



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,  
FISICHE E NATURALI

# Proprietà spettrali dei Laser

Larghezza di riga e funzionamento in multimodo



*Simone Cialdi*

# Outline

## *Analisi delle cavità e delle misure*

Misura del FSR

Misura della focale termica

## *Introduzione (prop. Spettrali dei Laser)*

### **Larghezza di riga del mezzo attivo**

- Allargamento omogeneo e disomogeneo

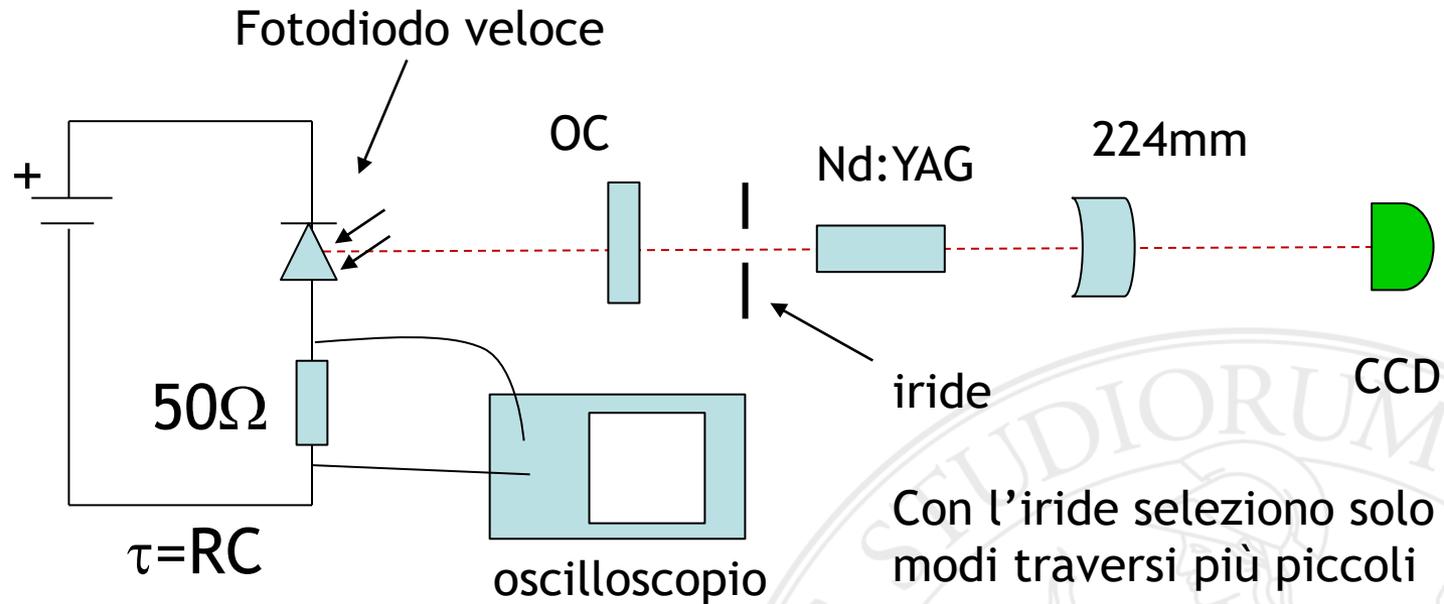
### **Funzionamento in multimodo**

- Spectral/Spatial hole burning
- Larghezza di riga del LASER
- Funzionamento in singolo modo

## *Appendice: laser a semiconduttore*



# Apparato per la misura del FSR



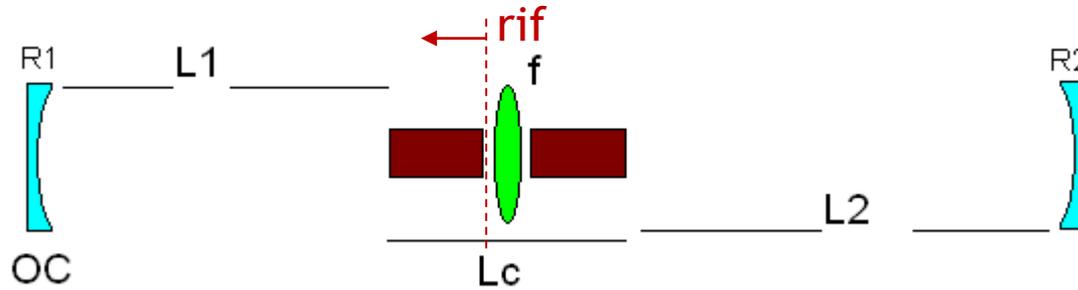
$$V \propto |E|^2 = \left| \sum_i A_i e^{-i\omega_i t} \right|^2 = \sum_i |A_i|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i,j>i} A_i A_j^* \cos \Delta\omega_{ij} t$$

↑

La differenza di tensione su R contiene l'informazione sulla differenza in frequenza tra i modi del laser



# Programma mathcad per lo studio della cavità



$$\text{spazio}(z) := \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{lente}(f) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

## Matrice di round-trip

$$\text{RT}(f, L1, L2, R1, R2) := \text{lente}(f) \cdot \text{spazio}\left(\frac{Lc}{2 \cdot nYAG(1.064)}\right) \cdot \text{spazio}(L2) \cdot \text{lente}\left(\frac{R2}{2}\right) \cdot \text{spazio}(L2) \cdot \text{spazio}\left(\frac{Lc}{2 \cdot nYAG(1.064)}\right) \cdot \text{lente}(f) \cdot \text{spazio}\left(\frac{Lc}{2 \cdot nYAG(1.064)}\right) \cdot \text{spazio}(L1) \cdot \text{lente}\left(\frac{R1}{2}\right) \cdot \text{spazio}(L1) \cdot \text{spazio}\left(\frac{Lc}{2 \cdot nYAG(1.064)}\right)$$

$$m(f, L1, L2, R1, R2) := \frac{\text{RT}(f, L1, L2, R1, R2)_{0,0} + \text{RT}(f, L1, L2, R1, R2)_{1,1}}{2}$$

## Parametro di stabilità

$$w(f, L1, L2, R1, R2) := \sqrt{\frac{|\text{RT}(f, L1, L2, R1, R2)_{0,1}| \cdot 1.064 \cdot 10^{-3}}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - m(f, L1, L2, R1, R2)^2}}$$

## Spot sul piano di rif

$$\text{segno}(f, L1, L2, R1, R2) := \frac{\text{RT}(f, L1, L2, R1, R2)_{0,1}}{|\text{RT}(f, L1, L2, R1, R2)_{0,1}|}$$

$$\nu(l1, n1, f, L1, L2, R1, R2) := \text{FSR}(L1, L2) \cdot \left( l1 + \frac{n1}{2 \cdot \pi} \cdot \text{acos}(m(f, L1, L2, R1, R2)) \cdot \text{segno}(f, L1, L2, R1, R2) \right)$$

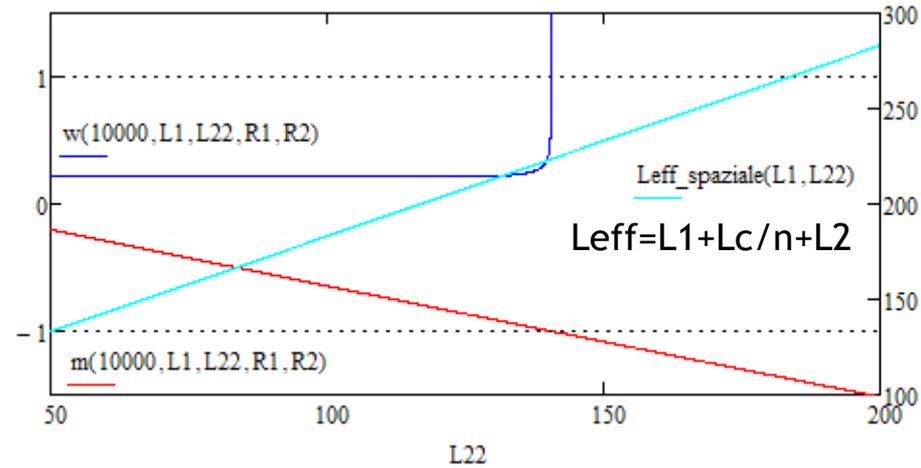
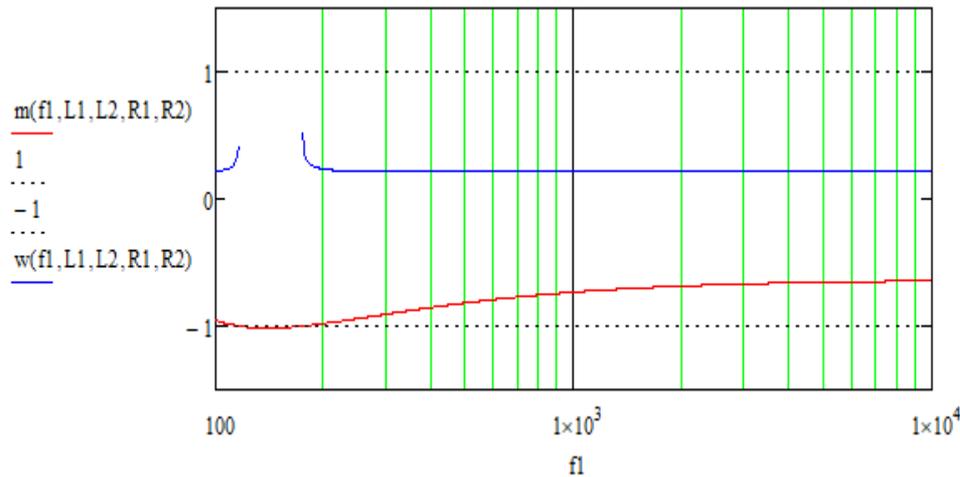
## Frequenza del modo HG l, 0, n



# Analisi della cavità e della focale termica

L1 := 50    L2 := 100    R1 := ∞    R2 := 224

**FSR=568MHz**



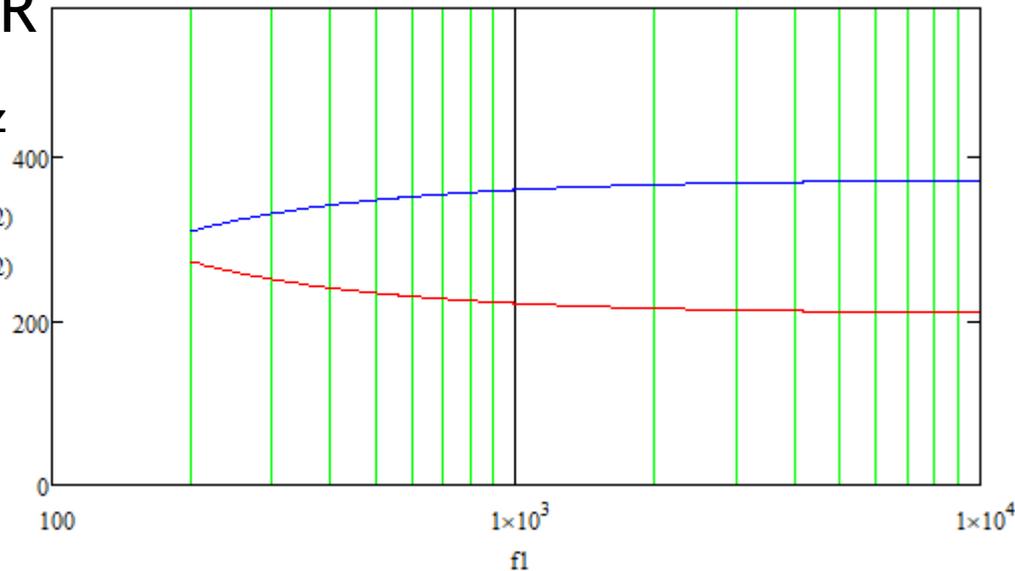
$$\Delta\nu(l1, n1, l2, n2, f, L1, L2, R1, R2) := |\nu(l1, n1, f, L1, L2, R1, R2) - \nu(l2, n2, f, L1, L2, R1, R2)|$$

**FSR**

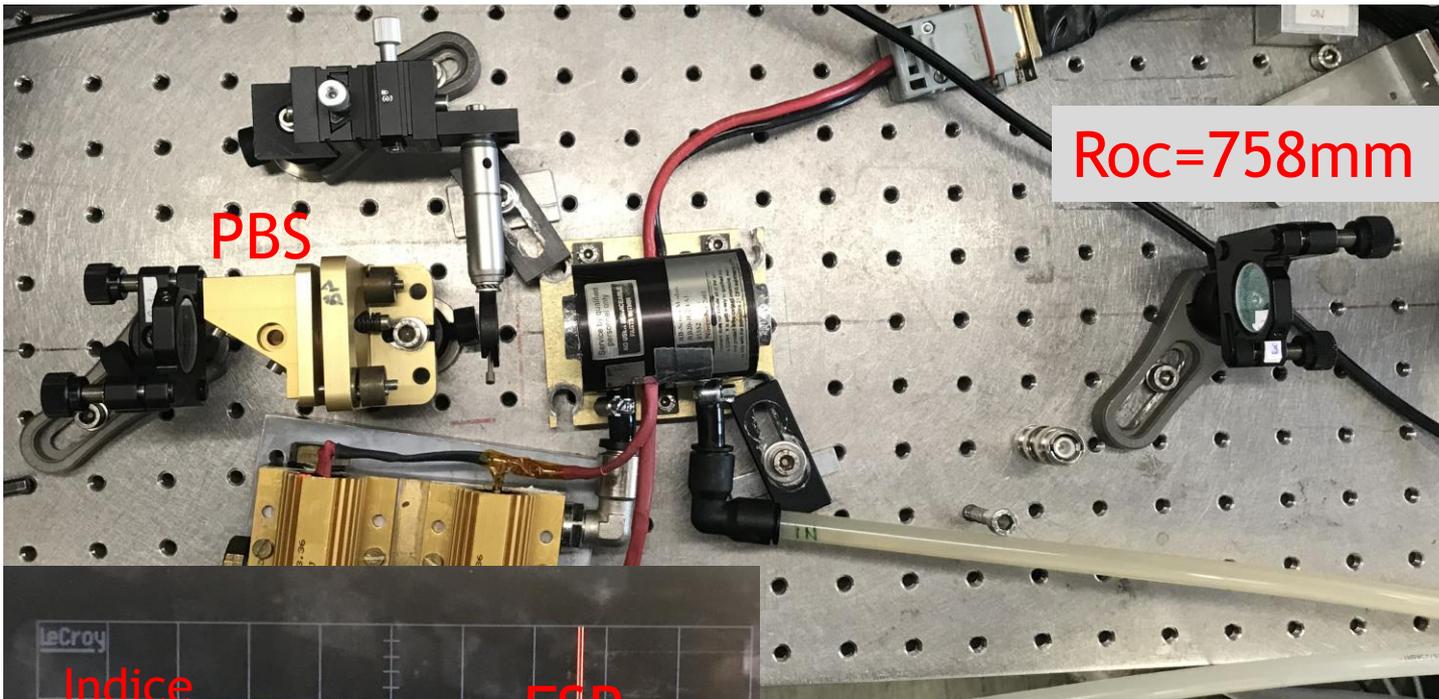
MHz

$$\Delta\nu(0, 0, 0, 1, fl, L1, L2, R1, R2)$$

$$\Delta\nu(1, 0, 0, 1, fl, L1, L2, R1, R2)$$

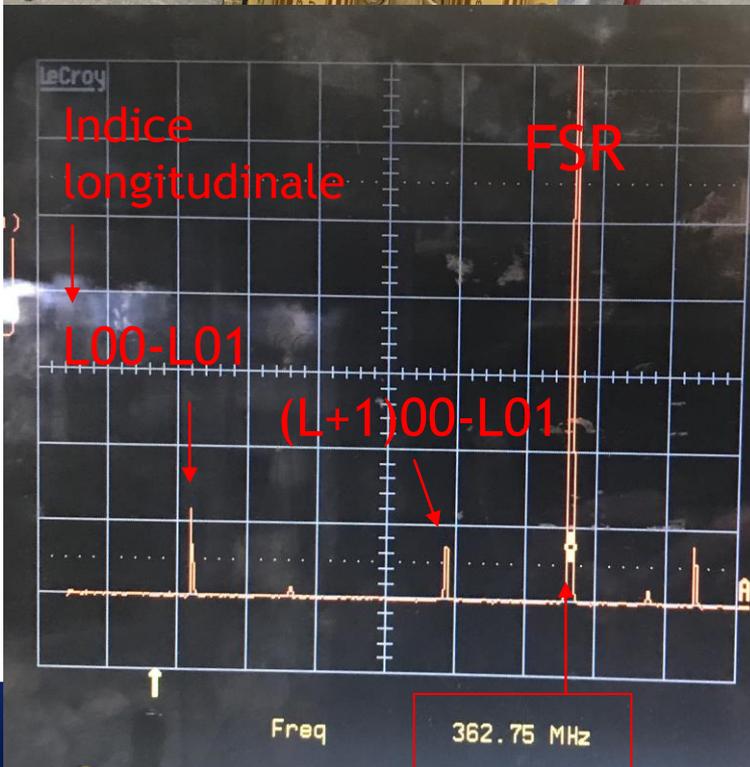


Per ottenere la focale termica del mezzo attivo si misura la frequenza differenza tra il modo HG 00 e il modo HG 01



Roc=758mm

PBS



Indice longitudinale

FSR

L00-L01

(L+1)00-L01

Freq

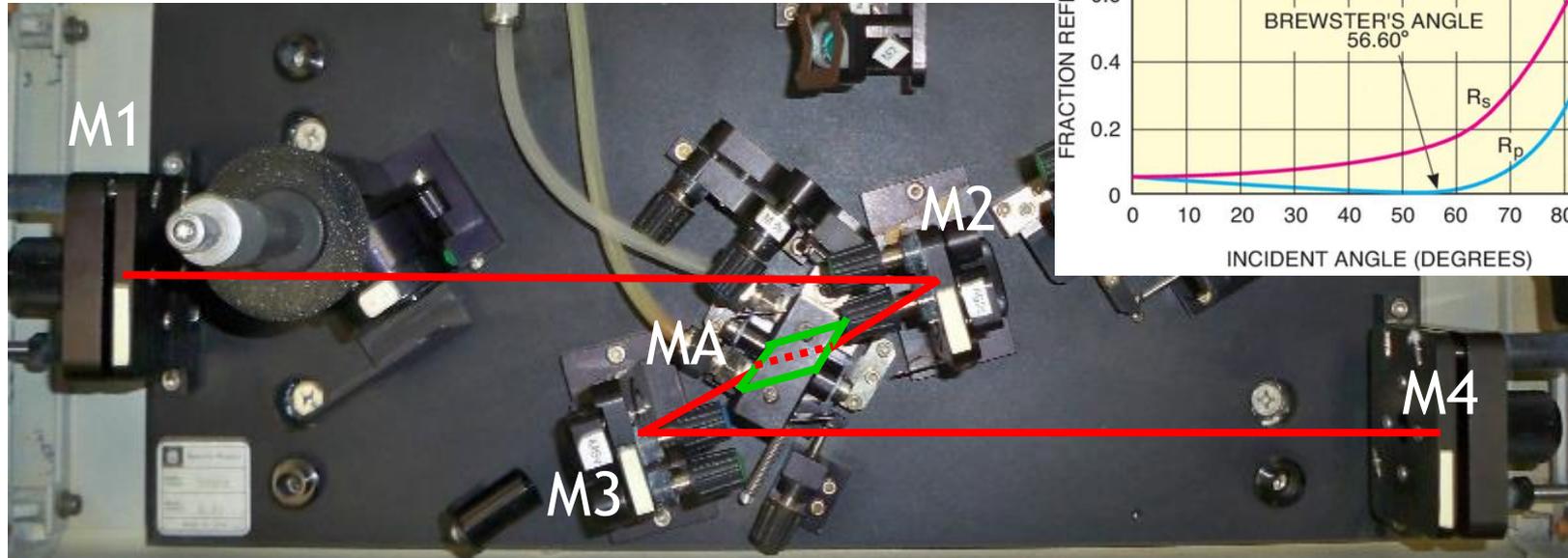
362.75 MHz

Inserendo il PBS in cavità sparisce lo sdoppiamento dei picchi dovuti ai battimenti tra 00-01. Quindi lo sdoppiamento è dovuto alla polarizzazione

Il PBS riflette la polarizzazione verticale e trasmette quella orizzontale

# Cavità a Z con compensazione dell'astigmatismo

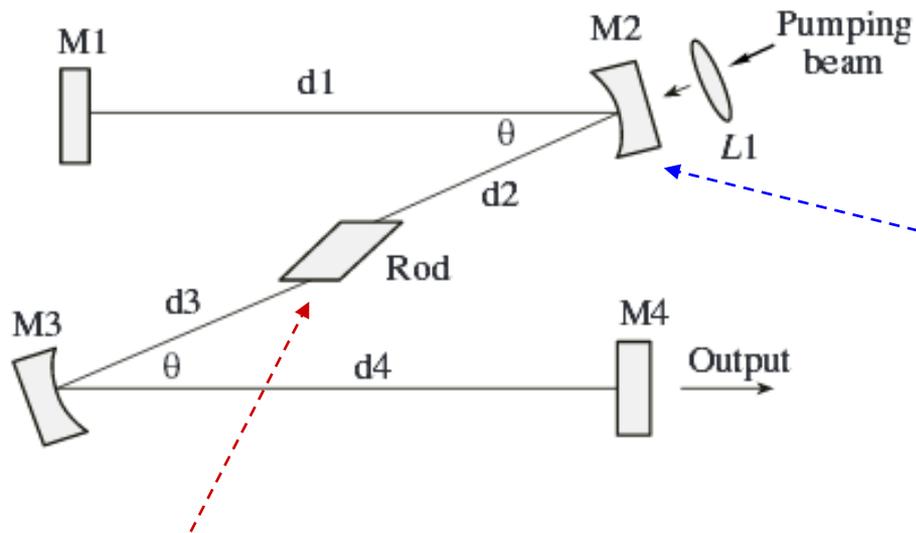
## Laser Ti:Sa



M1 e M4 specchi piani, M2 e M3 specchi concavi, il mezzo attivo (MA) è tagliato all'angolo di Brewster

Nota: se la distanza tra i due specchi concavi è un po' maggiore di  $R$  possiamo vedere il sistema telescopico come una lente convergente con focale lunga (per questo la cavità è stabile, come nel caso di una cavità a specchi piani con lente nel mezzo)





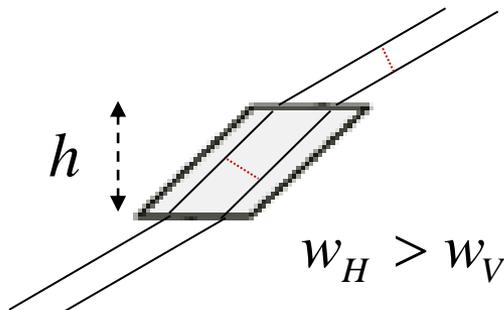
Gli specchi concavi sono ruotati rispetto all'asse e ciò produce astigmatismo, ovvero, abbiamo due focali diverse sul piano orizzontale e su quello verticale:

$$f_H = \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$f_V = \frac{R}{2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$f_H < f_V$$

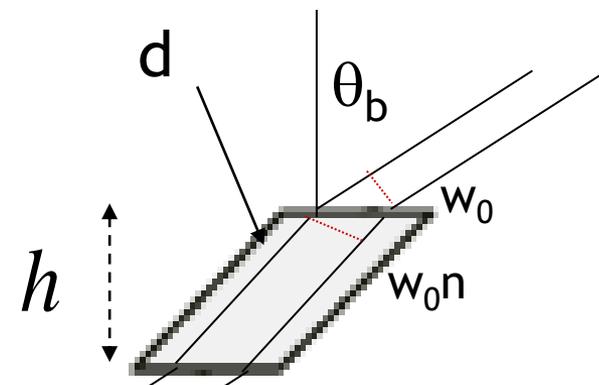
Il mezzo attivo (tagliato all'angolo di Brewster per polarizzare il laser e minimizzare le perdite) introduce astigmatismo:



I due effetti si possono compensare

Esiste un  $\theta$  ottimale a cui lo spot raggiunge il minimo nello stesso punto su H e V con la minima ellitticità.

Per studiare la cavità bisogna scrivere due matrici di round-trip una per il piano H e l'altra per V dove il mezzo attivo è una matrice di propagazione libera "astigmatica" (senza considerare la focale termica):



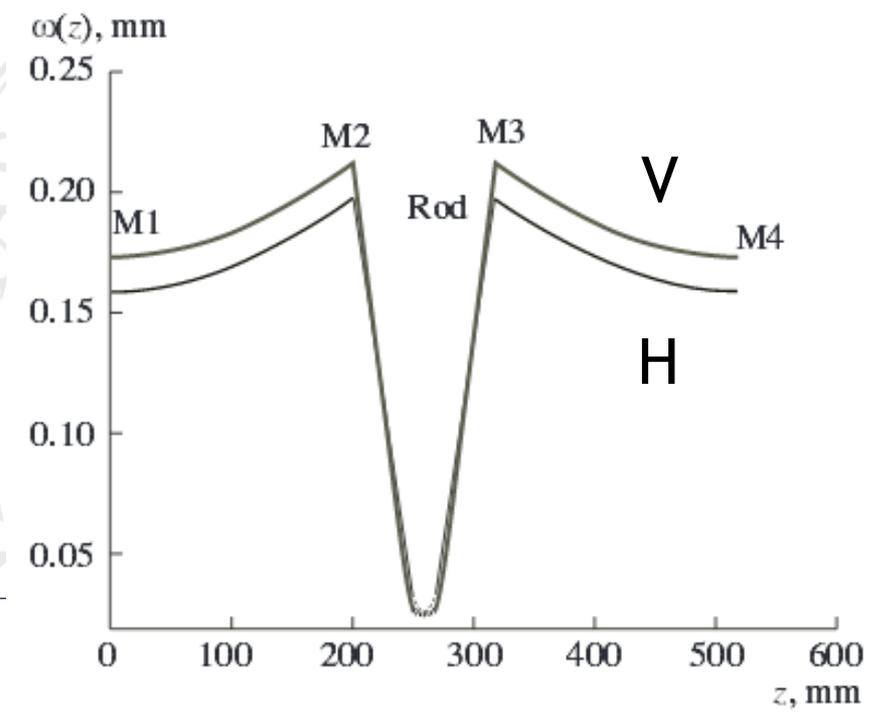
$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h\sqrt{1+n^2}}{n^4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h\sqrt{1+n^2}}{n^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{d}{n} \quad n = \tan(\theta_b)$

(esercizio). All'interfaccia la dimensione dello spot è moltiplicata per n, poi propago per L/n e alla seconda interfaccia divido ancora per n.

$$w_2 = \sqrt{\left(A + \frac{B}{R_1}\right)^2 w_1^2 + \left(\frac{\lambda B}{\pi}\right)^2 \frac{1}{w_1^2}}$$

Tipico andamento in una cavità a Z  
 (Laser Physics, 2008, Vol. 18, No. 3, pp. 232-236)



## Cavità ring 4 specchi:



Specchi concavi con  $R=300\text{mm}$  messi a distanza  $2f=R$

Nota che un sistema telescopico con magnificazione 1 è equivalente ad una propagazione libera su una distanza  $2f$  solo se il raggio di curvatura dello spot sullo specchio curvo è molto grande rispetto a  $R$  (**esercizio**)

Suggerimento: usare  $w_2 = \sqrt{\left(A + \frac{B}{R_1}\right)^2 w_1^2 + \left(\frac{\lambda B}{\pi}\right)^2 \frac{1}{w_1^2}}$

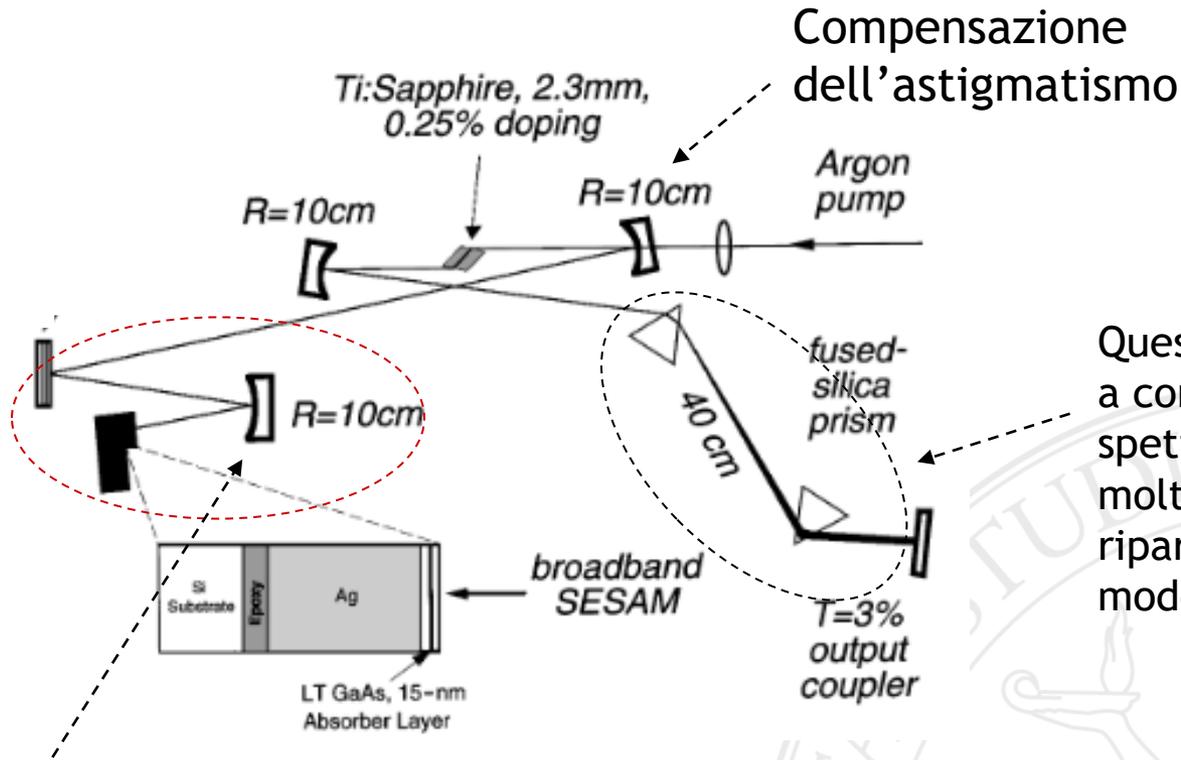
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2f \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

In questo caso si può studiare prima la dimensione dello spot e la stabilità della cavità senza il sistema telescopico e poi si può scegliere il raggio di curvatura degli specchi concavi in modo da ottenere nel fuoco la dimensione voluta

Spot nel fuoco  $R/2$

$$w_f = \frac{\lambda f}{\pi w}$$

# Cavità a X con fuoco:



Questo sistema di prismi serve a compensare la dispersione spettrale nel caso di impulsi molto veloci (fs), ne riparleremo quando faremo il mode-locking.

Spesso è necessario focalizzare lo spot sul riflettore piano (ad esempio quando questo è un assorbitore saturabile...teoria del mode-locking). Per fare questo basta mettere uno specchio curvo ad una distanza dallo specchio pari a  $R/2$  circa (le considerazioni sono quelle fatte per la cavità a ring con 4 specchi)

# Proprietà spettrali di un laser

Al momento sappiamo che una cavità stabile ha i suoi autostati e che un laser può funzionare in modalità multimodo su alcuni di questi.

Ciò appare in contraddizione con il fatto che quando il laser è all'equilibrio il guadagno deve essere uguale alle perdite e dunque dovrebbe essere acceso solo il modo con il maggiore guadagno (con la maggiore sezione d'urto per l'emissione stimolata).

Ci proponiamo quindi di capire quanto segue:

- 1) Cosa determina la larghezza di riga del mezzo attivo?
- 2) Perché un laser può funzionare in modalità multimodo?
- 3) Cosa determina la larghezza spettrale del singolo modo della radiazione laser?
- 4) Come si fa a far funzionare un laser in singolo modo?



## Larghezza di riga del mezzo attivo

Dalla teoria perturbativa al primo ordine ricavo:

$$W_{21} = B_o \phi = B \rho = \sigma F = \frac{2\pi^2}{3n^2 \epsilon_o h^2} |\mu_{12}|^2 \rho \delta(\nu - \nu_o)$$

E quindi ho un salto solo in risonanza.

Come può il mezzo attivo emettere in modo stimolato per  $\nu$  diverso da  $\nu_o$  ?

Esistono due meccanismi fisici fondamentali:

### Allargamento di riga omogeneo

- Allargamento per urti
  - Con i fononi
  - Con le molecole
- Allargamento naturale
  - Emissione spontanea

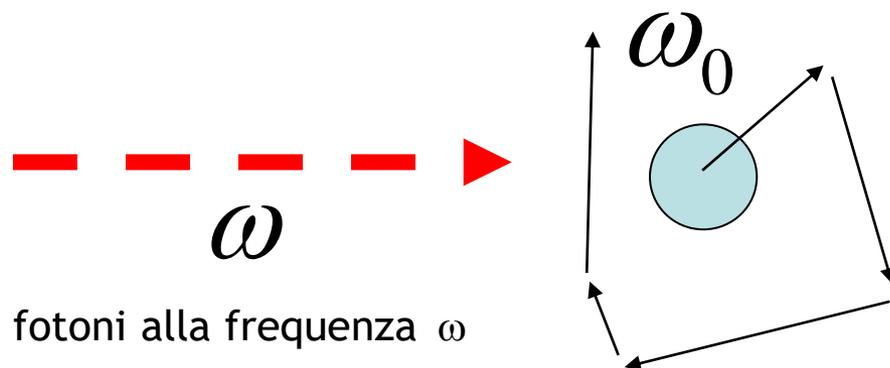
### Allargamento di riga non omogeneo

- Effetto Doppler
- Interazione non omogenea con l'ambiente



# Allargamento di riga per urti

*un atomo che subisce degli urti come vede una radiazione monocromatica?*



Atomo con frequenza di risonanza  $\omega_0$  che subisce urti dovuti all'interazione con l'ambiente

Il punto è che l'atomo vede una radiazione che subisce dei **salto di fase dopo ogni urto**. Dunque ci dobbiamo chiedere quale sia lo spettro effettivo della radiazione (monocromatica nel rif. del lab.) per l'atomo.

Se l'ampiezza di tale spettro è non nulla per  $\omega_0$  allora l'atomo può assorbire la radiazione.

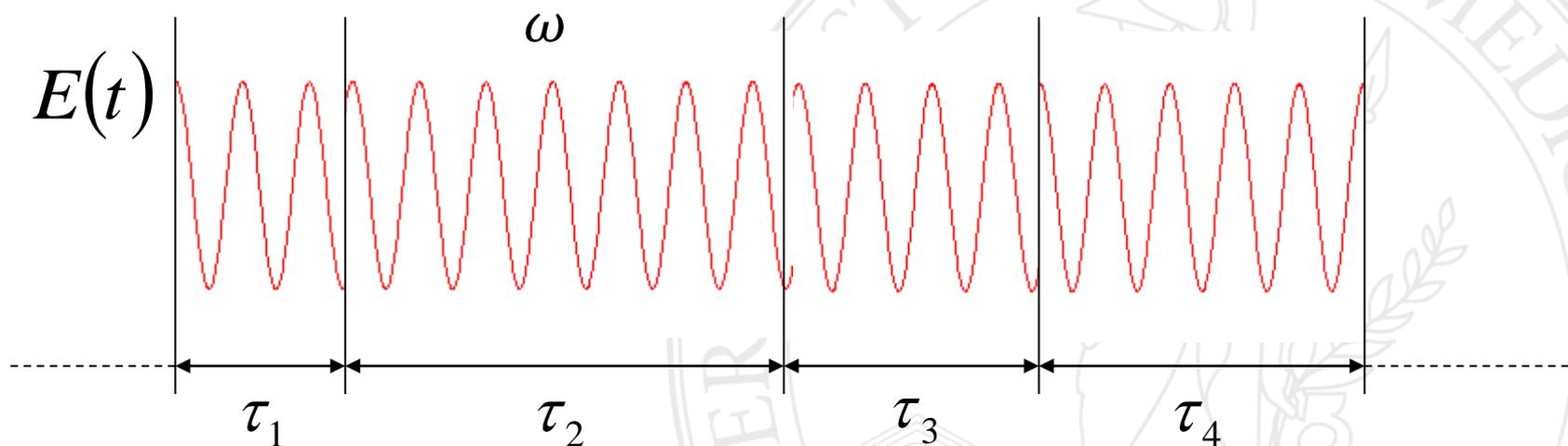
**Nota:** a subire il salto di fase è il dipolo dell'atomo, ma nell'Hamiltoniana di interazione dipolo e campo sono insieme. Quindi i salti di fase del dipolo possono essere interpretati come salti di fase del campo.



L'ampiezza del campo non cambia ma cambia la fase effettiva in modo casuale (la fase che realmente subisce un salto è quella del dipolo atomico). Dunque il campo è caratterizzato da intervalli di tempo casuali in cui abbiamo un'onda sinusoidale con frequenza  $\omega$ .

La funzione di distribuzione degli intervalli temporali è un esponenziale dove  $\tau_m$  è il tempo medio tra due urti successivi. Si arriva a questa distribuzione considerando una probabilità di urto nell'unità di tempo indipendente dal tempo:

$$\frac{dP_c}{dt} = \frac{1}{\tau_m} \quad \longrightarrow \quad p(\tau) = \frac{1}{\tau_m} e^{-\frac{\tau}{\tau_m}} \quad \text{attenzione a non confondere } P_c \text{ con } p$$



Per ricavare lo spettro facciamo la **trasformata di Fourier** del campo e poi ne calcoliamo il modulo quadro:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\omega') &= \int E(t) e^{i\omega' t} dt = \int E_o e^{-i\omega t + i\phi(t)} e^{i\omega' t} dt = \\ &= \sum_i E_o \int_{t_i}^{t_i + \tau_i} e^{i(\omega' - \omega)t} e^{i\phi_i} dt =\end{aligned}$$

L'indice  $i$  si riferisce all' $i$ -esimo intervallo temporale caratterizzato dalla fase  $\phi_i$

L'integrale si risolve esattamente e otteniamo:

$$= \sum_i E_o e^{i\phi_i} e^{i(\omega' - \omega)t_i} \left[ \frac{e^{i(\omega' - \omega)\tau_i} - 1}{i(\omega' - \omega)} \right] = \sum_i E_o e^{i\phi_i^*} \left[ \frac{e^{i(\omega' - \omega)\tau_i} - 1}{i(\omega' - \omega)} \right]$$

Fase random



Adesso calcolo il modulo quadro (power-spectrum) sfruttando il fatto che i termini incrociati svaniscono grazie al fatto che le fasi sono casuali,

inoltre, passo dall'integrale nel tempo all'integrale sulla funzione di distribuzione:

$$P(\omega') \propto |\tilde{E}(\omega')|^2 = \sum_n p(\tau_n) \left| \frac{e^{i(\omega'-\omega)\tau_n} - 1}{i(\omega'-\omega)} \right|^2 = \sum_n p(\tau_n) \frac{2 - 2\cos[(\omega'-\omega)\tau_n]}{(\omega'-\omega)^2}$$

Raggruppo tutti i casi relativi a certi  $\tau$  e li sommo con i relativi pesi

Passo al continuo

$$P(\omega') \propto \int p(\tau) \frac{2 - 2\cos[(\omega'-\omega)\tau]}{(\omega'-\omega)^2} d\tau$$



Adesso posso sostituire la distribuzione e risolvere esattamente l'integrale

$$\downarrow p(\tau) = \frac{1}{\tau_m} e^{-\frac{\tau}{\tau_m}}$$

$$P(\nu') = \frac{2\tau_m}{1 + 4\pi^2 \tau_m^2 (\nu' - \nu)^2}$$

$$\Delta\nu_{FWHM} = \frac{1}{\pi\tau_m}$$

**Nota:** l'integrale di P è normalizzato a 1

Si ottiene dunque una larghezza di riga lorentziana con una larghezza inversamente proporzionale al tempo medio tra un urto e il successivo.



Quindi possiamo sostituire alla delta di Dirac la larghezza di riga normalizzata dovuta agli urti (N.B. per trovare la probabilità di transizione fisso  $\nu'$  alla frequenza di risonanza dell'atomo)

$$W_{21} = \frac{2\pi^2}{3n^2 \varepsilon_0 h^2} |\mu_{12}|^2 \rho g(\nu_0 - \nu) \quad g(\nu_0 - \nu) = \frac{2\tau_m}{1 + 4\pi^2 \tau_m^2 (\nu_0 - \nu)^2}$$

Questo effetto può essere molto grande nei laser a stato solido e piccolo nei laser a gas

*He – Ne*

laser a gas

$$\Delta\nu_{urti} \approx 0.64\text{MHz}$$

*CO<sub>2</sub>*

$$\Delta\nu_{urti} \approx 40\text{MHz}$$

*Nd : YAG*

laser a  
stato solido

$$\Delta\nu_{urti} \approx 120\text{GHz}$$

urti con i  
fononi



# Allargamento di riga naturale

L'allargamento naturale è dovuto all'emissione spontanea. Si può considerare un processo di emissione stimolata attraverso una radiazione non risonante. Tale processo non può durare più di un tempo pari all'emissione spontanea e quindi abbiamo un allargamento di riga:

$$\Delta \nu_{nat} = \frac{1}{2\pi\tau_{sp}}$$

*He – Ne*

laser a gas

$$\Delta \nu_{nat} \approx 16 \text{ MHz}$$

*Nd : YAG*

laser a

$$\Delta \nu_{nat} \approx 690 \text{ Hz}$$

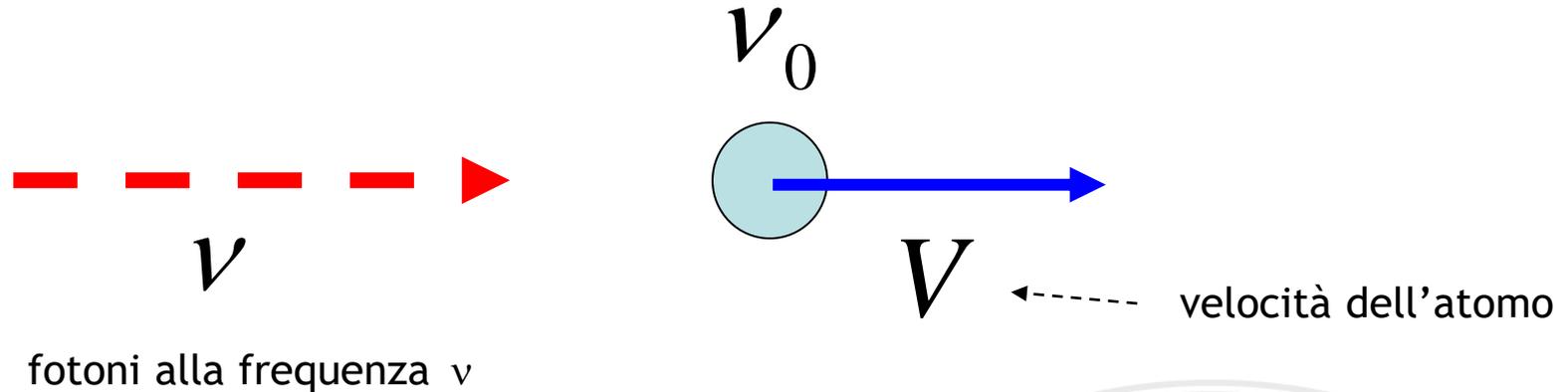
*Ti : Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>*

stato solido

$$\Delta \nu_{nat} \approx 50 \text{ kHz}$$



# Allargamento Doppler



Che velocità deve avere l'atomo per assorbire la radiazione? A causa dell'effetto doppler l'atomo vede una frequenza:

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{V}{c} \right)$$

Quindi dobbiamo porre  $\nu' = \nu_0$  e esplicitare la velocità

$$\nu_0 = \nu \left( 1 - \frac{V}{c} \right) \Rightarrow \nu \approx \nu_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \right) \Rightarrow V \approx \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0)$$

Si fa questa approx. per non avere  $\nu$  a denominatore nel successivo passaggio



Dunque la frequenza  $\nu$  potrà essere assorbita con un peso che dipende dalla probabilità di avere la velocità  $V$ . Ovvero, dobbiamo sostituire la velocità nella distribuzione Maxwelliana e si ottiene:

$$g(\nu - \nu_o) = \frac{1}{\nu_o} \left( \frac{Mc^2}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{Mc^2 (\nu - \nu_o)^2}{2kT \nu_o^2}}$$

Otteniamo quindi una larghezza di riga gaussiana con una larghezza a metà altezza:

$$\Delta \nu_{Doppler} = 2\nu_o \left( \frac{2 \ln 2 kT}{Mc^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

In questo caso l'allargamento è **disomogeneo** infatti atomi diversi possono assorbire frequenze diverse in funzione della loro velocità



Notare che l'allargamento Doppler è proporzionale alla frequenza. Per questo motivo nel caso dei laser a gas che lavorano nel visibile l'effetto Doppler è più grande rispetto a quello collisionale mentre nel caso di laser che lavorano nel lontano IR i due effetti sono simili:

*Ar*

$$\Delta\nu_{Doppler} \approx 3.5\text{GHz}$$

*He – Ne*

laser a gas

$$\Delta\nu_{Doppler} \approx 1.7\text{GHz}$$

*CO<sub>2</sub>*

$$\Delta\nu_{Doppler} \approx 50\text{MHz}$$



# Allargamento di riga per interazione con il campo locale

Un altro tipo di allargamento complessivamente **non omogeneo** é quello dovuto all'interazione Stark tra lo ione e il solido quando il solido e' un vetro. In questo caso l'interazione Stark non é omogenea (come nel caso di un cristallo) e quindi abbiamo uno shift non omogeneo dei livelli.

Possiamo dire che in zone diverse del vetro abbiamo diverse frequenze di risonanza e che in ognuna di queste zone abbiamo un allargamento di tipo collisionale.

Per trovare la larghezza complessiva dobbiamo mediare le varie zone con il loro relativo peso:

$$g_{tot}(\nu - \nu_0) = \int d\nu_{loc} P(\nu_{loc} - \nu_0) g_{urti}(\nu - \nu_{loc})$$

Frequenza di risonanza locale

Frequenza di risonanza media

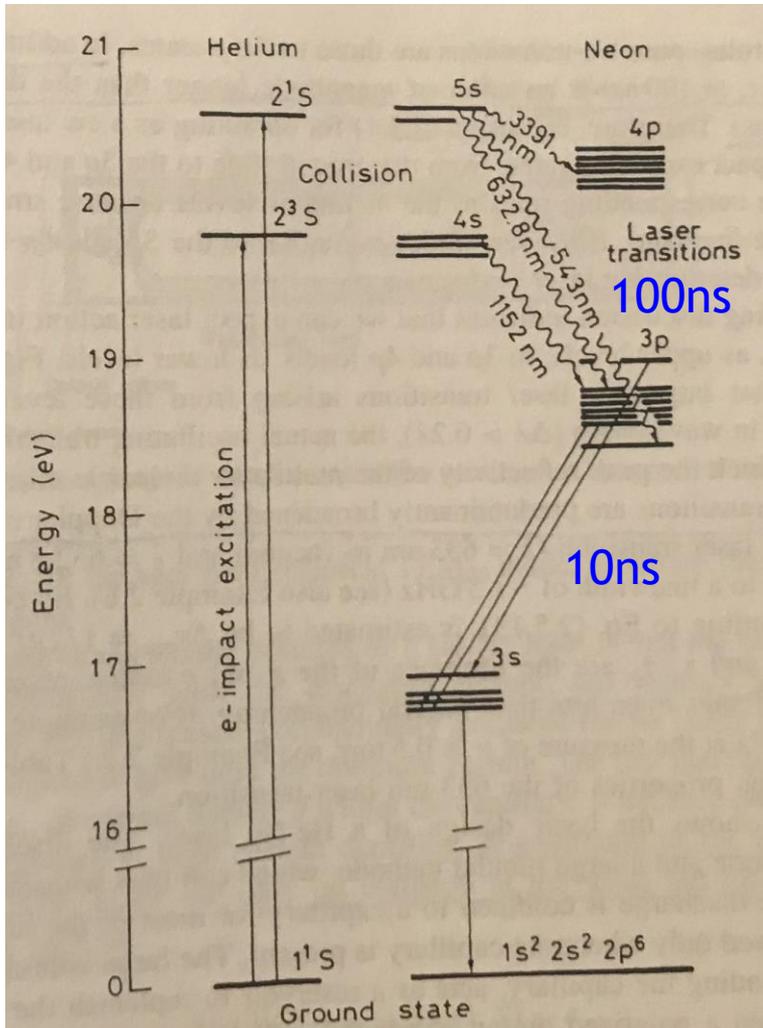
*Nd : Glass*

laser a  
stato solido

$$\Delta \nu_{Stark} \approx 5.4 THz$$

Interazione Stark  
non omogenea

# Laser He:Ne



**He:** nei due livelli eccitati uno dei due elettroni è eccitato sul livello 2s. I due livelli sono metastabili perchè la transizione di dipolo sul ground è proibita per le regole di dipolo. Quindi l'He serve a trasferire l'eccitazione al Ne.

**Ne:** i livelli eccitati si riferiscono allo stato eccitato di uno degli elettroni prelevato dal p dello stato ground.

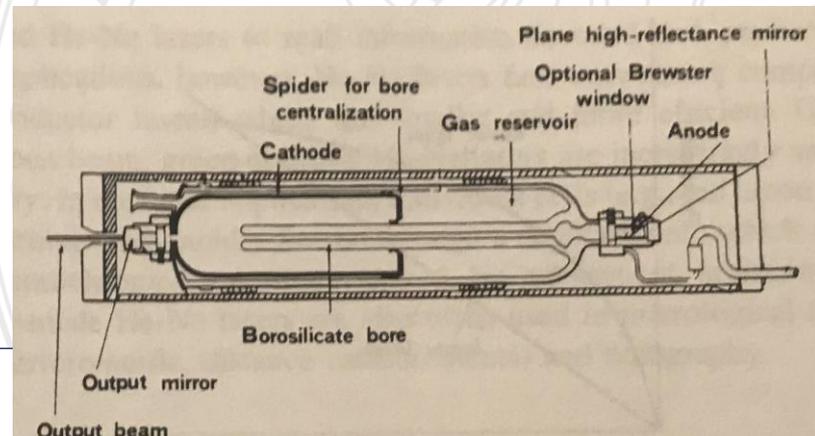
L'efficienza è molto bassa perchè l'energia di eccitazione è molto più grande della transizione laser.

La potenza ha un massimo per una corrente ottimale: questo è dovuto al fatto che lo stato eccitato dell'He viene spopolato all'aumentare della corrente.

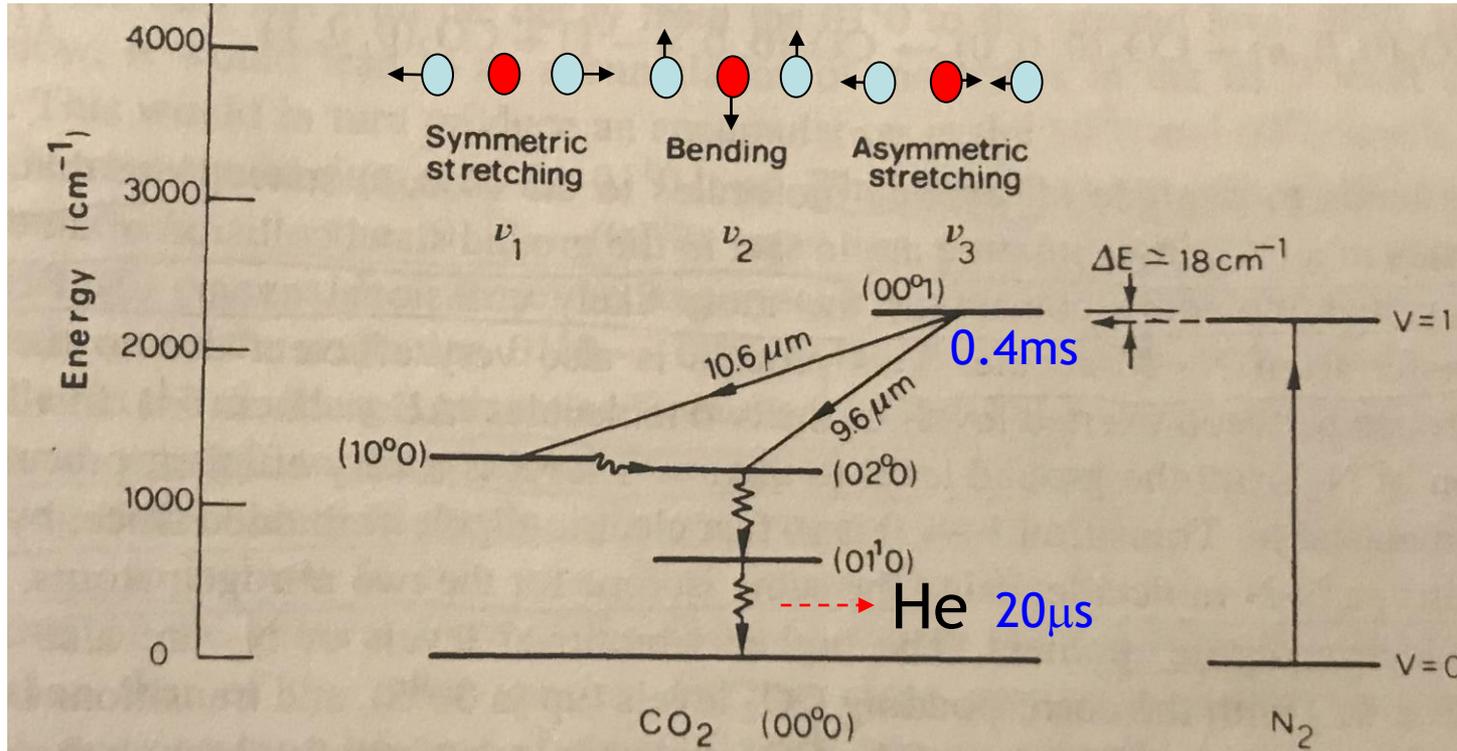
$$\sigma = 30 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2$$

Larghezza di riga (Doppler) 1.7GHz

Pressione (Torr) 4 (He) 0.8 (Ne)



# Laser CO<sub>2</sub>



Potenze molto elevate fino a 100kW, grande efficienza (circa 20%)

15 Torr (1:1:8 CO<sub>2</sub>:N<sub>2</sub>:He)

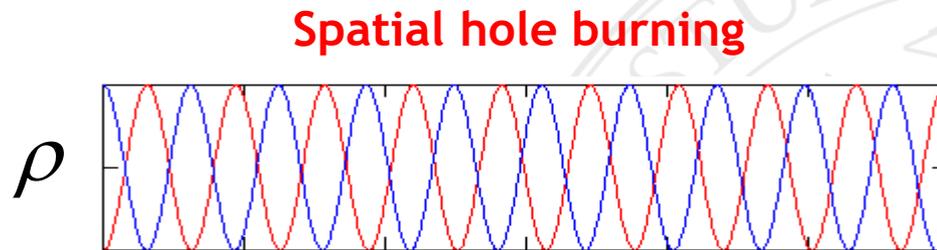
Il livello 001 viene popolato per eccitazione elettrica diretta e per trasferimento risonante da N<sub>2</sub> metastabile (non ha dipolo elettrico). Il livello 010 viene spopolato per trasferimento collisionale su He (il salto energetico da 010 a 000 deve trasferire energia vibrazionale in traslazionale quindi ho bisogno di un atomo leggero come l'He)

# Funzionamento in multimodo (modi longitudinali)

Poiché all'equilibrio il guadagno é uguale alle perdite sembrerebbe giusto affermare che il Laser deve funzionare su un singolo modo della cavità, ovvero, quello che guadagna di più.

Ma dalle misure fatte sappiamo che non é così, perché?

**Nel caso di allargamento di riga omogeneo:** possono coesistere più modi se questi vedono zone diverse del mezzo attivo. Ciò é possibile perché i modi formano onde stazionarie all'interno della cavità e queste hanno i picchi in punti diversi per modi diversi.



Va inoltre considerato che su una larghezza di riga di 120GHz (Nd:YAG) la differenza di guadagno tra il modo centrale ed il primo vicino (distante ad esempio 300MHz) é piccolissima (circa  $10^{-5}$ ), quindi sono sufficienti piccolissime variazioni dell'inversione di popolazione per rendere efficiente lo spatial hole burning.



Nel caso di due modi vicini abbiamo:

**Modo1:** caratterizzato da un sezione d'urto di emissione stimolata  $\sigma_1$

**Modo2:** caratterizzato da un sezione d'urto di emissione stimolata  $\sigma_2$

Se poniamo  $\sigma_1 > \sigma_2$  allora per ottenere lo stesso guadagno per i due modi dovrà essere  $N_1 < N_2$  e ciò è possibile solo se i due modi si spartiscono **zone diverse** del mezzo attivo.

Per sua natura lo spatial hole burning permette di ottenere un funzionamento multimodo su un piccolo numero di modi (tipicamente 3-4 longitudinali), questo perché l'inversione di popolazione viene modulata attraverso sinusoidi ovvero da funzioni relativamente larghe.

Al tempo stesso però a causa del fatto che tipicamente la  $\sigma$  per i modi vicini è molto simile lo spatial hole burning risulta particolarmente efficiente e “difficile” da eliminare (vedi funzionamento in singolo modo).

Diverso il discorso per quanto riguarda i modi con diversi indici trasversi. In questo caso per eliminarli basta inserire un'apertura circolare in cavità oppure progettare la cavità in modo che nel mezzo attivo riesca a passare solo il modo fondamentale.

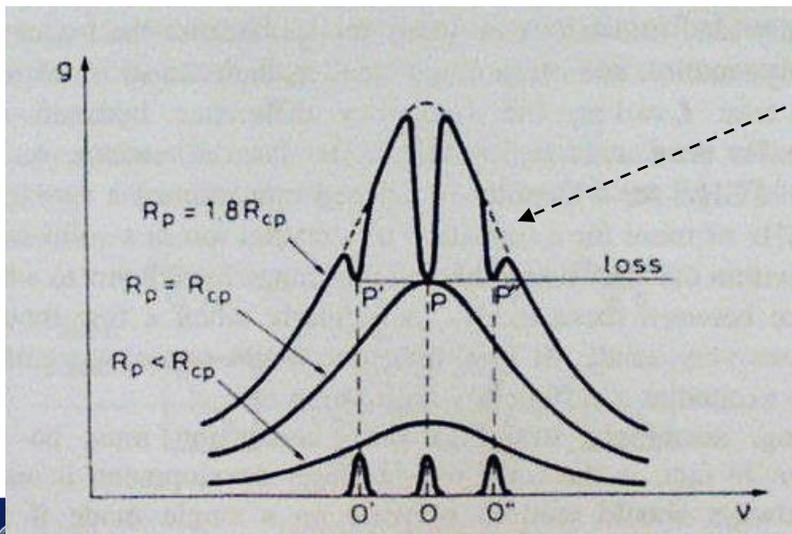


Nel caso di allargamento di riga non-omogeneo modi diversi, ovvero frequenze diverse, sono amplificate nel mezzo attivo da atomi diversi. Nel caso ad esempio di un laser ad Ar abbiamo un allargamento Doppler e dunque ioni diversi con diverse velocità possono sostenere modi con frequenze diverse.

Quindi aumentando la potenza di pompa arriviamo in soglia progressivamente per modi con sezioni d'urto sempre più basse e possiamo ottenere un funzionamento in multimodo con moltissimi modi.

Si può dire la stessa cosa anche per un laser Nd:glass dove zone diverse del mezzo si attivano a potenze di pompa diverse.

Complessivamente si ottiene che la larghezza di riga del mezzo attivo viene “bucata” dai modi della cavità ottenendo un profilo a pettine:



Curve di guadagno per diverse potenze di pompa. Ovviamente per i modi che progressivamente si accendono l'inversione di popolazione satura al valore che permette di ottenere:

**guadagno=perdite**. Questo fenomeno si chiama:

**Spectral hole burning**

Adesso sappiamo perché un laser può funzionare in multimodo, quindi rimane da capire cosa determina la **larghezza spettrale** del singolo modo del laser.

Lo spettro dipende dal rumore e questo può avere diverse origini, in particolare dobbiamo tenere in considerazione le vibrazioni meccaniche degli specchi e la turbolenza dell'aria all'interno della cavità. Questi fenomeni cambiano il FSR e quindi fanno vibrare la frequenza di risonanza determinando una larghezza spettrale tipicamente nel range dei kHz.

Anche le fluttuazioni della potenza di pompa determinano delle fluttuazioni di ampiezza e quindi una larghezza spettrale.

Inoltre nel caso di funzionamento multimodo i modi entrano in competizione tra loro dando origine a complicate dinamiche caratterizzate da fluttuazioni complesse dei singoli modi. Altra cosa fondamentale da considerare (prossima lezione) sono le oscillazioni di rilassamento del laser.

Nel caso a singolo modo esiste un limite minimo alla larghezza spettrale che ha origini quantistiche, questo limite è dato dalla formula di Schawlow-Townes:

$$\Delta\nu_{L-quantistica} \approx \frac{2\pi h\nu_L(\Delta\nu_c^2)}{P} = \begin{cases} \approx \text{mHz} & \text{Laser a stato solido e gas} \\ \approx \text{MHz} & \text{Laser a diodo} \end{cases}$$

Dove  $\Delta\nu_c$  è la larghezza di riga del modo della cavità ovvero:  $\Delta\nu_c = \frac{FSR}{F}$   
dove F è la finesse della cavità.

Nel caso di un laser a diodo la cavità è molto piccola e quindi questo limite può essere relativamente grande e facilmente misurabile.

Larghezza di riga minima dei laser dovuta alle fluttuazioni di vuoto (equazione di Schawlow-Townes):

Inizio a considerare una cavità senza emissione stimolata che quindi decade con il tempo tipico di perdita della cavità:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\tau_c} \phi \Rightarrow \Delta\nu_c = \frac{1}{2\tau_c} \quad \text{Cavità vuota}$$

Adesso aggiungo l'emissione stimolata e impongo la condizione di equilibrio (Laser):

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( cG_N - \frac{1}{\tau_c} \right) \phi = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta\nu_L} = 0 \quad \text{Laser all'equilibrio senza fluttuazioni di vuoto (e ponendo } V_a = V_{\text{eff}})$$

La larghezza di riga del modo su cui sta funzionando il laser è 0 perchè non ci sono rumori. Adesso aggiungo il contributo dovuto alle fluttuazioni di vuoto.

Lo stato di vuoto sul modo del laser contiene un numero 0 di fotoni (con fluttuazione 0 sul numero di fotoni). Ma la varianza del campo elettrico dello stato di vuoto non è nulla e questa fluttuazione perturba gli elettroni del mezzo attivo e ne stimola l'emissione stimolata.



Questa emissione stimolata dovuta alle fluttuazioni di vuoto quindi è la responsabile di ciò che chiamiamo emissione spontanea. Ovvero, stiamo analizzando il rumore del laser dovuto alle fluttuazioni di vuoto e stiamo dicendo che queste fluttuazioni sono le stesse generate dall'emissione spontanea. La visione intuitiva è che l'emissione spontanea introduce rumore nel modo del laser perchè aggiunge fotoni in modo casuale poichè il decadimento è random.

Il campo elettrico di vuoto sul modo del laser è caratterizzato da una varianza equivalente al contributo di  $\frac{1}{2}$  di fotone quindi nell'equazione del bilancio energetico del laser aggiungeremo questo contributo:

$$V_a \beta_0 N \phi - \frac{1}{\tau_c} \phi \neq 0 \quad \text{pompa anche } \beta_0 \approx \frac{\omega_c}{V_a}$$

$$\text{quindi } \omega_c N - \frac{1}{\tau_c} \neq 0$$

E' diverso da 0 perchè devo aggiungere il contributo dovuto alle fluttuazioni di vuoto. Posso porre:

$$\omega_c N \left( \phi + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\tau_c} \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_c N = \frac{1}{\tau_c} \frac{\phi}{\phi + \frac{1}{2}}$$



Adesso posso riscrivere l'equazione per il numero di fotoni nella cavità laser considerando questo ultimo bilancio energetico. Lo stato di vuoto però non contiene fotoni quindi l'equazione è:

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \sigma_c N - \frac{1}{\tau_c} \right) \phi = \frac{1}{\tau_c} \left( \frac{\phi}{\phi + \frac{1}{2}} - 1 \right) \phi = - \frac{1}{\tau_c} \frac{\frac{1}{2}}{1 + \phi} \phi$$

$$= - \frac{1}{\tau_L} \phi \quad \Rightarrow \quad \tau_L = 2 \tau_c (1 + \phi) \approx 2 \tau_c \phi$$

Quindi il tempo di decadimento tipico del laser è molto più grande del tempo di decadimento tipico della cavità e dunque la sua larghezza di riga sarà molto più stretta rispetto a quella del modo della cavità.

$$\Delta \nu_L = \frac{1}{2\pi \tau_L} = \frac{1}{4\pi \tau_c \phi}$$

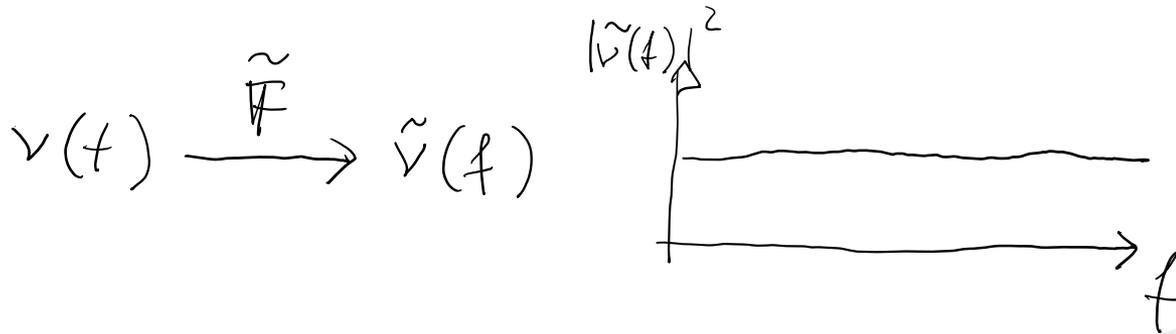
$$P = \frac{h\nu}{\tau_c} \phi$$

Trascuro le  
perdite  
interne

$$\Rightarrow \Delta \nu_L = \frac{1}{4\pi \tau_c^2} \frac{h\nu}{P} \cdot \tau_c = \frac{1}{2\pi \Delta \nu_c} \Rightarrow \Delta \nu_L = \pi h\nu \frac{\Delta \nu_c^2}{P}$$

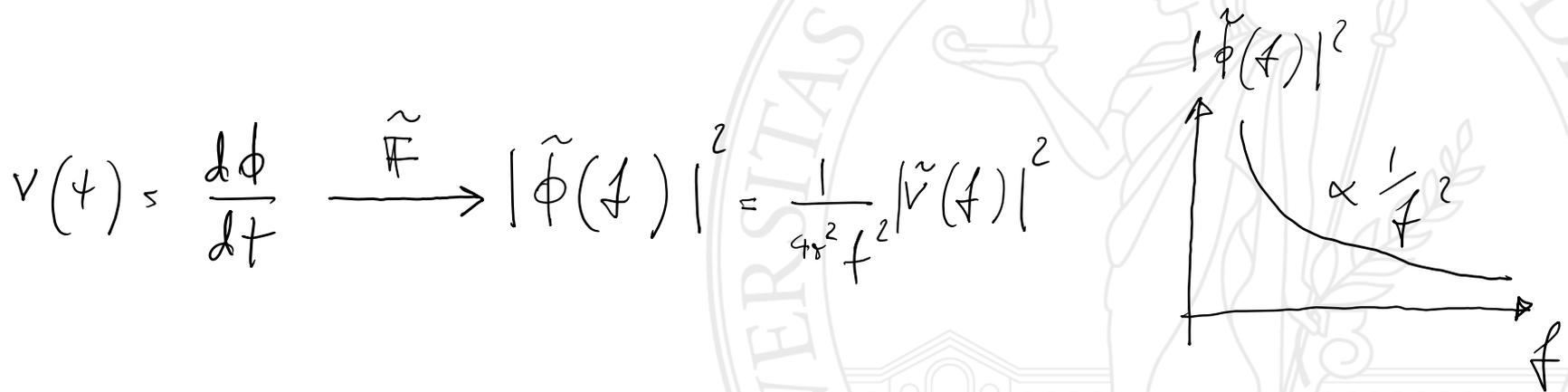


Per quanto riguarda lo spettro di questo rumore dovuto alle fluttuazioni di vuoto ci aspettiamo che sia lo stesso a tutte le frequenze (rumore bianco). Ovvero, abbiamo una frequenza che fluttua nel tempo e la sua trasformata di Fourier ci fornisce uno spettro piatto:



La varianza della fluttuazione è la stessa a tutte le frequenze

La frequenza istantanea del laser sarà la derivata temporale della sua fase, quindi possiamo ricavare come va il rumore sulla fluttuazione della fase:



# Funzionamento in singolo modo longitudinale

Il modo più efficiente per far funzionare un laser su un singolo modo longitudinale (se la larghezza di riga è molto più grande del FSR) è quello di realizzare una cavità a ring con un diodo di luce all'interno.



In cavità rimane solo l'onda che viaggia in senso anti-orario e quindi non abbiamo onda stazionaria ovvero non abbiamo spatial-hole-buring.

Il diodo di luce è costituito da una  $\lambda/2$  (HWP) un Faray-rotator (FR) e da un Brewster-plate (BP).

Per capire il funzionamento di questo tipo di laser è necessario capire prima come funziona il Farady-rotator



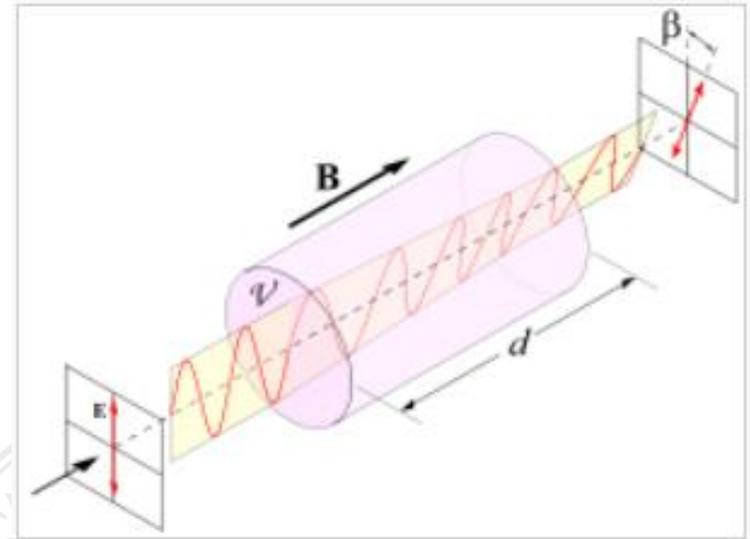
Il Farady-rotator consiste di un cristallo di Terbium-Gallium-Garnet (TGG) immerso un un campo magnetico longitudinale creato per mezzo di un magnete permanente.

Quando la polarizzazione lineare attraversa il cristallo subisce una rotazione di:

$$\beta = VdB$$

Dove  $V$  è la costante di Verdet (40 rad/T·m @ 1064nm).

Nel caso del laser in figura  $\beta=15$  gradi (da cui si ricava un campo magnetico di circa 0.3T )

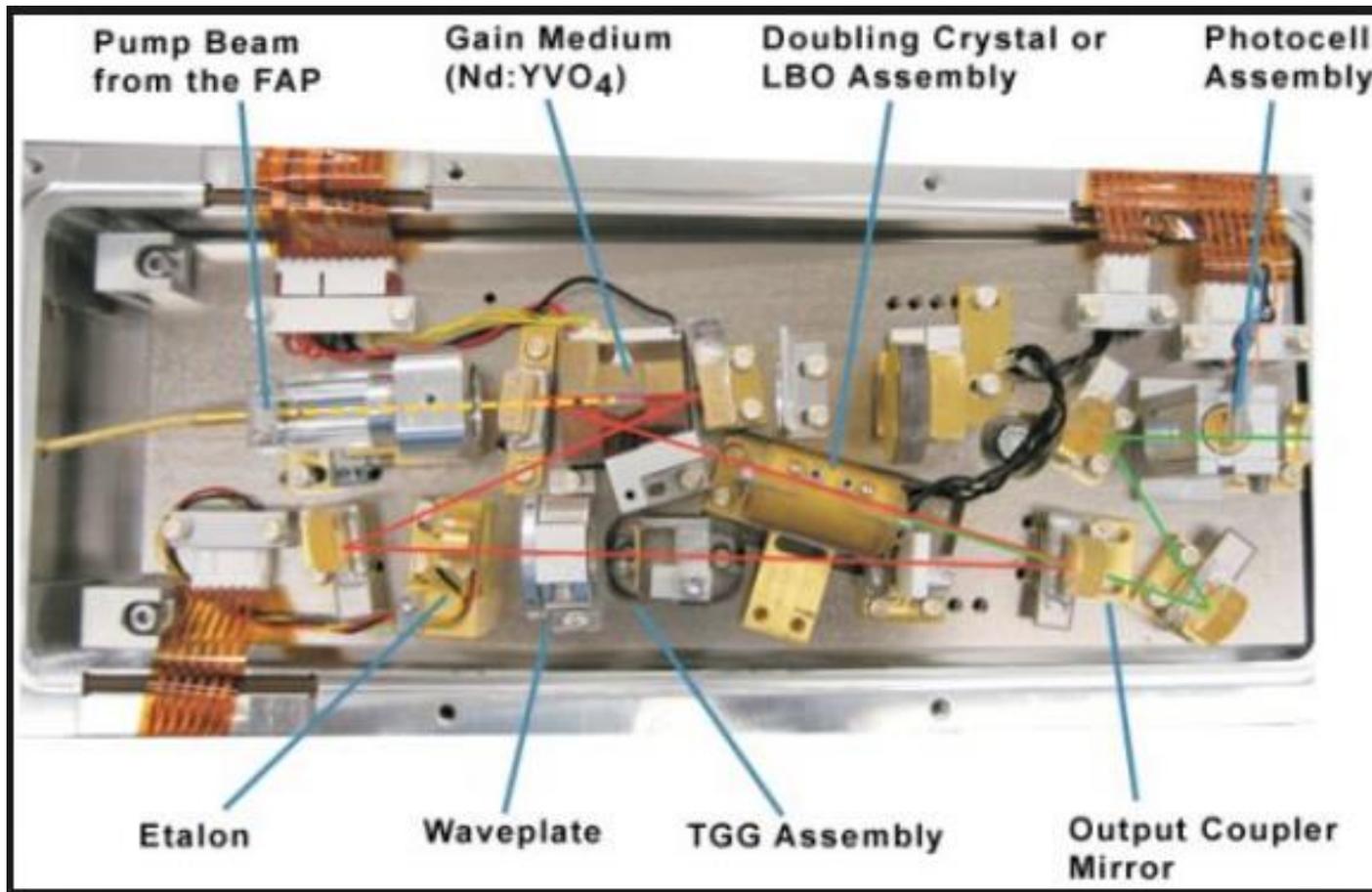


Il punto è che l'orientamento del campo magnetico spezza la simmetria e quindi l'elicità dell'onda è diversa se l'onda entra nel verso del campo o nel verso opposto. Ovvero, ruota in senso orario se concorde al campo e in senso anti-orario se viaggia in senso opposto.

Nel laser in fig. l'onda che circola in senso antiorario con pol. H viene ruotata di 15gradi dalla  $\lambda/2$  e poi di -15gradi dal FR e quindi attraversa "senza perdite" il BP. L'onda opposta viene ruotata complessivamente di 30gradi e quindi per lei le perdite sono molto più gradi del guadagno.



Questo che ho descritto è il tipico metodo con cui vengono costruiti i laser a singolo modo commerciali. In figura ne vediamo uno smontato:

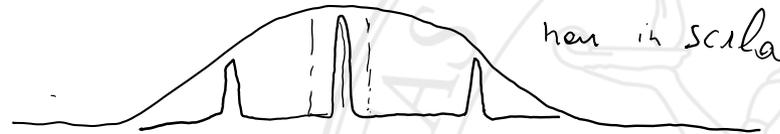


## Funzionamento in singolo modo longitudinale: metodo Etalon

Considero un laser Nd:YAG. La larghezza di riga del mezzo attivo è **120GHz**. Consideriamo un FSR di **300MHz** (quindi una cavità lunga 500mm)



**Etalon1:** due specchi affacciati (una piccola cavità) con FSR di 30GHz (5mm) e una finesse di 100 (R circa 97%). La larghezza di riga dell'etalon è  $30\text{GHz}/100=300\text{MHz}$ . Quindi questo etalon è capace di eliminare i modi longitudinali vicini. E in questo caso anche quelli lontani perchè la larghezza di riga complessiva è solo 150GHz (quindi i modi laterali sono già molto attenuati). Per tunare l'etalon posso ruotarlo o collegare uno dei due specchi ad un piezo cilindrico forato. **Nota:** l'etalon non può essere perpendicolare all'asse del laser altrimenti il laser si metterà a laserare sul riflesso dell'etalon (**esercizio**)



**Etalon2:** se la larghezza di riga del mezzo attivo è più grande (ad esempio un Nd:glass con 5.4THz) posso aggiungere un secondo etalon che taglia i modi laterali del primo etalon. Quindi deve avere un FSR dell'ordine del THz e una finesse tale che la larghezza dei suoi modi sia dell'ordine delle decine di GHz. Quindi potrebbe essere una lamina di vetro spessa qualche centinaio di  $\mu\text{m}$  probabilmente anche uncoated (in questo caso il tunaggio si può fare solo ruotando la lamina)



**Mode hopping:** se due modi si trovano in posizioni simmetriche rispetto alla riga di guadagno è facile avere un mode-hopping, ovvero il laser salta da un modo all'altro. Questo è un problema in particolare quando si vuole stabilizzare una cavità esterna rispetto al laser.

Inoltre quando il laser salta da un modo all'altro per un intervallo di tempo funziona in multimodo e anche questo è un problema.

Per evitare il mode-hopping un metodo molto efficiente è quello di inserire un cristallo che genera seconda armonica all'interno della cavità (come nel caso dei due laser visti a pg. 11, 36).

Il punto è che la generazione di seconda armonica introduce più perdite sul modo piccolo (che vorrebbe accendersi) rispetto a quelle che subisce il modo già funzionante (cosa che appare contro-intuitiva):

Il processo di generazione di seconda armonica è non lineare e dunque le perdite vanno come il quadrato del campo elettrico (costituito da 2 modi). Quindi complessivamente le perdite saranno proporzionali a:

$$loss \propto I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2$$

Dove  $I_1$  e  $I_2$  sono le intensità del modo funzionante e di quello piccolo che vorrebbe accendersi



Le perdite relative per i due modi sono:

$$\delta_{1,2} = \frac{\delta I_{1,2}}{I_{1,2}} \propto I_{1,2} + 2I_{2,1}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{I_2 + 2I_1}{I_1 + 2I_2} \approx 2$$

Ovvero, poiché  $I_1 \gg I_2$  le perdite relative del modo 2 sono il doppio delle perdite relative del modo 1



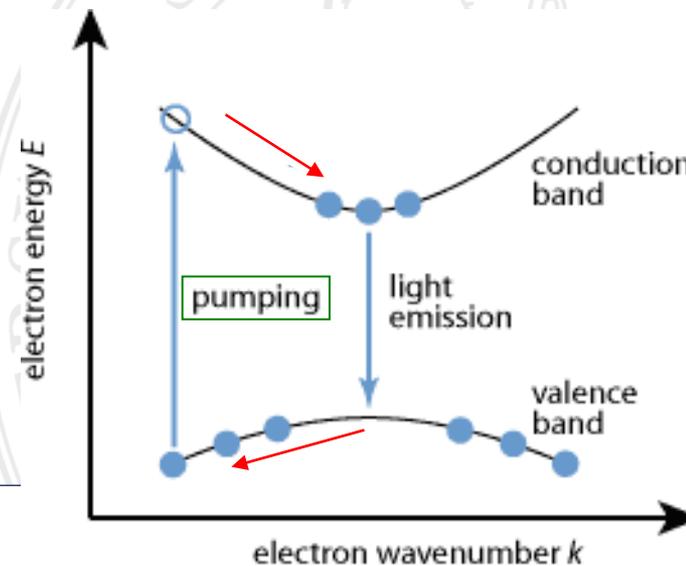
# Appendice: laser a semiconduttore

In linea di principio non ci sono differenze rispetto agli altri laser, l'unico punto non banale è capire in che modo è possibile ottenere inversione di popolazione tra i livelli coinvolti in questo tipo di laser.

Tipicamente un semiconduttore è caratterizzato da una banda di conduzione (vuota) e una banda di valenza (piena) dove gli elettroni possono occupare stati caratterizzati da funzioni d'onda delocalizzate (sostanzialmente sia gli elettroni della banda di conduzione sia quelli della banda di valenza sono particelle libere con una massa effettiva che dipende dalla struttura delle bande).

Quello di cui abbiamo bisogno è un meccanismo di pompaggio che prenda gli elettroni dalla banda di valenza e li ecciti in banda di conduzione ottenendo così un'inversione di popolazione.

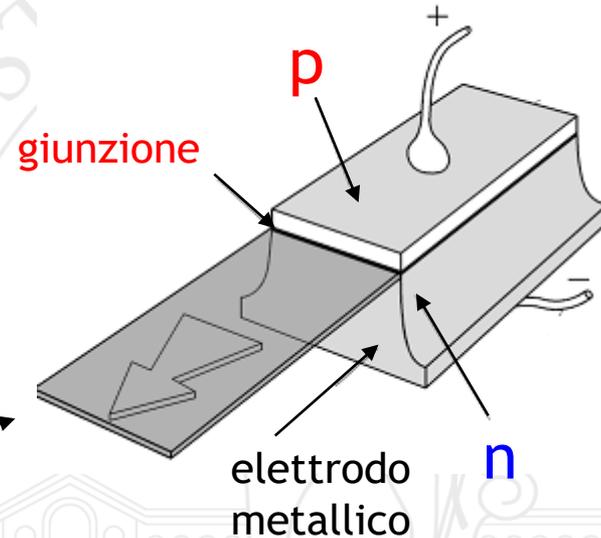
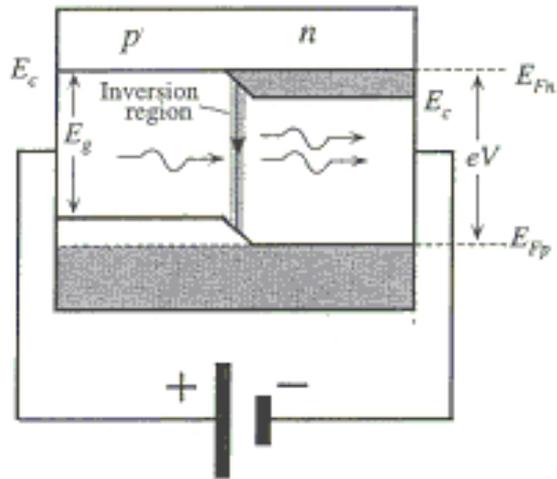
Con le frecce rosse sono indicati i processi non radiativi velocissimi (1ps) che determinano inversione di popolazione tra il fondo della banda di conduzione e il picco della banda di valenza



Il metodo di pompaggio comunemente usato consiste nel far circolare corrente in un semiconduttore caratterizzato da una parte drogata **n** e una drogata **p** (diodo).

La parte drogata **n** è caratterizzata da una banda di conduzione che contiene elettroni, la parte drogata **p** è caratterizzata da una banda di valenza che contiene buche. Nella zona di giunzione gli elettroni di conduzione diffondono nel semiconduttore p e le buche diffondono nel semiconduttore n per cui è possibile ottenere inversione di popolazione.

Quando si fa circolare corrente nel diodo nella zona di giunzione si viene a creare (al di sopra di una certa corrente di soglia che è dell'ordine di  $10^5 \text{A/cm}^2$ ) l'inversione di popolazione voluta.

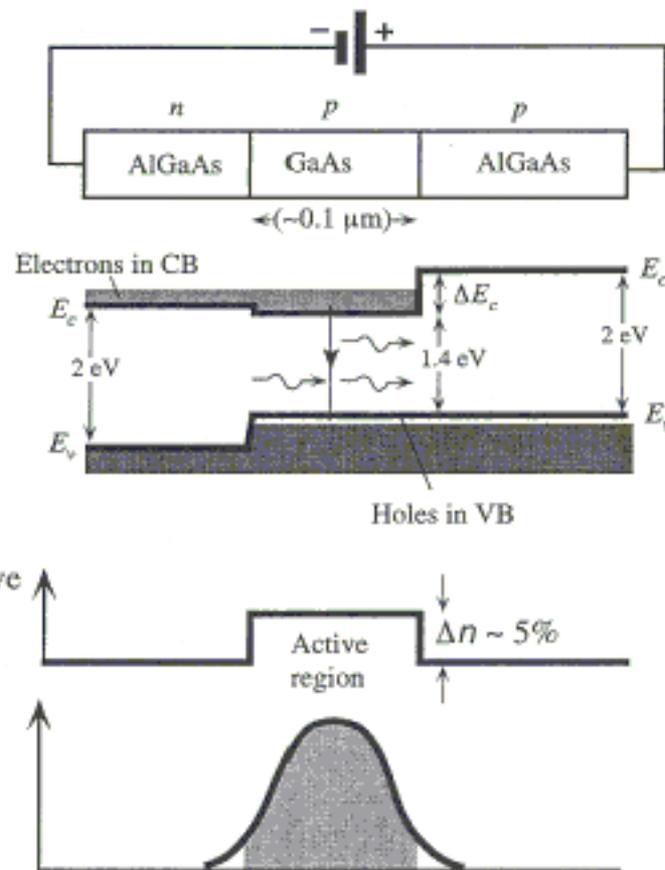


Tipicamente la dimensione è dell'ordine dei  $\mu\text{m}$  in verticale e dell'ordine del centinaio di  $\mu\text{m}$  in orizzontale (fascio astigmatico)

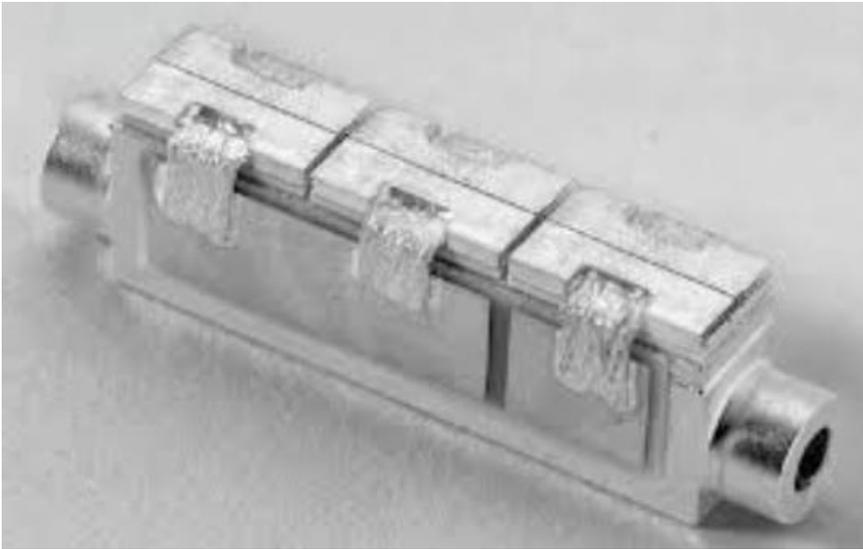
La struttura a diodo descritta rappresenta il caso di una homo-junction nel senso che il semiconduttore usato è uno ad esempio GaAs. In questo caso la regione di diffusione è relativamente grande ed inoltre il modo della radiazione sconfinata anche nelle zone dove non è presente inversione di popolazione. A causa di ciò la corrente di soglia è molto alta ed il laser può funzionare solo a temperatura criogenica.

Questo tipo di laser a diodo (inventato nel 1962) non viene più usato mentre sono usati i diodi composti da diversi tipi di semiconduttori (Double-heterostructure) inventati nel 1969.

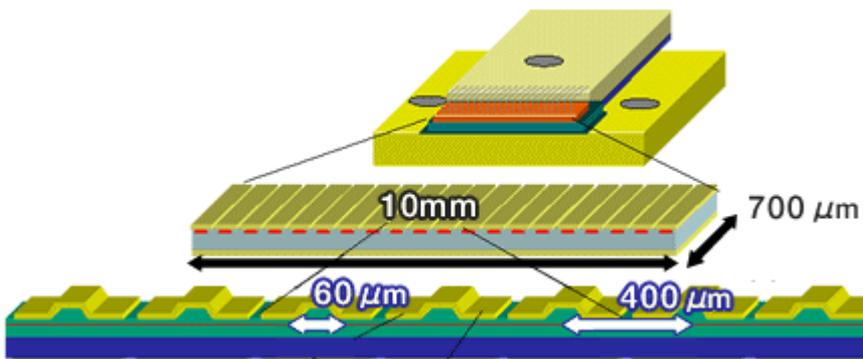
Usando materiali di tipo diverso si viene a creare una barriera per le cariche che limita la larghezza della zona attiva. Inoltre poiché l'indice di rifrazione della zona centrale è più alto rispetto a quello laterale il modo viene confinato e non deborda nelle zone prive di inversione. Ciò permette di ottenere correnti di soglia dell'ordine del  $\text{kA/cm}^2$  e quindi laser capaci di lavorare a temperatura ambiente.



Tipici laser a diodi sono composti da InGaAlP/GaAs (720-850nm) AlGaAs/GaAs (1200-1650nm) InGaAsP/InP(900-1100nm) InGaAs/GaAs (630-700nm).



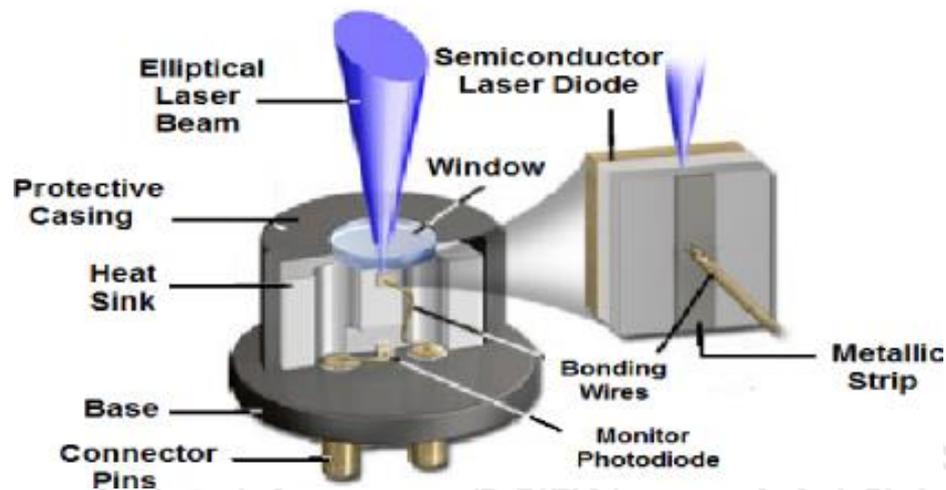
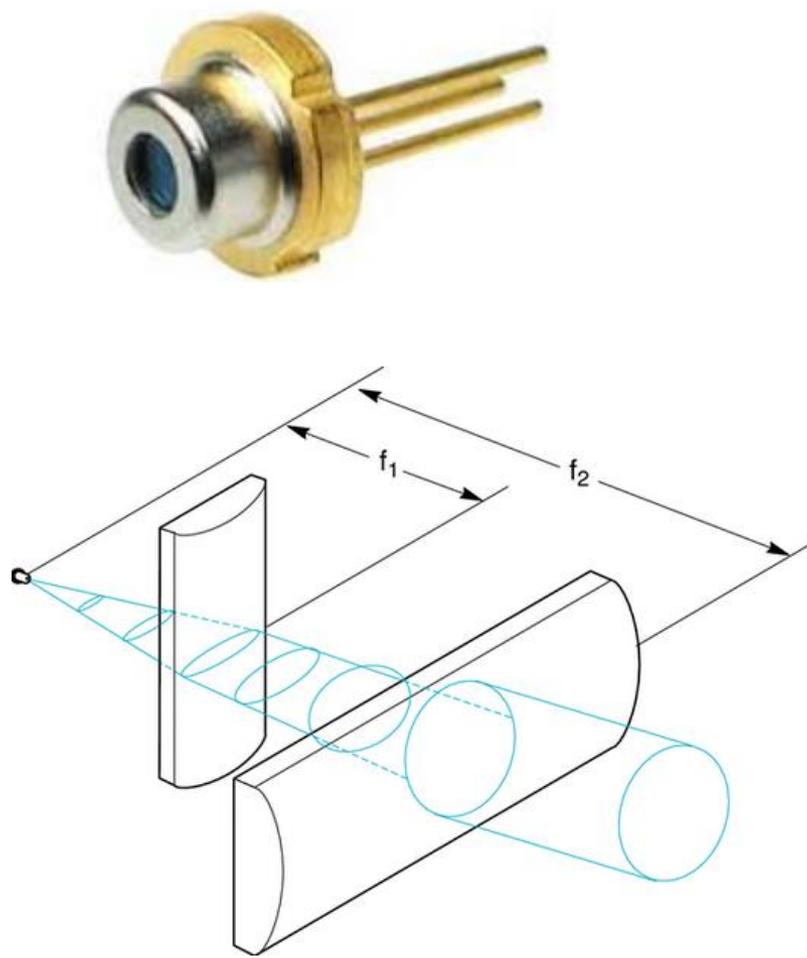
Gli array di diodi come quello usato per pompare il Nd:YAG suddivisi in barre e ognuna di queste barre è formata da moltissimi laser a diodo come si vede nella figura sotto.



La distanza tra i singoli laser è dell'ordine del centinaio di μm.



I laser a diodo singoli sono comunemente inseriti in un contenitore come quello in figura. Le potenze tipiche vanno dai mW al W e si trovano in commercio laser capaci di generare lunghezze d'onda da 375nm fino al lontano IR.



Per correggere l'astigmatismo di un laser a diodo si possono usare due lenti cilindriche con diversa focale.

