_L I = (\mathfrak{R} R_L) P$$

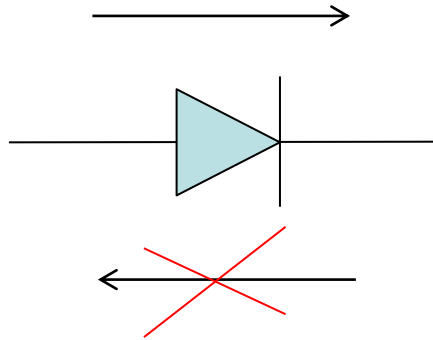
FDS Series Photodiode Responsivity



\mathfrak{R}



Un veloce richiamo sul funzionamento del diodo e quindi del fotodiodo:

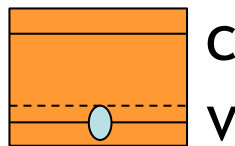


Il diodo permette il passaggio della corrente in un solo verso: dall'anodo verso il catodo.



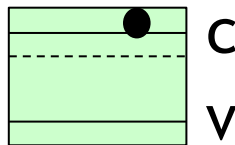
Il diodo è formato dalla giunzione di due parti: una fatta di semiconduttore di tipo p e l'altra di semiconduttore di tipo n.

Tipo-p



Il semiconduttore di tipo p (ad esempio Silicio drogato con Indio) è caratterizzato da livelli accettori situati poco sopra la banda di valenza. Abbiamo quindi buche (in azzurro) in banda di valenza dovute agli elettroni eccitati nei livelli accettori

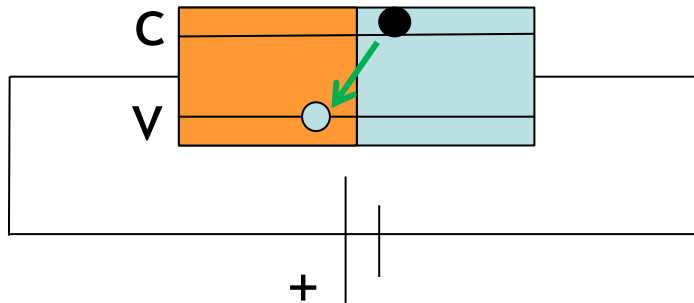
Tipo-n



Il semiconduttore di tipo n (ad esempio Silicio drogato con Arsenico) è caratterizzato da livelli donori situati poco sotto la banda di conduzione. Abbiamo quindi elettroni in banda di conduzione.

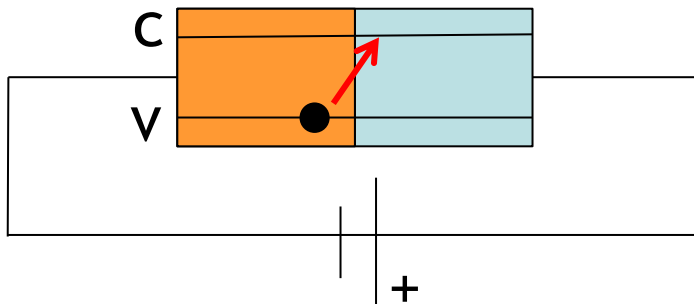
Che succede quando uniamo questi due tipi di semiconduttore?

Polarizzazione diretta



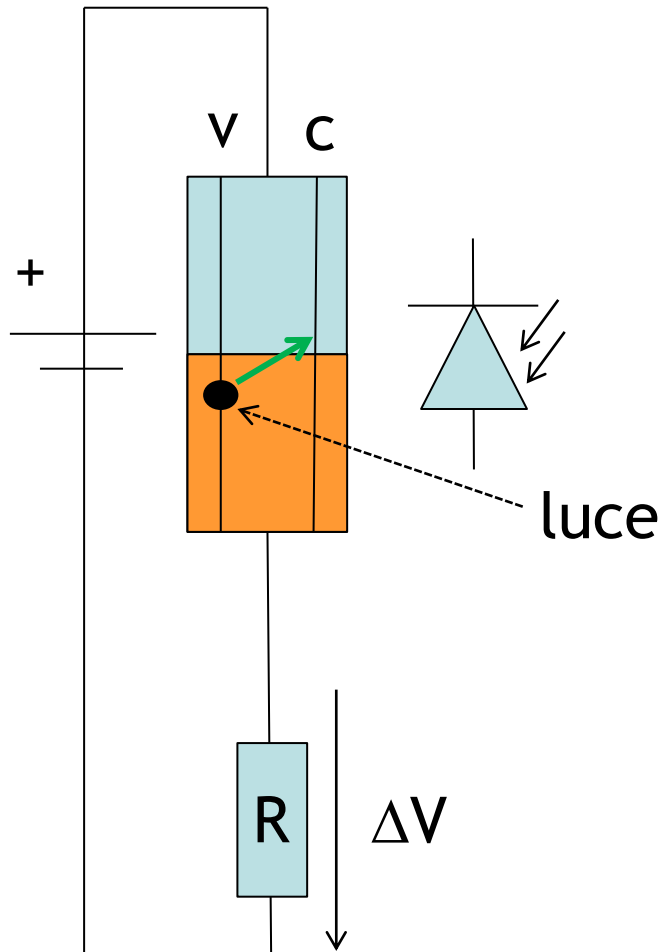
In questo caso gli elettroni che escono dal polo negativo dell'alimentatore attraversano la banda di conduzione del semiconduttore n e in prossimità della giunzione «cadono» nelle buche del semiconduttore p. Poiché la banda di valenza non è piena, da questa gli elettroni possono arrivare fino al polo positivo dell'alimentatore. Dunque, la conduzione in questo verso è possibile.

Polarizzazione inversa



In questo caso gli elettroni che escono dal polo negativo attraversano la banda di valenza del semiconduttore p ma poi non hanno l'energia per «saltare» fino alla banda di conduzione del semiconduttore n. Quindi la conduzione di corrente in questo verso non è possibile.

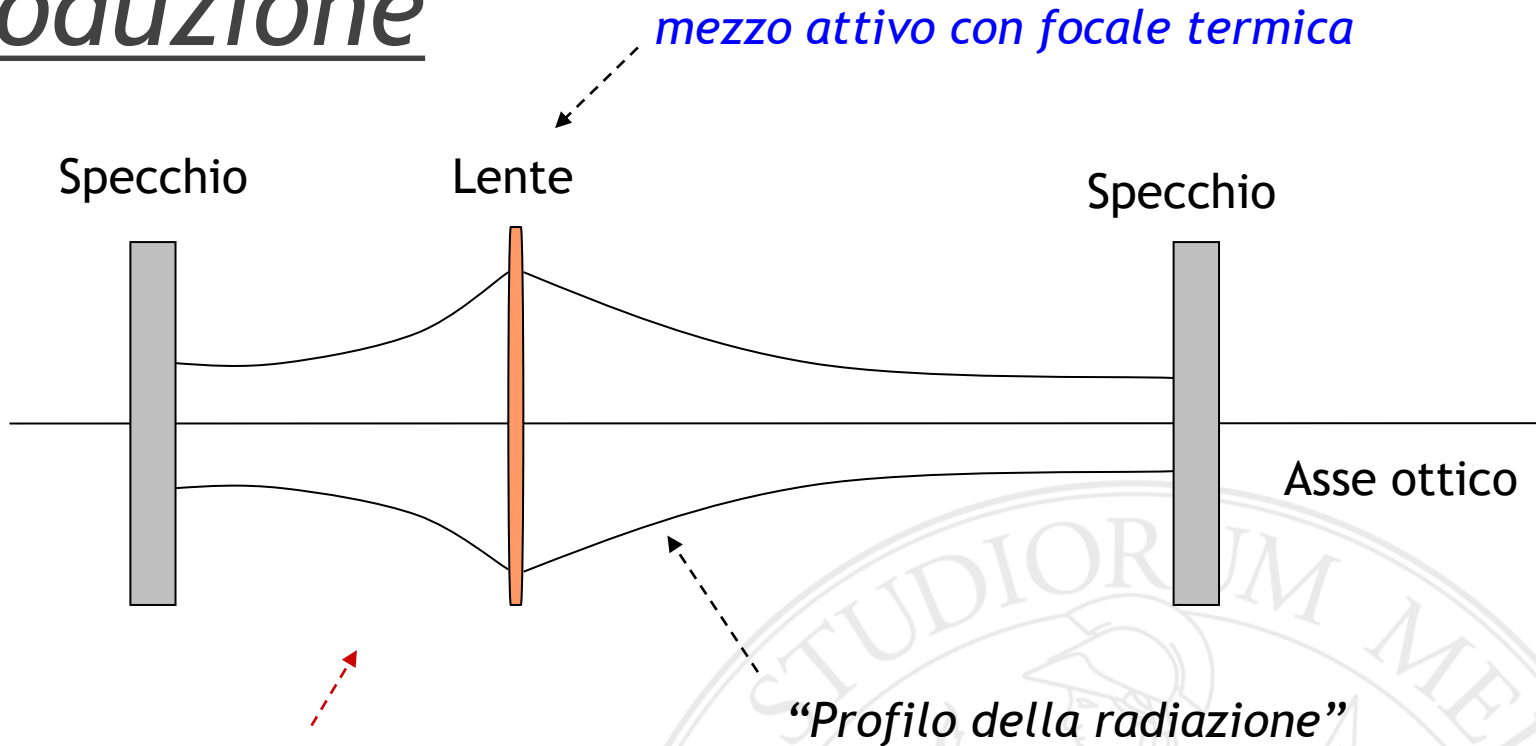
Il fotodiodo di base è un diodo dotato di una finestra per far arrivare la luce direttamente sul semiconduttore di tipo p. Questo dispositivo elettronico può essere usato in polarizzazione inversa come power meter:



L'elettrone in banda di valenza può essere eccitato dalla luce e quindi acquistare l'energia necessaria per arrivare alla banda di conduzione. Dunque abbiamo una relazione lineare tra corrente (numero di elettroni al secondo) e potenza della luce (numero di fotoni al secondo). Inoltre per la legge di Ohm abbiamo anche una relazione lineare tra la potenza della luce e la differenza di potenziale ai capi della resistenza R

$$\Delta V = R I = R \cdot \mathfrak{R} \cdot P$$

Introduzione



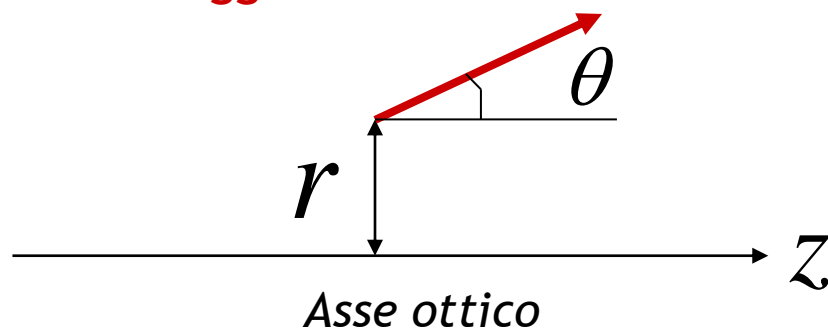
Esempio di cavità LASER

- *Quali condizioni deve soddisfare una cavità per essere stabile?*
- *Come si calcola la dimensione dello spot all'interno della cavità?*
- *Quali frequenze sono supportate dalla cavità?*

Formalismo ABCD dell'ottica geometrica

Il primo strumento matematico utile per studiare le cavità è il formalismo ABCD dell'ottica geometrica. Ovvero, per ogni elemento ottico abbiamo una matrice 2x2 che ci dice come si trasforma il raggio ottico.

Raggio ottico



$$V = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}$$

Approx. parassiale:

$$\theta \approx \frac{dr}{dz} = r'$$

Elemento ottico:

(lente, spazio libero, specchio ...)

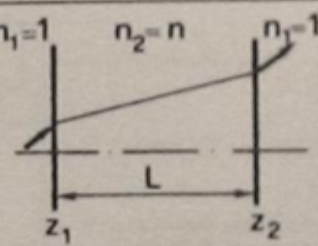
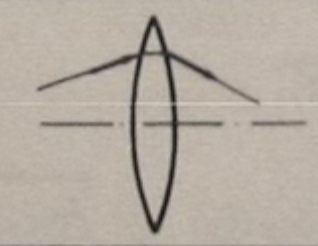
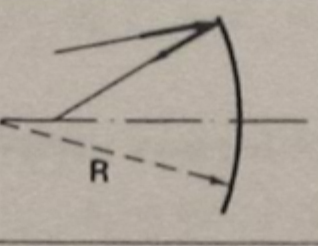
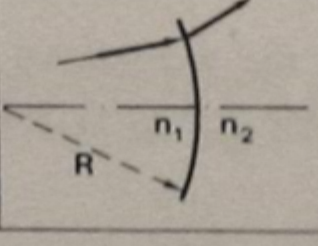
La matrice ABCD mi permette di scrivere il raggio ottico dopo l'elemento ottico

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$V_{out} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot V_{in}$$



Matrici ABCD per diversi elementi ottici

Free-space propagation		$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Thin lens		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical mirror		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical dielectric interface		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2} & \frac{1}{R} \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Esercizio

Notare che la lunghezza effettiva diminuisce all'aumentare dell'indice di rifrazione

$f > 0$ se la lente è convergente

$R > 0$ se lo specchio è concavo per il raggio che arriva da sinistra

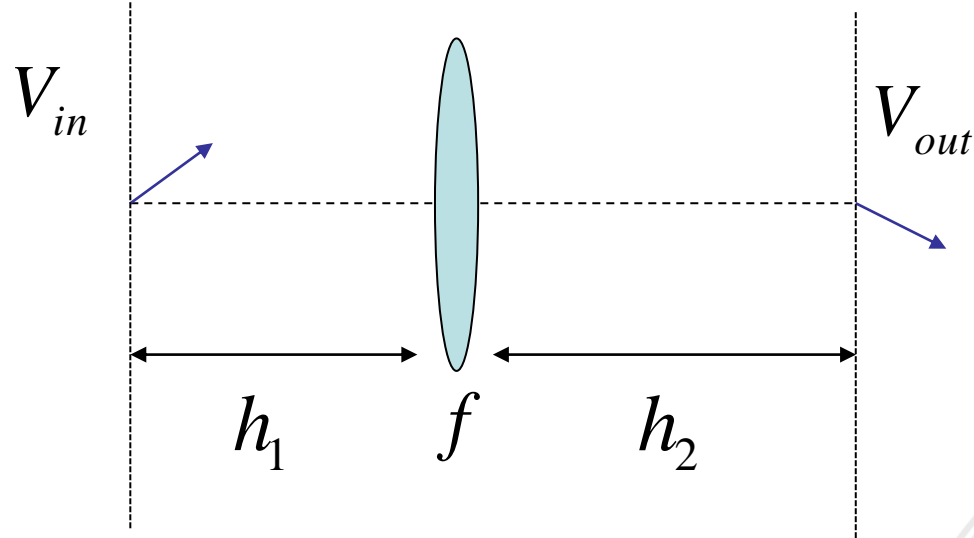
Se $n_{in} = n_{out}$ abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC = 1$$

Questo ci servirà nel seguito



Prodotto di matrici ABCD



Nel caso di più elementi ottici devo moltiplicare le matrici disponendole da destra verso sinistra

$$V_{out} = \begin{pmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot V_{in}$$

A red dashed arrow points left from the matrix equation, indicating the order of multiplication from right to left.

Algebra delle matrici:

Non vale la proprietà commutativa

Vale la proprietà associativa

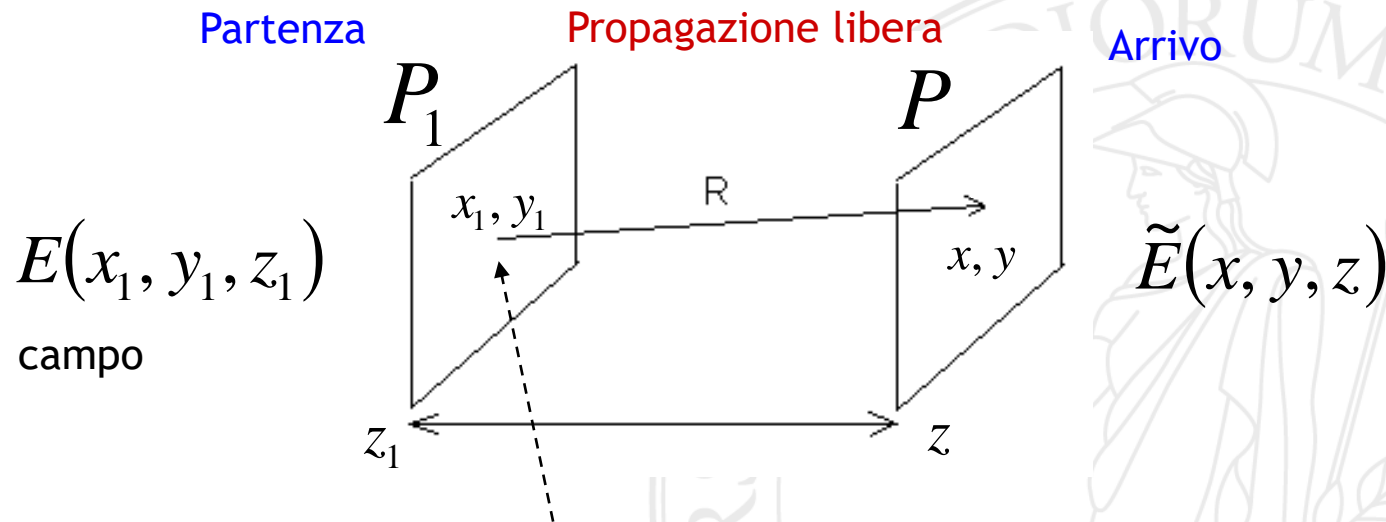
$$\text{Det}(M_1 M_2) = \text{Det}(M_1) \text{Det}(M_2)$$



Integrale di Huygens

Come vedremo tra poco la formulazione matriciale dell'ottica geometrica ci servirà per scrivere la propagazione della radiazione in un sistema qualsiasi di elementi ottici.

Ma prima dobbiamo aggiungere la natura ondulatoria della luce. Per fare questo diciamo che ogni punto su un piano è la sorgente di un'onda sferica e non di un solo raggio ottico.



Ogni punto x_1, y_1 è la sorgente di un'onda sferica che si propaga sul piano P (quindi su tutti i punti x, y accessibili)

Quanto detto dal punto di vista matematico si traduce in un integrale:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \iint dx_1 dy_1 G(x, x_1, y, y_1, z, z_1) E(x_1, y_1, z_1)$$

↗ ↖

input

Contributo dell'onda sferica che
parte da x_1, y_1 nel punto x, y

$$G = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikR}}{R} \quad R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \approx (z-z_1) + \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2(z-z_1)}$$

Onda sferica

Approx. parassiale

Sostituendo si ottiene:

$$\tilde{E}(x, y, z) \approx \frac{i}{\lambda(z-z_1)} e^{-ik(z-z_1)} \iint dx_1 dy_1 E(x_1, y_1, z_1) e^{-ik \left[\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2(z-z_1)} \right]}$$



Integrale di Huygens generalizzato

Che succede se faccio propagare il campo attraverso un sistema ottico caratterizzato da una matrice ABCD?

$$E(x_1, y_1, z_1) \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right] \tilde{E}(x, y, z)$$

Si ottiene:

$$\tilde{E}(x, y, z) \approx \frac{i}{\lambda B} e^{-ik(z-z_1)} \iint dx_1 dy_1 E(x_1, y_1, z_1) e^{-ik \left[\frac{A(x_1^2 + y_1^2) + D(x^2 + y^2) - 2x_1x - 2y_1y}{2B} \right]}$$

Approx. parassiale

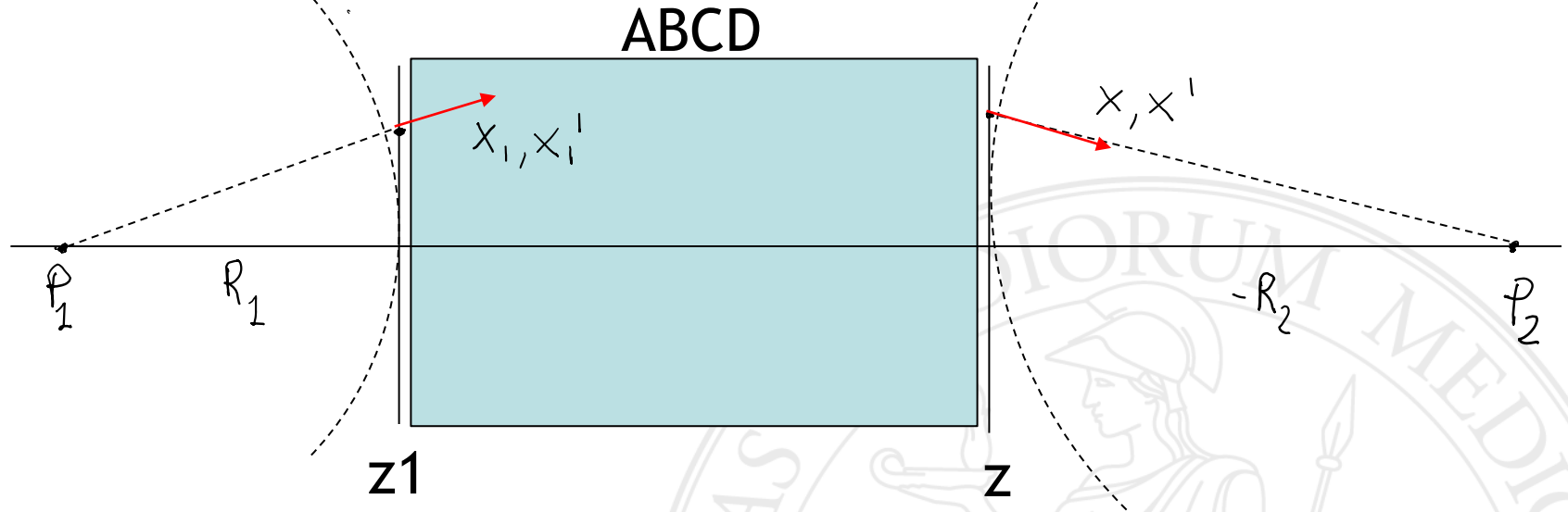
Nota: nel caso della sola lente l'integrale non fornisce il risultato corretto (C non compare) ma in questo caso non sono valide le approssimazioni fatte per scrivere l'integrale



Dimostrazione: dobbiamo dimostrare che il percorso ottico tra il piano di partenza e quello di arrivo è

$$g(x_1, x, y_1, y) = \left[\frac{A(x_1^2 + y_1^2) + D(x^2 + y^2) - 2x_1x - 2y_1y}{2B} \right] + z - z_1$$

La dimostrazione consiste nel trovare i piani principali e applicare il principio di Fermat (ci limitiamo alla singola coordinata x e poi estendiamo a x,y)



Premessa: il campo elettrico in ingresso e in uscita sono caratterizzati da un raggio di curvatura

$$R_1 = \frac{x_1}{x'_1} = \frac{B x_1}{x - A x_1} ; \quad R_2 = \frac{x}{x'} = \frac{B x}{D x - x_1}$$

Nota: se il punto immagine P2 è oltre il secondo piano allora $R_2 < 0$



I due punti P1 e P2 si trovano su due piani coniugati e quindi il cammino ottico che li congiunge è lo stesso per tutti i raggi che escono da P1 e arrivano a P2 (principio di [Fermat](#))

Quindi posso scrivere che il percorso che congiunge direttamente P1 e P2 è uguale a quello che passa per x_1 e x , ovvero:

$$R_1 + (z - z_1) - R_2 = \sqrt{R_1^2 + x_1^2} + g(x_1, x) + \sqrt{R_2^2 + x^2}$$

Sostituendo in R_1 e R_2 i valori trovati per mezzo della matrice ABCD si trova il risultato applicando l'approssimazione parassiale, ovvero:

$$\sqrt{R_1^2 + x_1^2} \approx R_1 + \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{R_1} \quad ; \quad \sqrt{R_2^2 + x^2} \approx |R_2| + \frac{1}{2} \frac{x^2}{|R_2|}$$

Attenzione al valore assoluto



Autofunzioni della propagazione ABCD

Ci chiediamo se esistono dei campi che rimangono funzionalmente uguali quando attraversano un sistema ottico ABCD, ovvero, se esistono delle autofunzioni dell'integrale di Huygens generalizzato. La risposta è sì e nel caso a simmetria cilindrica sono i modi di **Laguerre-Gauss**

Numero complesso(autovalore)

$$\frac{i}{\lambda B} e^{-ik(z-z_1)} \iint dx_1 dy_1 E_{p_1}(x_1, y_1, z_1) e^{-ik \left[\frac{A(x_1^2 + y_1^2) + D(x^2 + y^2) - 2x_1 x - 2y_1 y}{2B} \right]} = \sigma E_p(x, y, z)$$

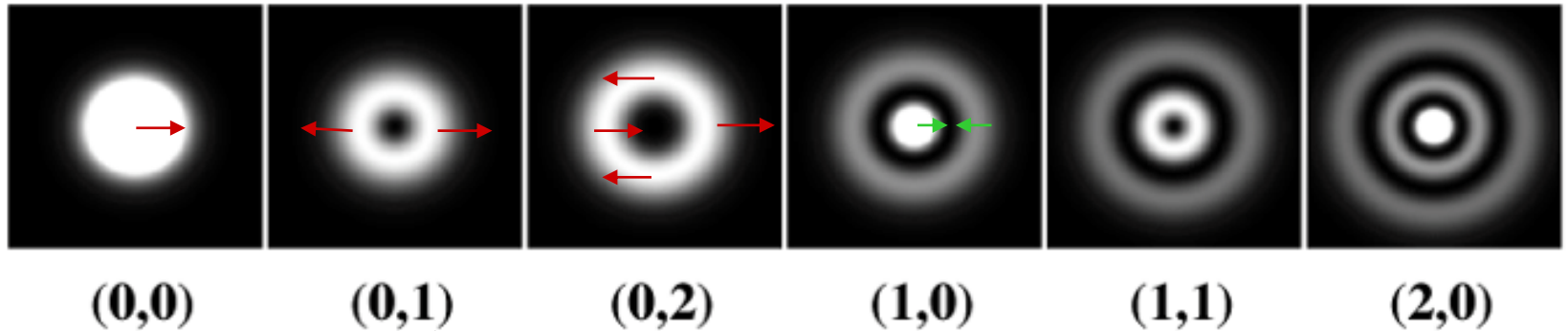
Stessa funzione



Modi di Laguerre-Gauss

Gaussiano

LG
(p,l)



Indice angolare

Indice radiale

L'indice angolare può essere anche negativo

Indice longitudinale

$$E_{n,p,l}(r, \phi, z) = \frac{C_{p,l}}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}r^2}{w(z)} \right]^{|l|} L_p^{(|l|)} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{-ik_{n,p,l} \frac{r^2}{q(z)}} e^{-il\phi} e^{+i(2p+|l|+1)\zeta(z)}$$

$$L_p^{(|l|)} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \quad \text{Polinomio di Laguerre modificato}$$

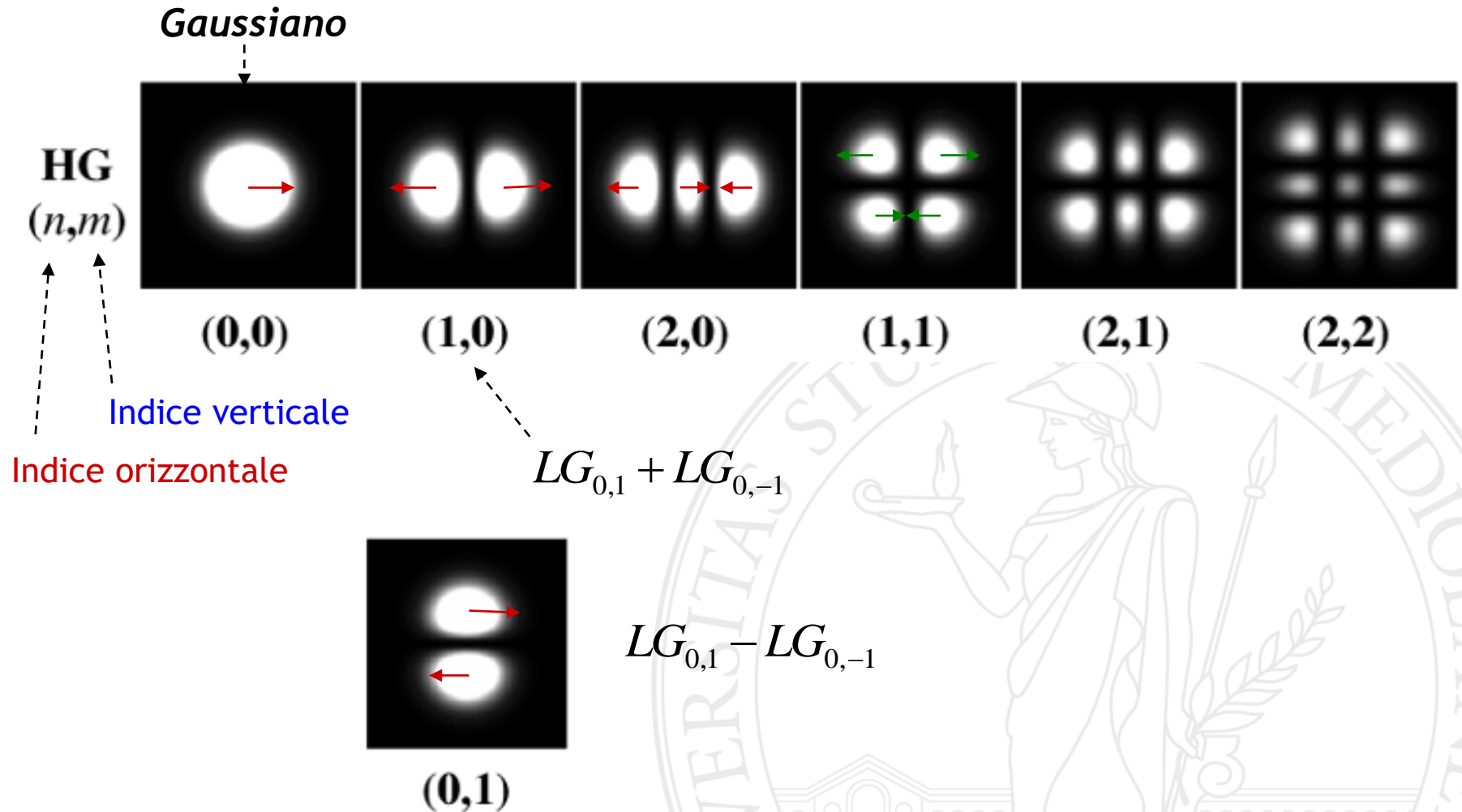
q è il raggio di curvatura complesso

$$\text{LagM}(l, p, x) := (-1)^{|l|} \cdot \frac{d^{|l|}}{dx^{|l|}} \text{Lag}(p + |l|, x)$$



Modi di Hermite-Gauss

Se la simmetria cilindrica viene rotta e abbiamo una simmetria rettangolare allora conviene usare i modi di **Hermite-Gauss**



Propagazione delle autofunzioni

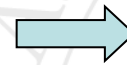
Per propagare dobbiamo sapere in che modo viene trasformato il raggio di curvatura complesso q :

Raggio di curvatura complesso

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

Il significato fisico sarà evidente quando analizzeremo la propagazione del modo fondamentale gaussiano

Sostituendo l'autofunzione nell'integrale di Huygens generalizzato si ottiene (P.A. Belanger, Opt. Lett. 16, 4 (1991) 196):



$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Da notare che nell'integrale C non compare ma abbiamo che $AD - CD = 1$...

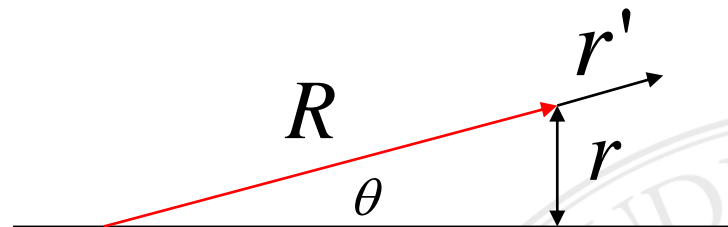
Propagazione dal piano ($z=z_1$) fino al piano ($z=z_2$)



Dimostrazione intuitiva:

$$R = \frac{r}{r'}$$

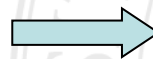
Raggio di curvatura reale



Dato un sistema ottico ABCD abbiamo:

$$r_2 = Ar_1 + Br_1'$$

$$r_2' = Cr_1 + Dr_1'$$



Dalla definizione
di R ottengo

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}$$

Separando la parte reale e immaginaria di q_2 ottengo la propagazione per w_2 e R_2 :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + \frac{D}{q_1}}{A + \frac{B}{q_1}} \qquad \frac{1}{q} \stackrel{df}{=} \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} w_2 = \sqrt{\left(A + \frac{B}{R_1}\right)^2 w_1^2 + \left(\frac{\lambda B}{\pi}\right)^2 \frac{1}{w_1^2}} \\ \frac{1}{R_2} = \frac{\left(C + \frac{D}{R_1}\right)\left(A + \frac{B}{R_1}\right) + \left(\frac{\lambda}{\pi w_1^2}\right)^2 BD}{\left(A + \frac{B}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda B}{\pi w_1^2}\right)^2} \end{array} \right.$$

*Queste sono
equazioni
importanti che
useremo*



Modo gaussiano

Considero il modo fondamentale $p=0$ e $l=0$

$$E(r, \phi, z) = E_o \frac{w_0}{w(z)} e^{-ikz + i\zeta(z)} e^{-ik \left[\frac{r^2}{2q} \right]}$$

Scrivo in modo esplicito il raggio di curvatura complesso: $\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}$

$$E(r, \phi, z) = E_o \frac{w_0}{w(z)} e^{-ikz + i\zeta(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{-i \frac{k}{2R} r^2}$$

Profilo gaussiano dell'ampiezza

Curvatura del fronte di fase

Guoy phase shift $\phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad z_R = \frac{\pi w_o^2}{\lambda}$

S.Feng et al., Opt. Lett. 26, 8 (2001) 485: questo termine di fase ha origine dal principio di indeterminazione. Il confinamento spaziale implica un impulso trasverso e dunque il “ k ” della propagazione lungo z va modificato...



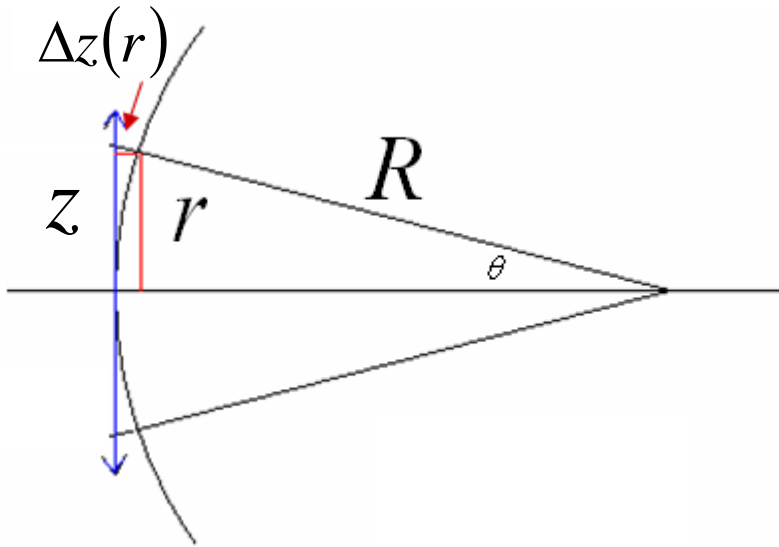
Profilo gaussiano:

$$E \propto e^{-\left[\frac{x^2+y^2}{w^2}\right]} \quad \longrightarrow \quad I \propto e^{-\left[\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]}$$

La larghezza a metà altezza (FWHM) dell'intensità è:

$$\Delta w = \sqrt{2 \ln 2} w \approx 1.177 w$$

Variazione radiale della fase:



$$\begin{aligned} -k \cdot \Delta z(r) &= -k \cdot (R - R \cos(\theta)) \\ &\approx -k \cdot \left(R - R \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{k}{R} r^2 \end{aligned}$$

$$R > 0$$

Diverge

$$R < 0$$

Converge



Propagazione del modo gaussiano

Propagazione nel vuoto

Dalle eq. di propagazione (pg. 28) ponendo R iniziale infinito si ottiene:

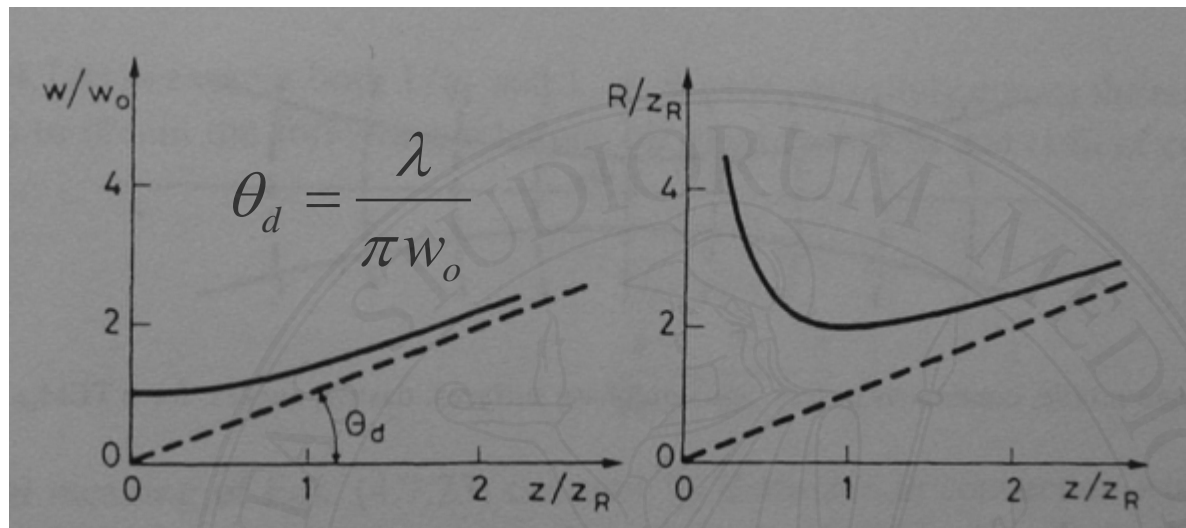
$$w(z) = w_o \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$$
$$R(z) = \frac{z_R^2}{z} \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]$$

$$z_R = \frac{\pi w_o^2}{\lambda}$$

Rayleigh range

Condizione iniziale:

$$\frac{1}{q_1} = -i \frac{\lambda}{\pi w_o^2}$$



Nel caso di $\lambda = 1064 \text{ nm}$

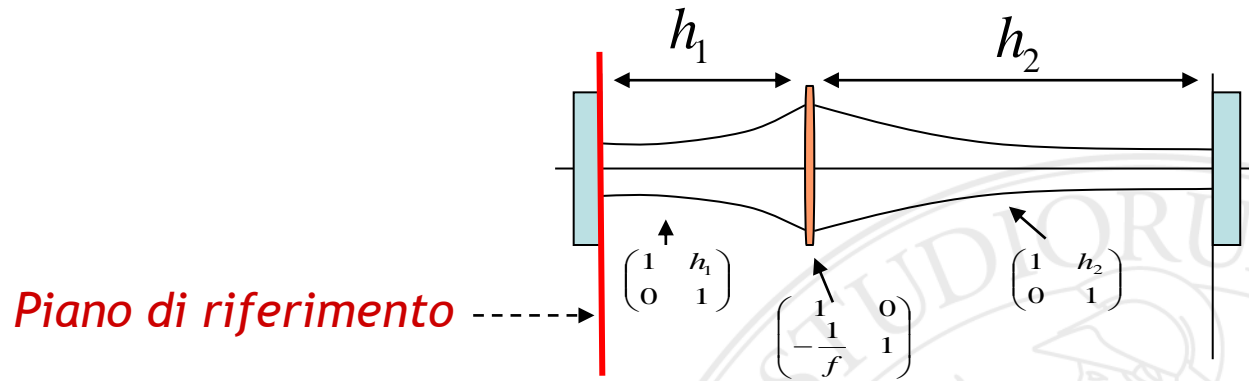
$$z_R(w_0 = 1 \text{ mm}) \approx 3 \text{ m}$$

$$z_R(w_0 = 0.1 \text{ mm}) \approx 30 \text{ mm}$$



Modi di una cavità ottica

Devo trovare le autofunzioni dell'integrale di Huygens generalizzato con ABCD uguale alla matrice di round-trip della cavità



$$M_{rt} = \begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Matrice di round-trip

Quindi devo imporre:

$$\tilde{E}(x, y, 2L) = \frac{i}{\lambda B} e^{-ik(2L)} \iint dx_1 dy_1 E(x_1, y_1, 0) e^{-ik \left[\frac{A(x_1^2 + y_1^2) + D(x^2 + y^2) - 2x_1 x - 2y_1 y}{2B} \right]}$$

Lunghezza effettiva della cavità

A, B, C, D sono gli elementi della matrice di round-trip

Inoltre devo aggiungere la **condizione di ciclicità**

$$\tilde{E}(x, y, 2L) = \tilde{\sigma} E(x, y, 0)$$

$$\tilde{\sigma} = |\tilde{\sigma}| e^{i\psi}$$

$$\psi = 2\pi m$$

Quindi è chiaro che i modi di LG sono anche i modi della cavità ma in più ho che la dimensione e le frequenze di questi modi sono vincolati dalla condizione di ciclicità



Criterio di stabilità di una cavità

Data la condizione di ciclicità non tutte le matrici ABCD permettono di ottenere autofunzioni. Quando questo è possibile la cavità si dice “stabile”

Per il raggio di curvatura complesso dopo un round-trip devo imporre

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad \Rightarrow \quad Cq^2 + (D - A)q - B = 0$$

Devo imporre che la parte immaginaria del raggio di curvatura complesso sia diversa da zero (quindi w finito)

$$q \text{ complesso} \quad \Rightarrow \quad (D - A)^2 + 4BC < 0$$

Inoltre (pg. 8,9)

$$\text{Det}(M_{ABCD}) = 1 \quad \Rightarrow \quad BC = AD - 1$$

$$\left| \frac{A + D}{2} \right| < 1$$

**Condizione di
stabilità**



w_o e R sul piano di riferimento

$$q(z_{rif}) = \frac{Aq(z_{rif}) + B}{Cq(z_{rif}) + D} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

Se scrivo separatamente la parte reale e quella immaginaria ottengo lo spot e il raggio di curvatura reale sul piano di riferimento:

$$\begin{cases} w(z_{rif}) = \sqrt{\frac{|B|\lambda}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{1-m^2}} \\ R(z_{rif}) = \frac{2B}{D-A} \end{cases}$$

Dove m è il parametro di stabilità

$$m \stackrel{df}{=} \frac{A+D}{2}$$



Frequenze dei modi della cavità

Inserendo nell'integrale i modi di LG e imponendo la condizione di ciclicità si ottiene:

$$\nu_{n,p,l} = \frac{c}{2L} \left(n \pm \frac{2p + |l| + 1}{2\pi} \arccos(m) \right)$$

↑
+(-) se $B > 0$ ($B < 0$)

Nel caso di modi di HG con rottura della simmetria cilindrica:

$$\nu_{l,m,n} = \frac{c}{2L} \left(l \pm \frac{m + \frac{1}{2}}{2\pi} \arccos(m_H) \pm \frac{n + \frac{1}{2}}{2\pi} \arccos(m_V) \right)$$

$$\frac{c}{2L} = FSR$$

La distanza tra i modi con diversi indici longitudinali e gli stessi indici trasversi si chiama Free Spectral Range
Il FSR corrisponde all'inverso del tempo di Round-Trip



Physical origin of the Gouy phase shift

$$v_{n,p,l} = \frac{c}{2L} \left(n \pm \frac{2p + |l| + 1}{2\pi} \arccos(m) \right)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \langle k_x^2 \rangle + \langle k_y^2 \rangle + \langle k_z^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \bar{k}_z = \frac{\langle k_z^2 \rangle}{k} = k - \frac{\langle k_x^2 \rangle}{k} - \frac{\langle k_y^2 \rangle}{k} \quad \Rightarrow \quad \phi_G = -\frac{1}{k} \int (\langle k_x^2 \rangle + \langle k_y^2 \rangle) dz$$

$$\begin{aligned} \langle k_x^2 \rangle &= \int k_x^2 |\tilde{f}(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y & \tilde{f}(k_x, k_y) \\ & &= \frac{1}{2\pi} \int f(x, y) e^{ik_x x + ik_y y} \end{aligned}$$

f is a function of z

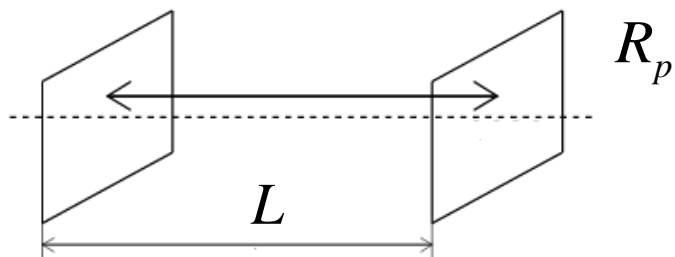
Physical origin of the Gouy phase shift

April 15, 2001 / Vol. 26, No. 8 / OPTICS LETTERS 485

Simin Feng* and Herbert G. Winful



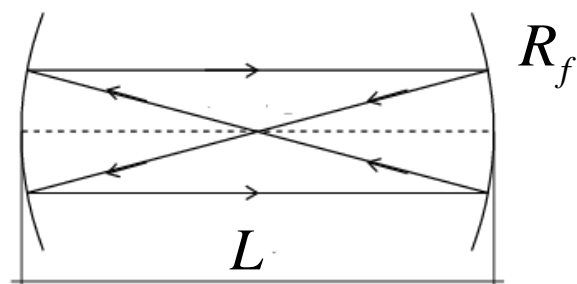
Caratteristiche dei modi in diverse cavità



Cavità piana $R_p = \infty$

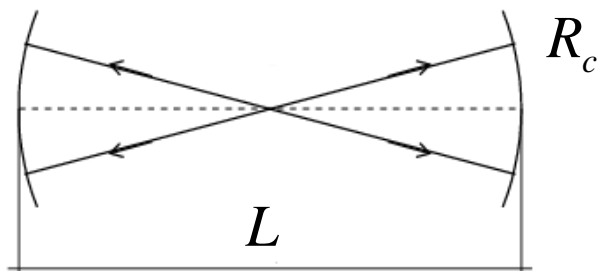
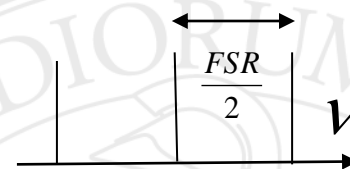
$m=1 \Rightarrow V_{n,p,l}$ non dipende da p, l

$w = \infty$ caso limite



Cavità confocale $R_f = L$

$m=-1 \Rightarrow$



Cavità concentrica $R_c = \frac{L}{2}$

$m=1 \Rightarrow V_{n,p,l}$ non dipende da p, l
 w finito

Questi sono tre casi limite sul bordo della zona di stabilità che ci serviranno come riferimento



Vediamo il caso generale di una cavità simmetrica $R_1 = R_2$

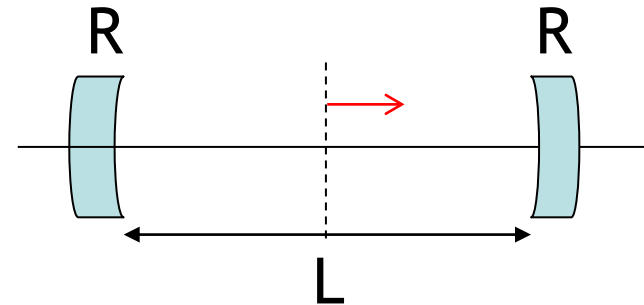
Cavità lunga 1m

$$L := 1$$

$$\lambda := 1.064 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{spazio} := \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{lente}(R) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$



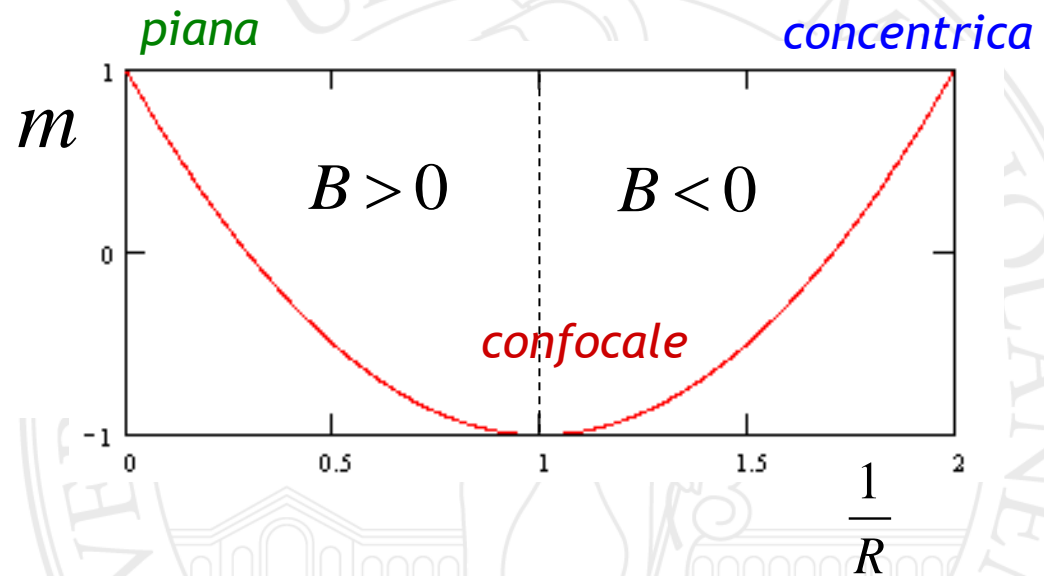
Matrice di round trip con riferimento nel centro della cavità

$$\text{Mrt}(R) := \text{spazio} \cdot \text{lente}(R) \cdot \text{spazio} \cdot \text{spazio} \cdot \text{lente}(R) \cdot \text{spazio}$$

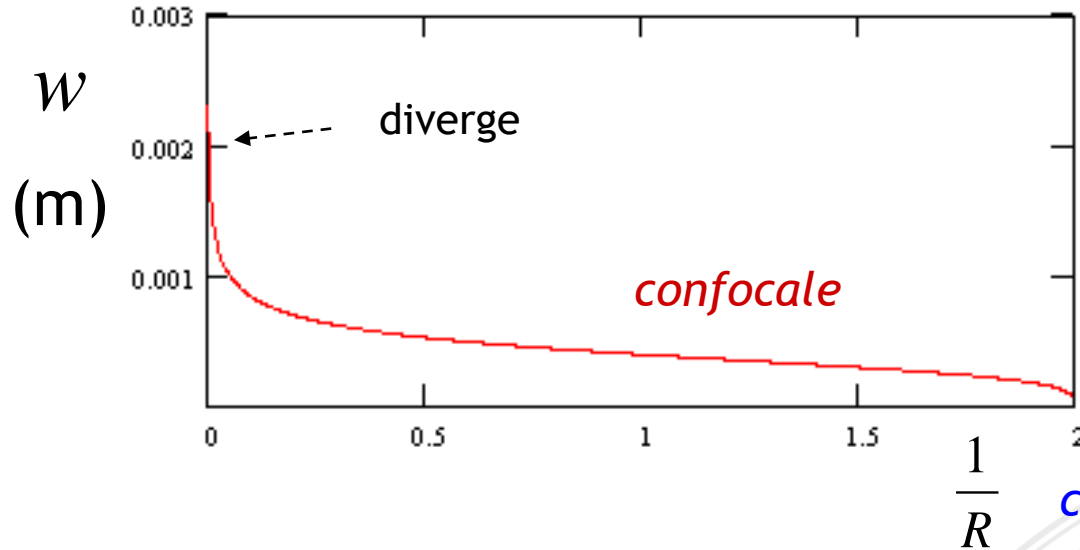
$$m(R) := \frac{\text{Mrt}(R)_{0,0} + \text{Mrt}(R)_{1,1}}{2}$$

$$w(R) := \sqrt{\frac{|\text{Mrt}(R)_{0,1}| \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - m(R)^2}}$$

Spot nel centro della cavità

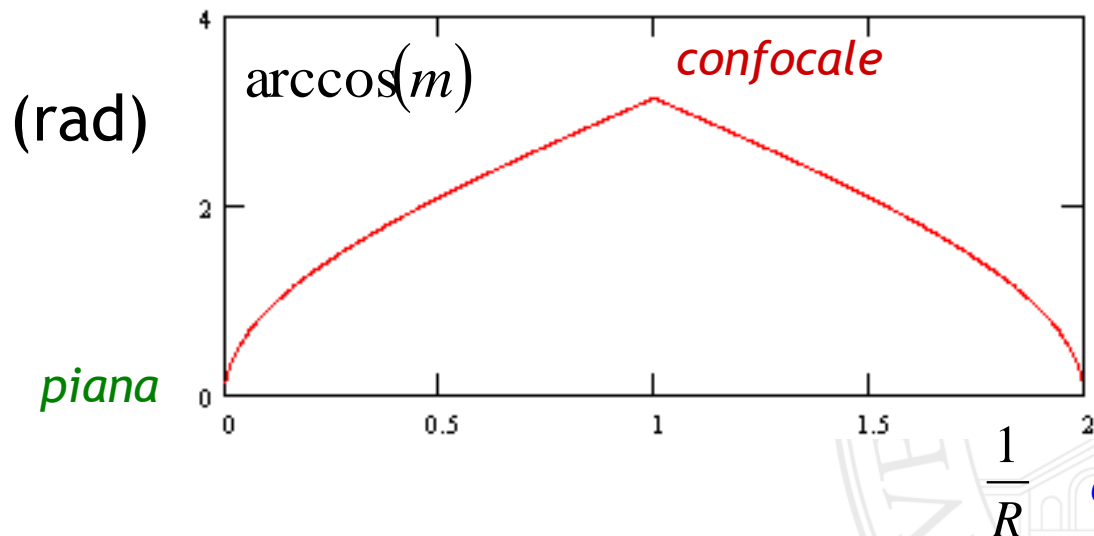


piana



La dimensione dello spot diminuisce andando dalla piana alla concentrica

w è inferiore a 1mm



$$v_{n,p,l} = \frac{c}{2L} \left(n \pm \frac{2p + |l|}{2\pi} \arccos(m) \right)$$

La distanza tra i modi trasversi aumenta andando verso la confocale



Diagramma g1 g2

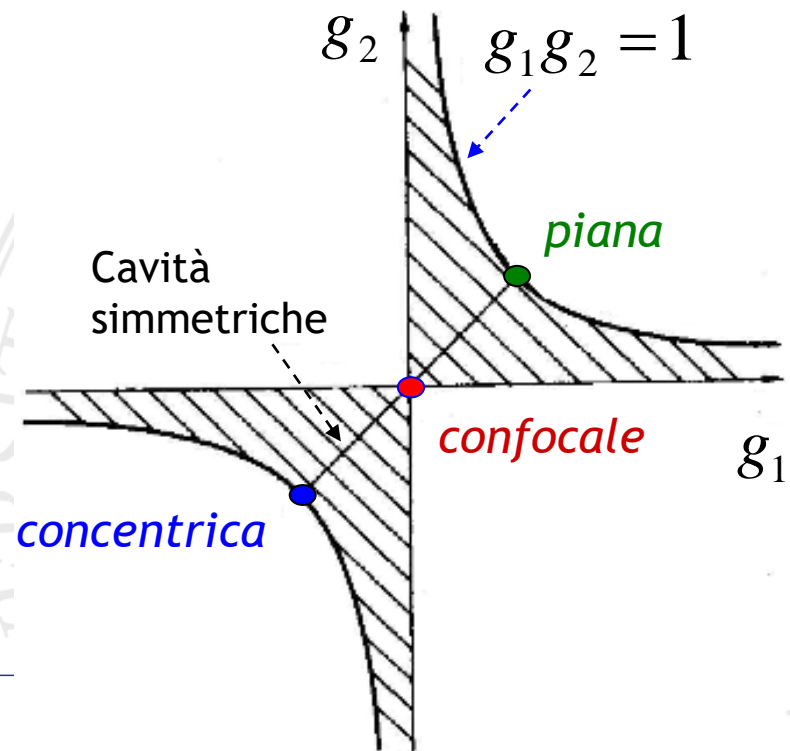
Considero il caso di una cavità di lunghezza L con due specchi R_1 e R_2 e scrivo in modo esplicito il parametro di stabilità:

$$m = \frac{A+D}{2} = 2 \left(1 - \frac{L}{R_1} \right) \left(1 - \frac{L}{R_2} \right) - 1$$

Definisco: $g_{1,2} \stackrel{df}{=} 1 - \frac{L}{R_{1,2}}$

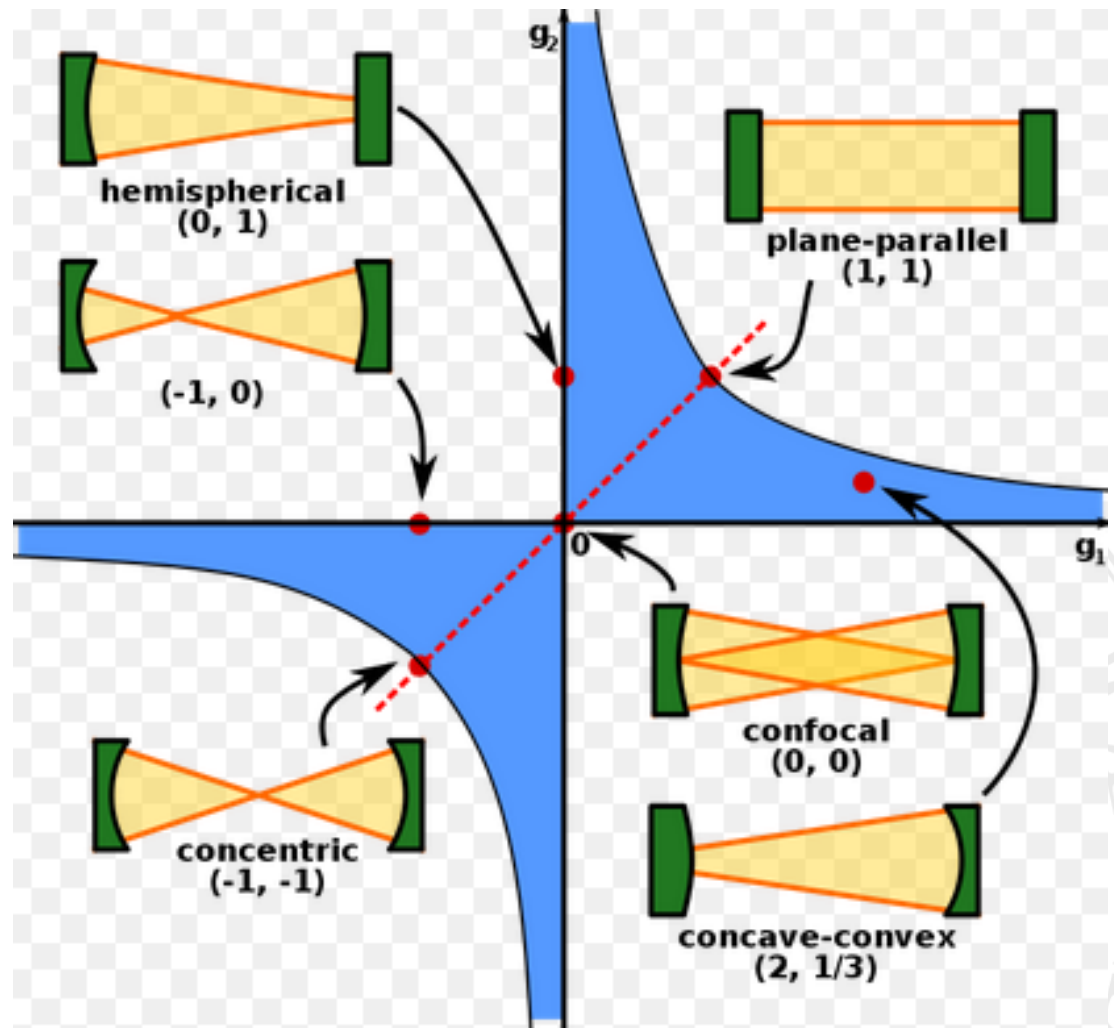
E dalla condizione di stabilità ottengo:

$$0 < g_1 g_2 < 1$$



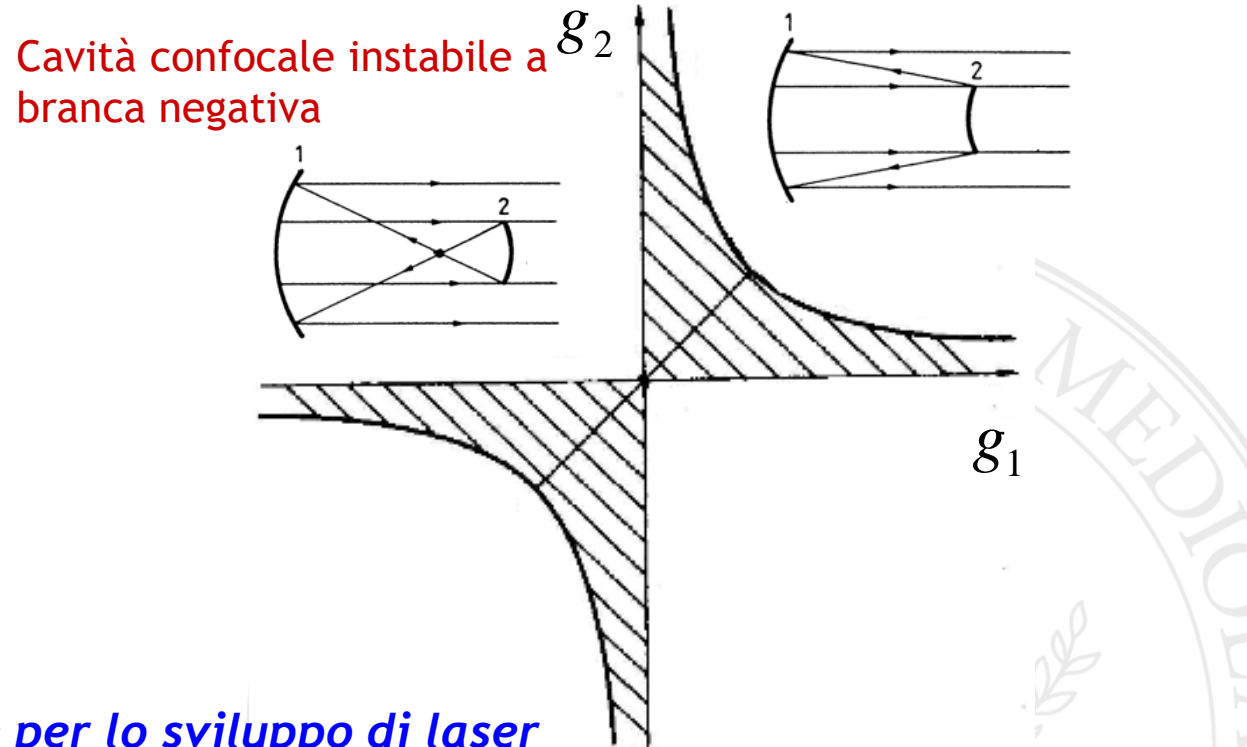
Rispetto al parametro m i parametri g_1 e g_2 sono più “fisici” e permettono di visualizzare più facilmente il tipo di cavità nel diagramma $g_1 g_2$.

Che succede nelle zone dove la cavità non è stabile?



Cavità instabili

Anche una cavità instabile può avere delle autofunzioni

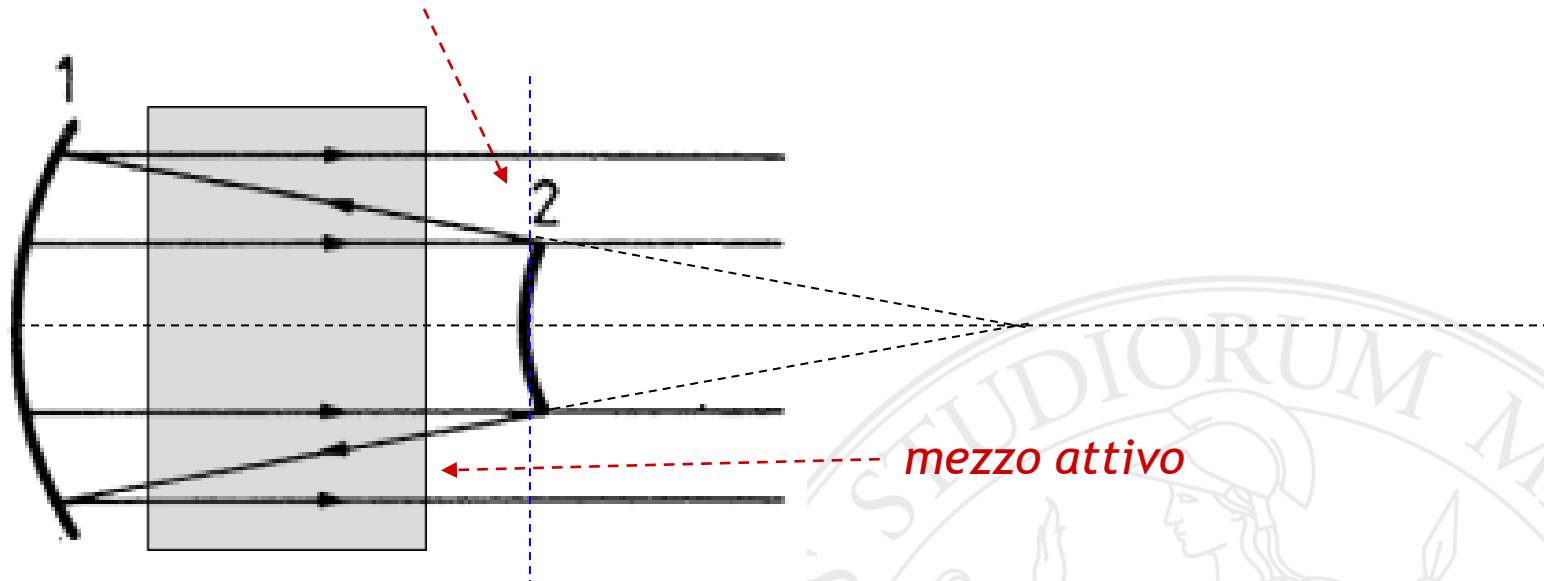


Di particolare interesse per lo sviluppo di laser impulsati ad alta energia sono le cavità instabili confocali a branca positiva



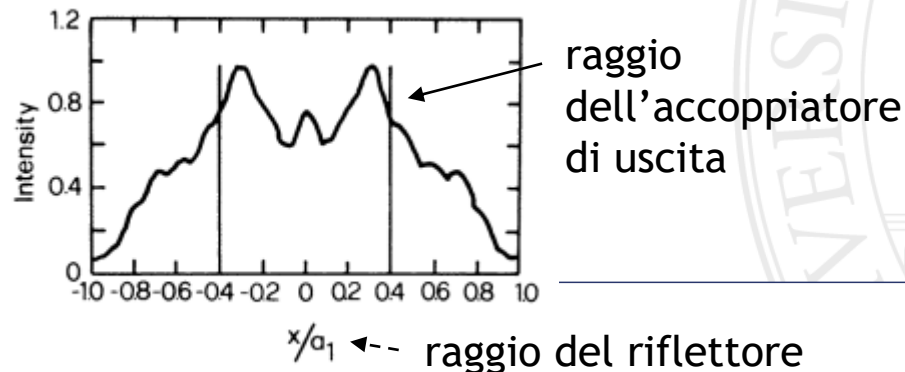
Cavità confocale instabile a branca positiva

L'accoppiatore di uscita è uno specchio riflettente soltanto al centro. La radiazione esce dal laser attraverso un anello (ovvero, ho **alte perdite**)



Modo fondamentale

Appl. Opt. 12, 997 (1973)



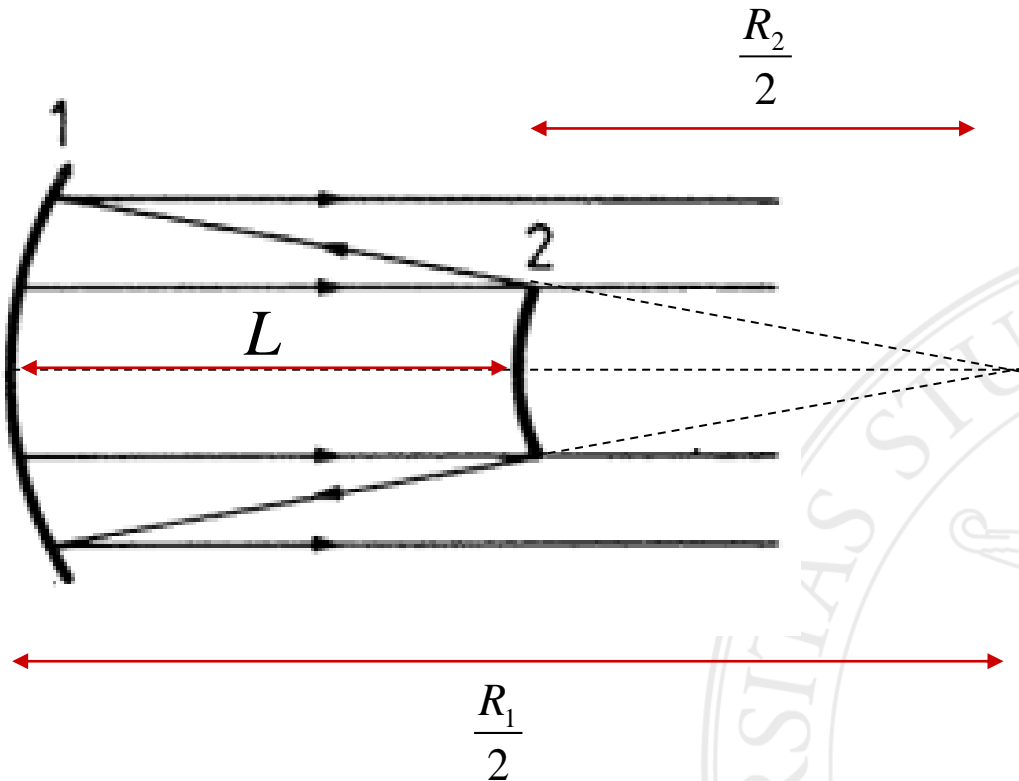
Il modo fondamentale di una cavità instabile lunga 500mm può avere uno spot dell'ordine di 10mm. Ovvero, può sfruttare un mezzo attivo a larga area e dunque generare molta potenza con buona coerenza spaziale.



Esercizio:

Verificare che nel caso di una cavità confocale instabile deve essere

$$(2g_1 - 1)(2g_2 - 1) = 1$$

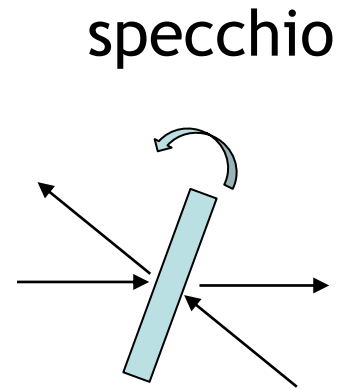
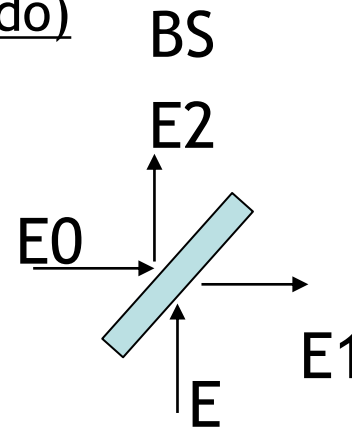


Nota: per migliorare la qualità spaziale di una cavità instabile è possibile usare accoppiatori si uscita con riflettività gaussiana (Svelto pg. 194)

Cavità ottiche (larghezza di riga del modo)

Beam splitter e specchi semiriflettenti

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & r_1 \\ r_2 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_0 \\ E \end{pmatrix}$$



Impongo la conservazione dell'energia

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_0|^2 + |E|^2 \iff U U^\dagger = 1$$

U è unitaria, quindi ottengo:

$$|t_1|^2 + |r_1|^2 = 1 \quad |t_2|^2 + |r_2|^2 = 1 \quad t_1 r_2^* + t_2^* r_1 = 0$$

$$t_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} |t_{1,2}| e^{i\Phi_{1,2}} \quad r_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} |r_{1,2}| e^{i\varphi_{1,2}}$$

$$|t_1|/|r_2| e^{i(\Phi_1 - \varphi_2)} + |t_2|/|r_1| e^{i(\varphi_1 - \Phi_2)} = 0$$

$$\frac{|r_2|}{|t_2|} = - \frac{|r_1|}{|t_1|} e^{\underbrace{i(\varphi_1 + \varphi_2 - \Phi_1 - \Phi_2)}_{-1}}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Phi_1 - \Phi_2 = \pi$$



e elevando al quadrato si ottiene:

$$\frac{|r_2|^2}{|t_2|^2} = \frac{|r_1|^2}{|t_1|^2} \Rightarrow \frac{1-|t_2|^2}{|t_2|^2} = \frac{1-|t_1|^2}{|t_1|^2} \Rightarrow \begin{aligned} |t_1|^2 &= |t_2|^2 = T \\ |r_1|^2 &= |r_2|^2 = R \end{aligned} \quad T + R = 1$$

quindi si possono usare convenzioni diverse, ad esempio:

A) $\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$

$$U_A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-R} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{1-R} \end{pmatrix}$$

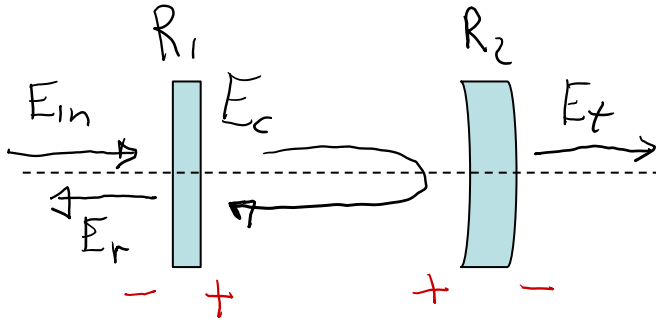
B) $\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

$$U_B = \begin{pmatrix} \sqrt{1-R} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{1-R} \end{pmatrix}$$

per ricavare la riflettività e la trasmittività della cavità in funzione della frequenza useremo la convenzione A



trasmissività e riflettività di una cavità ottica:



Nota la convenzione sui segni per considerare l'evoluzione spaziale all'interno della cavità sempre a z crescenti lungo il round trip

scrivo l'equazione di equilibrio per un round trip

$$E_c = \sqrt{1-R_1} E_{in} + \sqrt{R_2} e^{i\phi} E_c$$

$$\phi = k L_{\text{round}} = 2\pi \frac{\nu_0 + \nu}{c} 2L$$

$$R = \pi_i R_i$$

dove ν_0 è una risonanza della cavità e $c/2L$ è il FSR. Quindi il contributo della risonanza è un multiplo di 2π e posso riscrivere:

$$\phi = 2\pi \frac{\nu}{\text{FSR}}$$

dove ν è lo shift in frequenza rispetto alla risonanza

quindi:

$$E_c = \frac{\sqrt{1-R_1}}{1 - \sqrt{R_2} e^{i\phi}} E_{in}$$



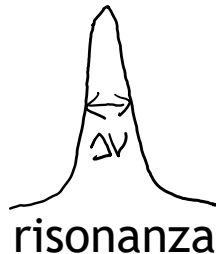
quindi considerando la convenzione sui segni ricavo subito:

$$E_r = -\sqrt{R_1} E_{in} + \sqrt{R_2} \sqrt{1-R_1} E_c e^{i\phi} \quad E_t = \sqrt{1-R_2} E_c$$

Finesse: $E_{in} \approx 1$

$$P_c = \frac{1-R_1}{|1-\sqrt{R} e^{i\phi}|^2} = \frac{1-R_1}{1+R-2\sqrt{R} \cos \phi} \approx \frac{1-R_1}{1+R-2\sqrt{R} \left(1-\frac{1}{2}\phi^2\right)} = \frac{1-R_1}{(1-\sqrt{R})^2 + \sqrt{R} \phi^2}$$

quindi
ottengo



$$\frac{FSR}{\Delta\nu} = F = \frac{\pi R^{\frac{1}{4}}}{1-\sqrt{R}}$$

↑
Finesse

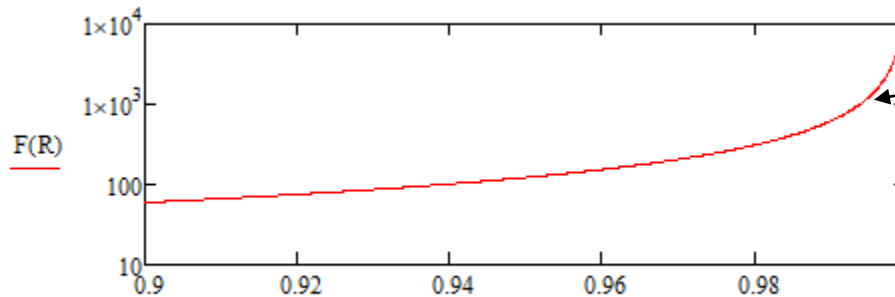
La finesse dipende solo dal prodotto di tutte le riflettività (quindi dalle perdite della cavità)

In risonanza la riflettività arriva al minimo e la trasmittività al massimo della potenza. La potenza in cavità è massima in risonanza (e a parità di finesse dipende dal valore di R_1)



Esempio con R1=R2 e Finesse=1000

$$F(R) := \frac{\pi \cdot R^4}{1 - \sqrt{R}}$$



R=0.99371

$$R := 0.99371$$

$$R1 := \sqrt{R} = 0.99685$$

$$R2 := R1$$

tempo in s

lunghezza in mm

$$L := 450$$

$$c := 3 \cdot 10^8 \cdot 10^3$$

$$Ec(\nu) := \frac{\sqrt{1 - R1}}{1 - \sqrt{R} \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{FSR}}}$$

$$Er(\nu) := -\sqrt{R1} + \sqrt{R2} \cdot \sqrt{1 - R1} \cdot Ec(\nu) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\nu}{FSR}}$$

$$Et(\nu) := \sqrt{1 - R2} \cdot Ec(\nu)$$

$$Pc(\nu) := (|Ec(\nu)|)^2$$

$$Pr(\nu) := (|Er(\nu)|)^2$$

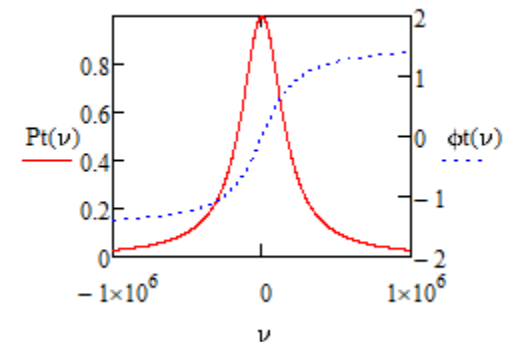
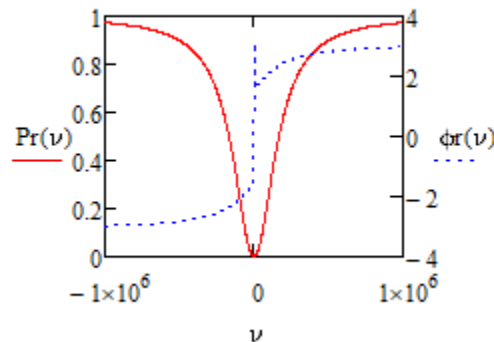
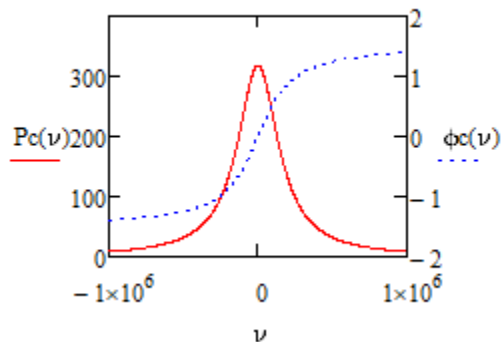
$$Pt(\nu) := (|Et(\nu)|)^2$$

$$\phi c(\nu) := \arg(Ec(\nu))$$

$$\phi r(\nu) := \arg(Er(\nu))$$

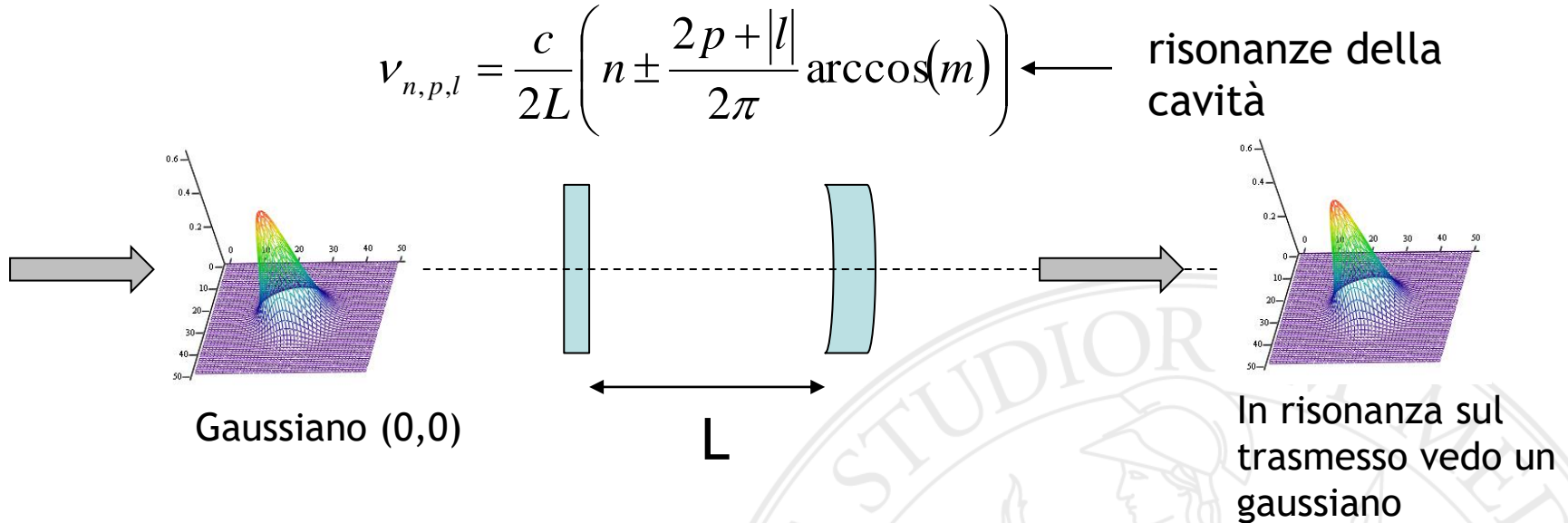
$$\phi t(\nu) := \arg(Et(\nu))$$

La potenza di picco in cavità è proporzionale alla Finesse (Gain=Finesse/pi).
Nel caso R1=R2 la riflettività è nulla in risonanza e quindi la trasmittività è 1



Cavità come filtro spaziale e spettrale:

Accoppiamento ottimizzato e frequenza del laser risonante con quella della cavità entro la larghezza di riga:



Poniamo $L=450\text{mm}$ e $\lambda=1064\text{nm}$ e Finesse=1000.

Quindi $\text{FSR}=c/2L=333\text{MHz}$, ovvero $\delta\nu=\text{FSR}/\text{Finesse}=333\text{kHz}$ (larghezza di riga della cavità)

Di quanto può cambiare L per mantenere la risonanza?

$$\frac{c}{\lambda} = n \cdot \text{FSR} \Rightarrow n \sim 8 \cdot 10^5$$

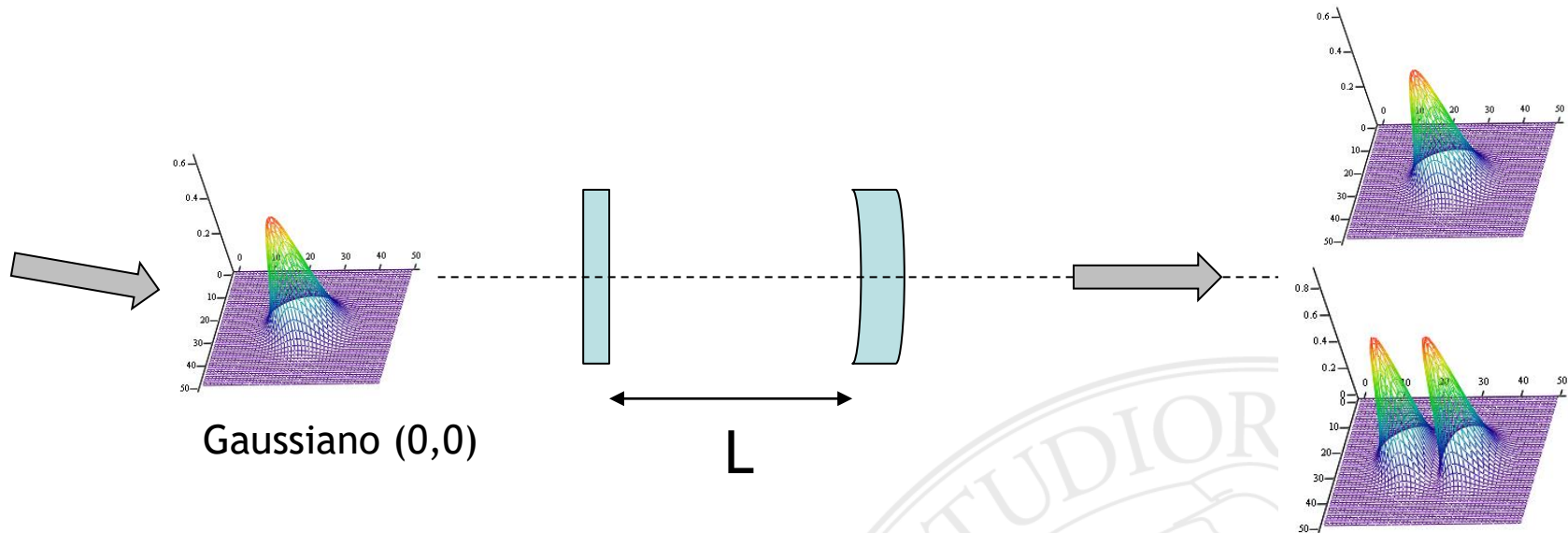
quindi: $\frac{\delta L}{L} \ll 10^{-9}$

$$\nu_0 + \delta\nu = n \frac{c}{2(L+\delta L)} \Rightarrow \delta\nu = n \cdot \text{FSR} \frac{\delta L}{L}$$

$$\Rightarrow \delta L \ll 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0.5 \text{ nm} !!!$$



Il gaussiano di ingresso è disallineato (inclinato sul piano orizzontale):

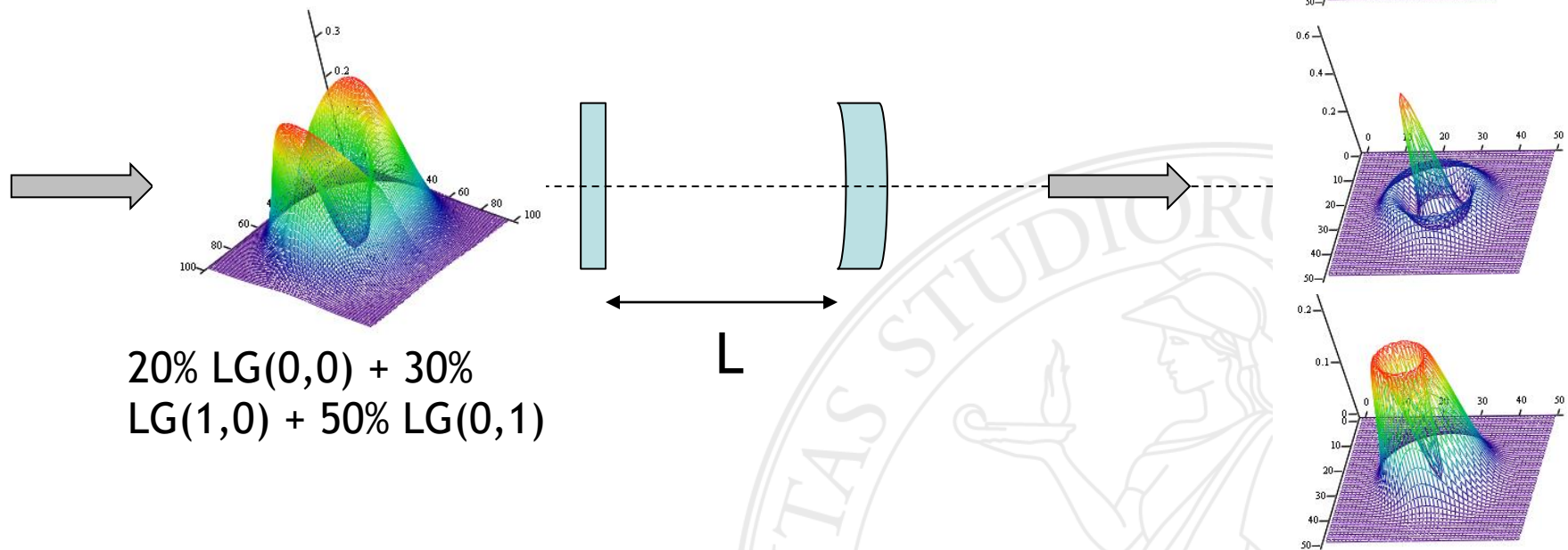


Dato che:
$$\nu_{n,p,l} = \frac{c}{2L} \left(n \pm \frac{2p + |l|}{2\pi} \arccos(m) \right)$$

La cavità risulterà risonante o con il modo LG(0,0) o con il modo di HG(1,0) per due lunghezze leggermente diverse dipendenti dal parametro di stabilità m



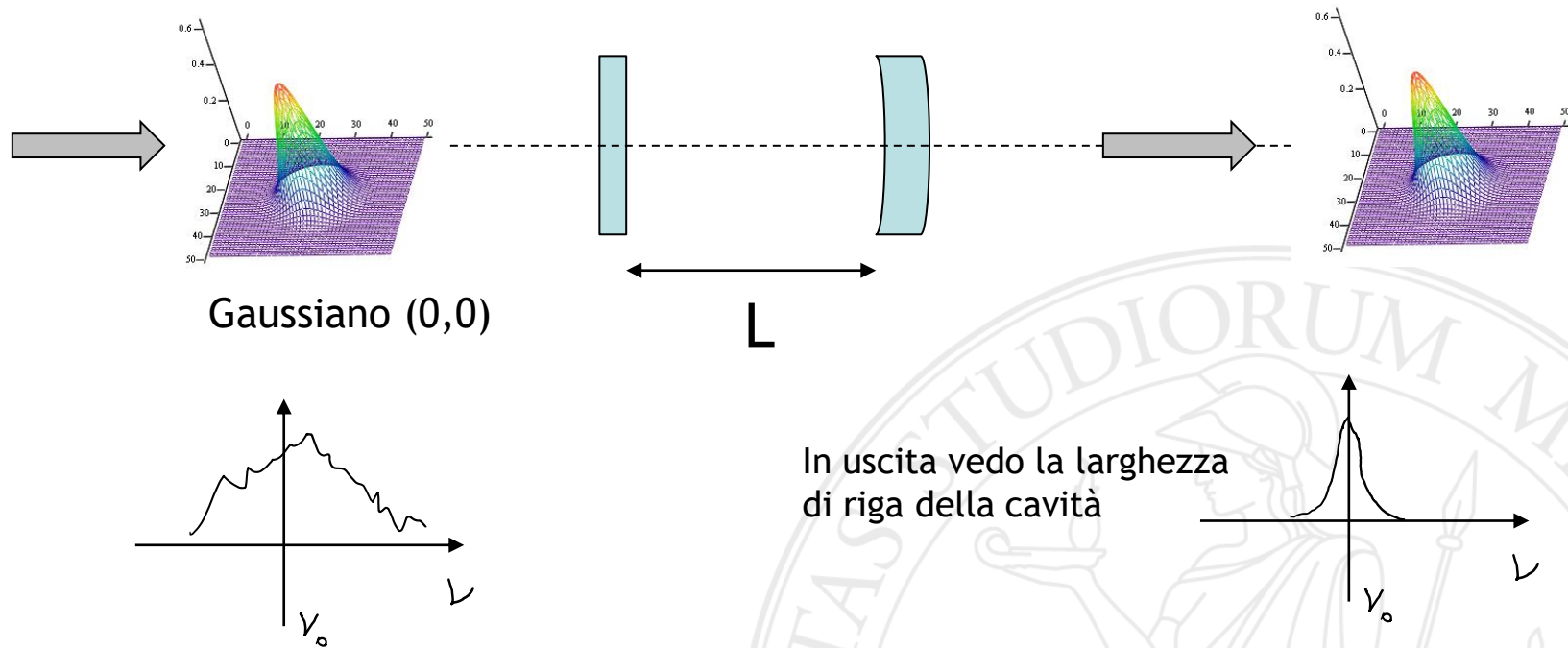
In ingresso ho una sovrapposizione di modi spaziali diversi (tutti ottimizzati rispetto a quelli della cavità):



La cavità agisce come un **filtro spaziale** che ripulisce l'ingresso. Per lunghezze diverse (quando si ottiene la risonanza) si vedrà solo il modo LG(0,0) oppure il LG(1,0) o il LG(0,1)

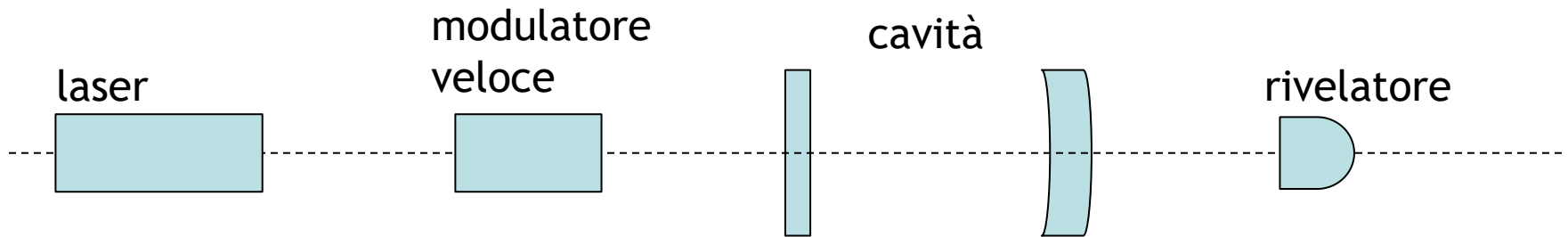


In ingresso ho un modo gaussiano ben allineato e risonante con la cavità ma il laser è molto rumoroso (lo spettro è più largo della larghezza di riga della cavità):



La cavità agisce come filtro spettrale (rimuove il rumore del laser. Ad esempio il rumore dovuto alle oscillazioni di rilassamento).

Misura della Finesse:



Round trip

$$E_c(t+\tau) = \sqrt{R} E_c(t)$$

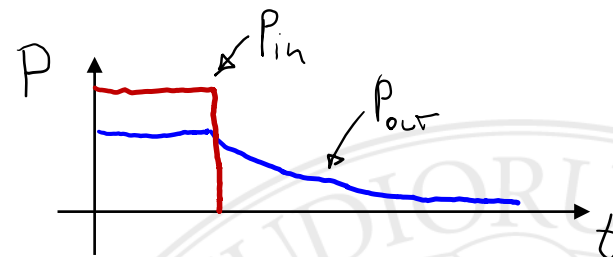
$$\downarrow$$

$$E_c(t) + \frac{\partial E_c}{\partial t} \tau = \sqrt{R} E_c(t)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = - \frac{1-\sqrt{R}}{\tau} E_c = \frac{1}{\tau_c} E_c$$

$$E_c(t) = E_0 e^{-t/\tau_c}$$

$$\tau_c = \frac{\tau}{1-\sqrt{R}}$$

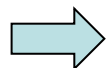
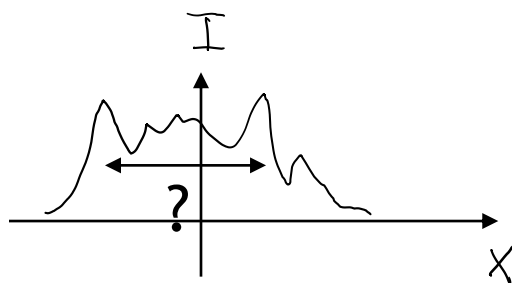


quindi misurando τ_c ricavo F . Nel caso in cui le riflettività sono molto alte posso scrivere:

$$F = \frac{\pi R^{1/4}}{1-\sqrt{R}} \approx \frac{\pi}{1-\sqrt{R}} = \pi \frac{\tau_c}{\tau}$$

Misura della qualità spaziale (fattore M2)

Un fascio multimodo spaziale (non gaussiano) propaga con un angolo di diffrazione maggiore rispetto ad un gaussiano (ha un più grande spettro angolare a parità di dimensione). Quindi misurando la dimensione dello spot a distanze diverse possiamo ricavare informazioni sulla qualità spaziale. Prima di tutto abbiamo bisogno di un metodo affidabile per la misura della dimensione dello spot (non gaussiano):



$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

stessa cosa per y

$$\langle x \rangle = \int dx dy I(x, y) x$$

$$\langle x^2 \rangle = \int dx dy I(x, y) x^2$$

$$\int dx dy I(x, y) = 1$$

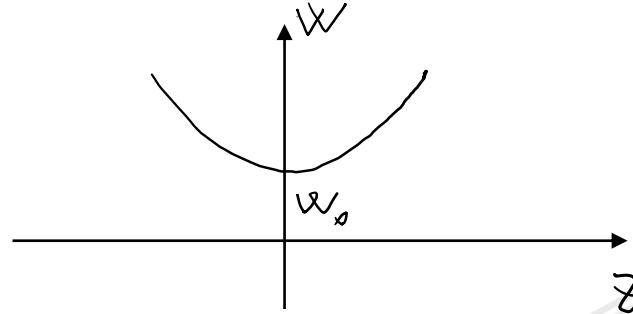
nel caso di un gaussiano:

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} = e^{-\frac{2x^2}{w_x^2}} \Rightarrow$$

$$w_x = 2\sigma_x$$

Nel caso di un fascio gaussiano abbiamo:

$$w_x^2(z) = w_0^2 + \left(\frac{\lambda}{\pi w_0} \right)^2 z^2 \quad \text{dove: } w_\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad \text{è lo spettro angolare}$$



Nel caso di un fascio qualsiasi dall'integrale di Huygens si ricava:

$$w_x^2(z) = w_0^2 + \left(\frac{\pi^2 \lambda}{\pi w_0} \right)^2 z^2 \quad \text{dove: } w_\theta = \frac{\pi^2 \lambda}{\pi w_0} \quad \text{quindi a parità di dimensione nel fuoco ha uno spettro angolare maggiore}$$

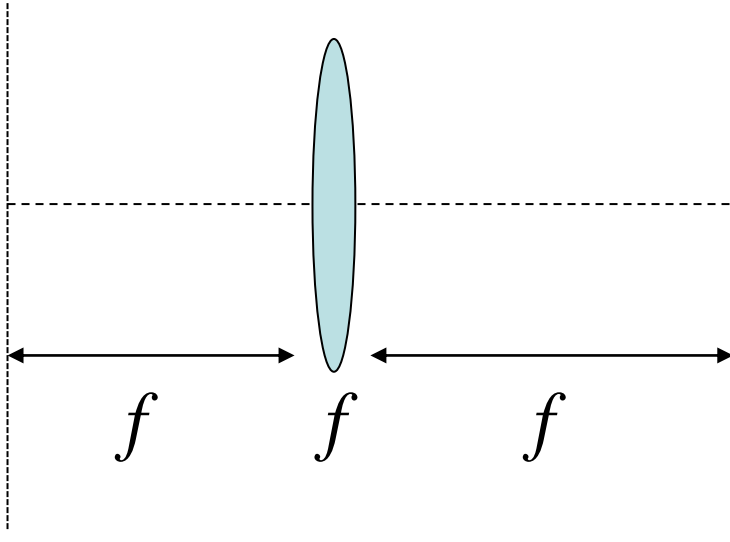
$$w_x = 2 \sigma_x$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

M2 può essere pensato come la radice del numero di modi che definiscono lo spot, ovvero, la dimensione di coerenza è $w_0/M2$. Oppure si può pensare alla propagazione di un fascio coerente con $\lambda_{\text{eff}} = \lambda \cdot M2$



Appendice: Trasformata di Fourier con una lente



$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x, y, z) &\approx \frac{i}{\lambda B} e^{-ik(z-z_1)} \iint dx_1 dy_1 E(x_1, y_1, z_1) e^{-ik \left[\frac{A(x_1^2 + y_1^2) + D(x^2 + y^2) - 2x_1x - 2y_1y}{2B} \right]} \\ &= \frac{i}{\lambda B} e^{-ik(z-z_1)} \iint dx_1 dy_1 E(x_1, y_1, z_1) e^{ik \left[\frac{x_1x + y_1y}{f} \right]} \end{aligned}$$

