UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Transient Laser Behavior

Oscillazioni di rilassamento e Q-Switch

Simone Cialdi

Outline

Analisi delle ultime misure

- Argon - determinazione parametri cavità e R specchio uscita
- Ti:SA - dimensione modo nel mezzo attivo
- Nd:YAG – efficienza e perdite interne

Oscillazioni di rilassamento:

- Caso perturbativo e non perturbativo
- Spettro delle oscillazioni di rilassamento
- Caso multimodo
- Analisi misure su oscillazioni di rilassamento

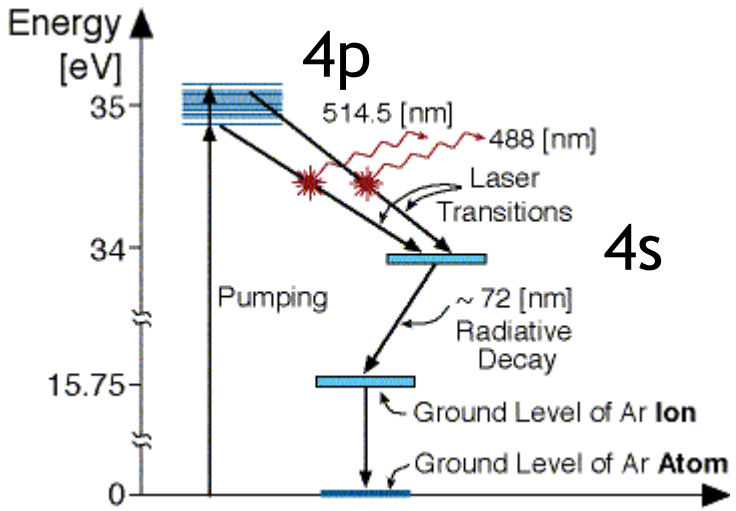
Generazione di impulsi di alta energia:

- Metodo del Q-Switch

Introduzione all'ottica non lineare

- Generazione di seconda armonica intracavity: oscillatore sovrasmorzato

Argon



Le transizioni che ci interessano sono quelle dello ione tra il 4p e il 4s. Il pompaggio avviene per mezzo di una scarica elettrica attraverso due step: prima l'atomo Ar interagisce con un elettrone della scarica ed un elettrone del livello 3p viene rimosso formando lo ione. Poi lo ione interagisce con un secondo elettrone della scarica e un elettrone del 3p viene ccitato sul sul 4p (e anche sul 4s).

E' possibile ottenere inversione di popolazione perchè il tempo di decadimento spontaneo del 4p è circa 6ns mentre il 4s vive circa 1ns.

Come si vede in figura il gap tra il livello 4s e il livello ground è molto grande rispetto alla transizione laser e dunque l'efficienza quantica di un laser ad Ar è molto bassa.

La larghezza di riga dei singoli salti è di tipo Doppler ed è circa 3.5GHz (T=3000K). Il laser funziona contemporaneamente su più modi e più livelli via spectral hole burning.

Poiché il processo di pompa avviene in due step il Rate di pompa è proporzionale alla corrente elettrica al quadrato.

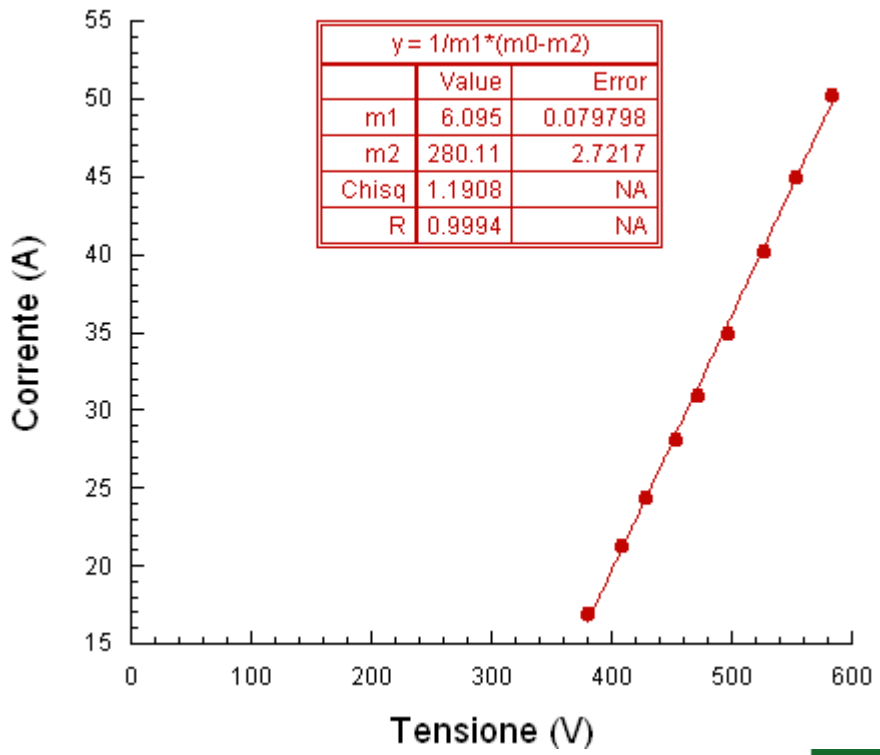
Nota: in questo caso quando aumentiamo la corrente della scarica la tensione non è approssimativamente costante come nel caso dei diodi:

$$P_{out} = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1}{2}S\left(\frac{R_p}{R_{p(soglia)}} - 1\right) = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1}{2}S\left(\left(\frac{I_p}{I_{p(soglia)}}\right)^{2} - 1\right)$$

$$I = \frac{1}{R_{eff}}(V - V_0)$$

È la resistenza elettrica del plasma → $R_{eff} \approx 6\Omega$

tensione di innesco → $V_0 \approx 280V$



P_{out} del laser ad Argon

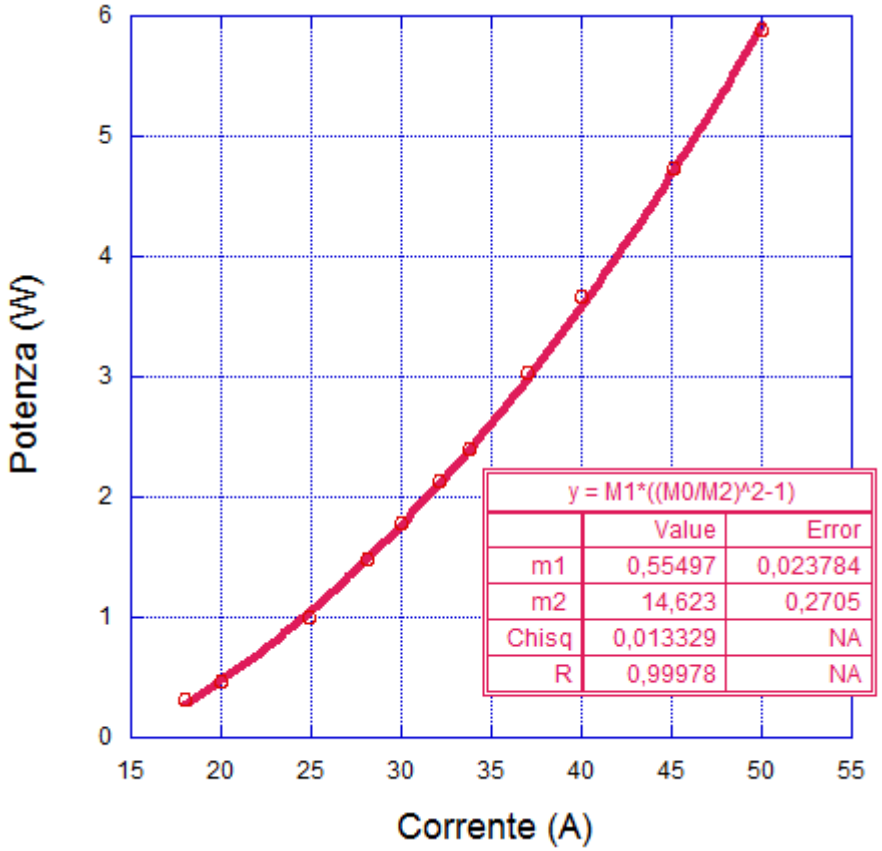
$$P_{out} = m1\left(\left(\frac{I}{m2}\right)^2 - 1\right)$$

Dal fit si ottiene:

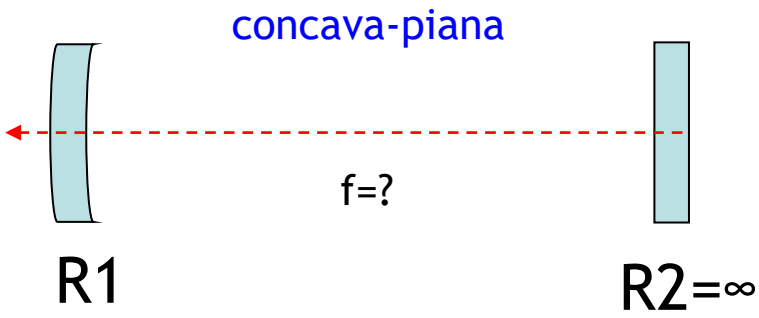
$$m_1 = 0.55 \pm 0.02W$$

$$m_1 = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1(R)}{2}S$$

Al momento non conosciamo S e quindi non possiamo stimare R



Determinazione dei parametri della cavità dell'Argon:

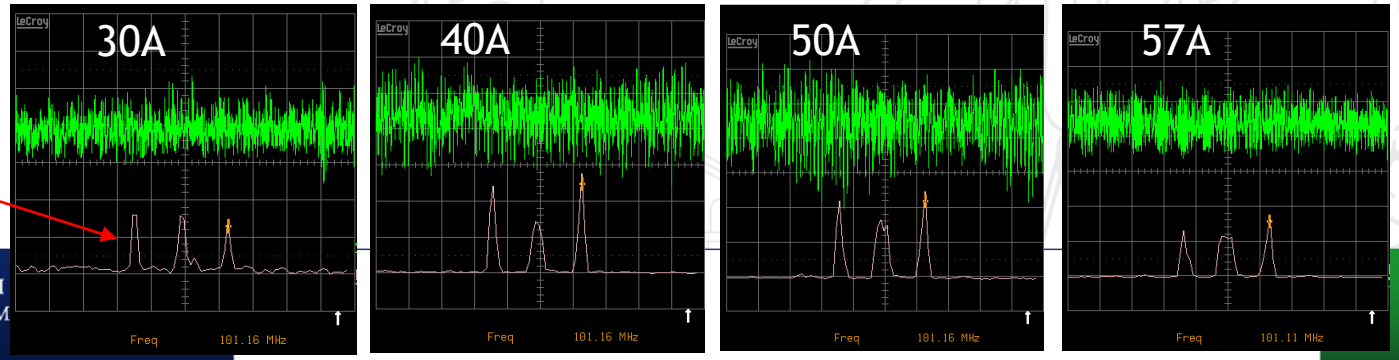


Troviamo la lunghezza effettiva della cavità misurando il FSR:

FSR=87.4MHz ⇨ L_{eff}=1716mm

La differenza di frequenza tra il modo: n+1,0,0 e il modo n,0,1 risulta indipendente dalla potenza di pompa. Quindi la focale termica se c'è è molto più grande dei raggi di curvatura degli specchi.

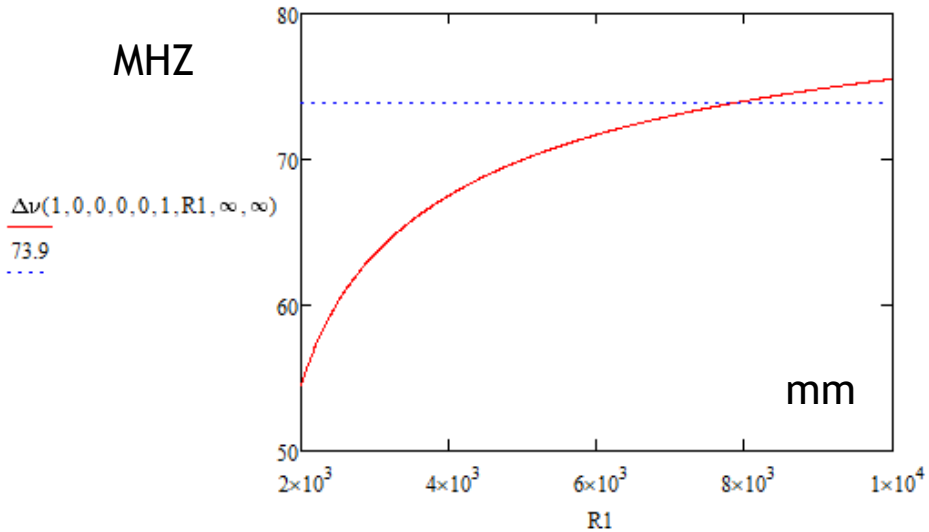
$\Delta\nu$=73.9MHz



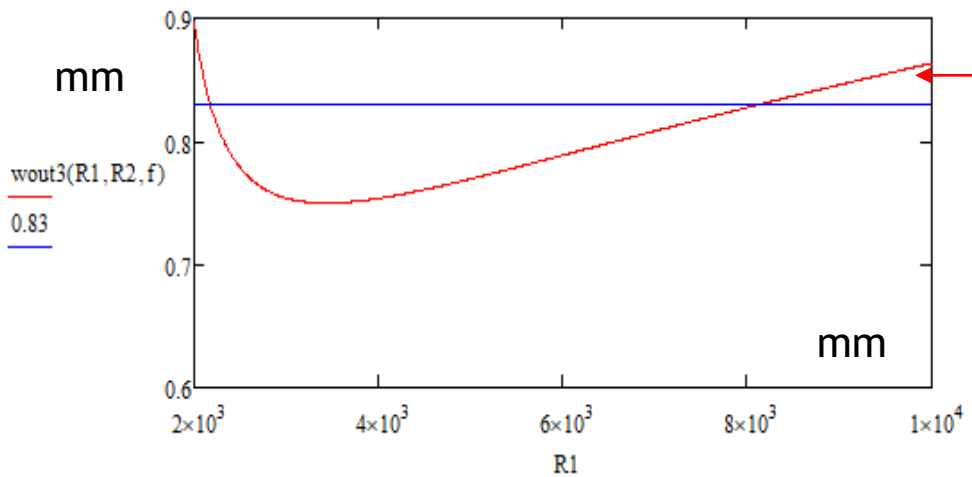
Scrivo la matrice di round-trip rispetto allo specchio di uscita:

$$Mrt3(R1,R2,f) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f = infinito



Dal parametro di stabilità ricavo la differenza in frequenza tra il modo 00 e lo 01. Confrontando la previsione teorica con il dato sperimentale ottengo il raggio di curvatura dello specchio di uscita. R1=8000mm



$$wout3(R1,R2,f) := \sqrt{\frac{\left|Mrt3(R1,R2,f)_{0,1}\right| \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - m3(R1,R2,f)^2}}$$

Con il valore di R1 ricavo lo spot all'uscita del laser: w=0.83mm

Considero quindi una cavità piana-convessa con R1=8000mm con Leff=1716mm. Trovo lo spot nella cavità e quindi l'area:

$$S = \frac{1}{2}\pi w^2 \qquad S \approx 1mm^2$$

Adesso avendo S posso trovare la riflettività dello specchio di uscita R1

$$m_1 = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1(R)}{2}S \qquad m_1 = 0.55 \pm 0.02W$$

3.5GHz Doppler (sul manuale si trova 6-10GHz ?)

Da cui ottengo:

R=67% ?? Misurata 85%

Sapendo che la sezione d'urto di emissione stimolata è: $\sigma = 25 \cdot 10^{-14} cm^2$

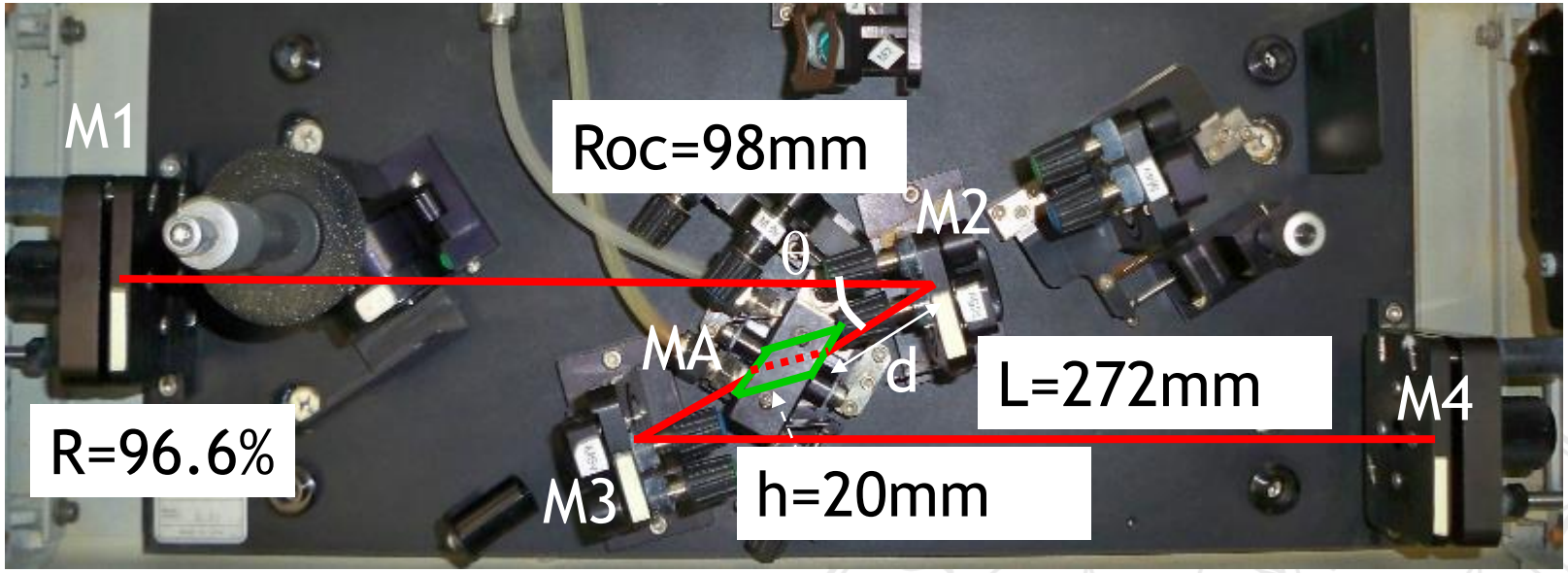
Trascurando le perdite interne trovo che l'inversione di popolazione è:

$$N = \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\frac{1}{\sigma l_a} \approx 4.8 \cdot 10^{15} m^{-3}$$

Da confrontare con la densità di un gas con una pressione di circa 0.1mbar (esercizio)

Ti:Sa

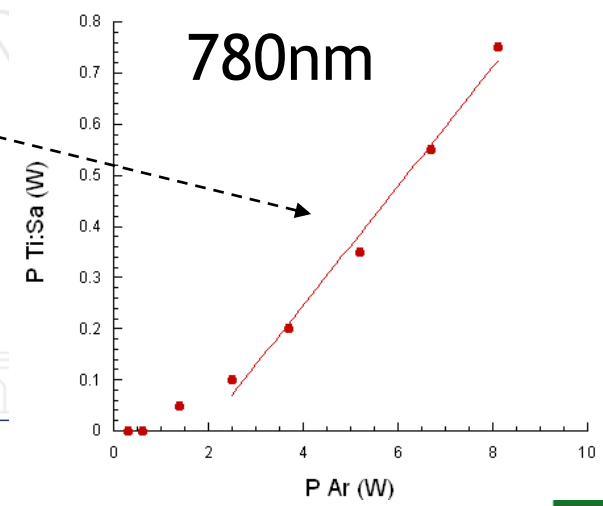
FSR=221MHz



Mi aspetto:

$$P_{out} = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1}{2}S\left(\frac{P_{Ar}}{P_{Ar,Th}}-1\right) = m1\left(\frac{P}{m2}-1\right)$$

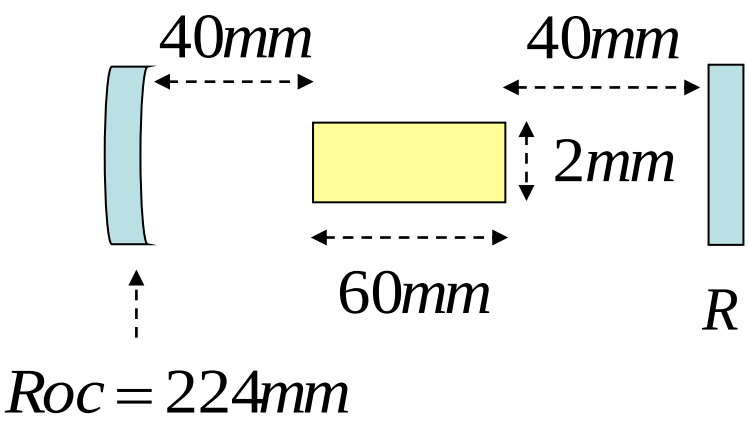
Ottengo: $m1 = 0.22 \pm 0.04W$

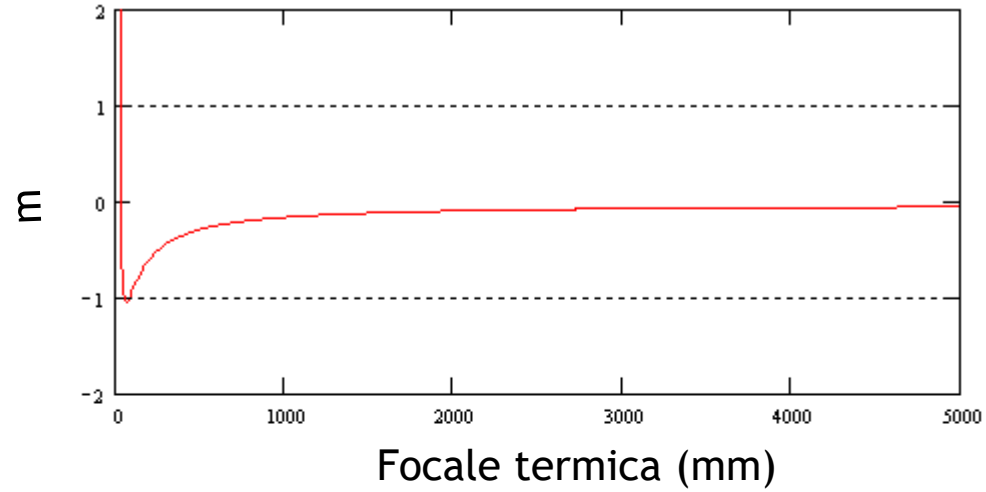


Da cui (sapendo R) stimo uno spot di circa 50μm nel mezzo attivo

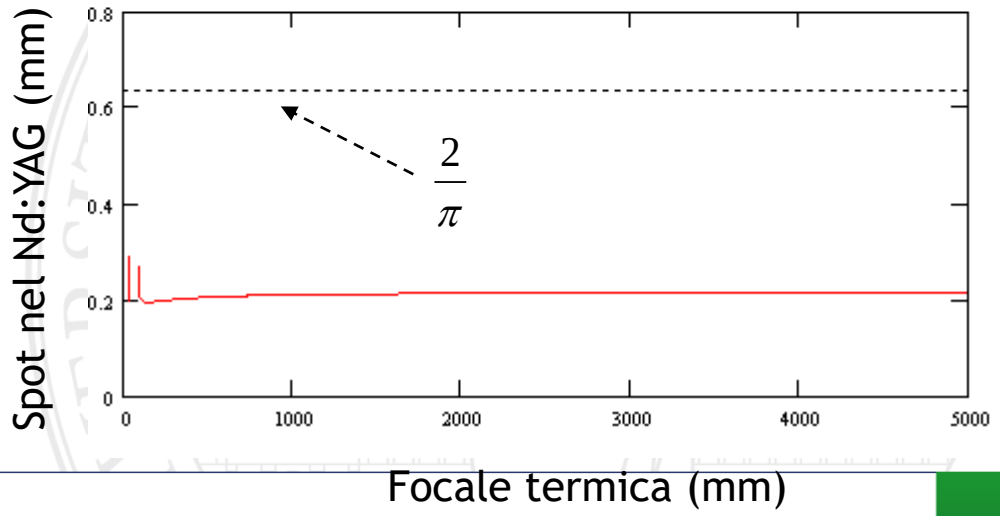
Nd:YAG

Vogliamo ottenere una potenza di uscita lineare rispetto alla potenza di pompa. Ciò vuol dire progettare una cavità insensibile alla focale termica con molti modi trasversi.





La dimensione dello spot non dipende da f e risulta molto più piccola della dimensione per il singolo modo



La P_{out} è:

$$P_{out} = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1}{2} S \left(\frac{P_p}{P_{p(soglia)}} - 1\right)$$

Dove S è la dimensione dello spot della radiazione multimodo

$$P_p(I) = \eta_r \frac{25A \cdot 15V}{25A - I_{sd}}(I - I_{sd})$$

Dove η_r è l'efficienza dei diodi di pompa alla corrente di 25A e I_{sd} è la corrente di soglia dei diodi. In realtà la tensione è solo approssimativamente costante (vedi I vs V diodo)

$$P_{p(soglia)} = \frac{h\nu_p}{\eta_t \eta_a \eta_q}\left(\frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2(\Delta)\right)\frac{1}{\sigma\tau} S_{ma}$$

Dove i vari η si riferiscono all'efficienza di trasferimento, di assorbimento e quantistica. S_{ma} è l'area del mezzo attivo. $\gamma 1$ sono le perdite dell'accoppiatore di uscita e $\gamma 2$ quelle interne (vedi lezione 1)

Facendo due misure di P_{out} vs P_p con due diversi accoppiatori di uscita possiamo trovare η_{tot} e $\gamma 2$

Trovo un sistema di due equazioni in due incognite ponendo:

$$P_p\left(I_{th_{1,2}}\right)=\eta_r\frac{25\cdot 15}{25-I_{sd}}\left(I_{th_{1,2}}-I_{sd}\right) \quad = \quad P_{p(soglia)_{1,2}}=\frac{h\nu_p}{\eta_t\eta_a\eta_q}\left(\frac{\gamma_{11,2}}{2}+\gamma_2(\Delta)\right)\frac{1}{\sigma\tau}S_{ma}$$

$$\begin{cases} a_{1,2}=A\left(I_{th_{1,2}}-I_{sd}\right) \\ b=h\nu_p\dfrac{S_{ma}}{\sigma\tau} \\ c_{1,2}=h\nu_p\dfrac{S_{ma}}{\sigma\tau}\dfrac{\gamma_{1_{1,2}}}{2} \\ A=\dfrac{25A\cdot 15V}{25A-I_{\mathrm{sd}}}, \quad \eta=\eta_p\eta_t\eta_a\eta_q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\eta-b\gamma_2=c_1 \\ a_2\eta-b\gamma_2=c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta=\dfrac{c_2-c_1}{a_2-a_1} \\ \gamma_2=\dfrac{a_1\eta-c_1}{b} \end{cases}$$

Da $\gamma 2$ posso poi trovare la perdite interne per singolo passaggio:

$\gamma_2=-\ln(1-\Delta)\approx\Delta$ L'approx. è valida nel caso di piccole perdite

Devo misurare: I_{sd} I_{th_1} I_{th2}

Misure 2014

Misure 2015

$$\Delta = 0.044 \pm 0.017$$

$$\Delta \approx 0.02$$

$$\eta = 0.11 \pm 0.013$$

$$\eta \approx 0.07$$

$$\eta_{opt} = \eta_r \eta_t \eta_a \eta_q = 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.82 = 0.18$$

La differenza tra il valore ottimale dell'efficienza e il valore misurato è dovuta in parte al fatto che i diodi hanno perso efficienza radiativa e in parte al fatto che il tubo di quarzo che contiene il mezzo attivo ha il deposito metallico riflettente rovinato (2014) o completamente rimosso (2015).

Per quanto riguarda Δ nel 2014 abbiamo trovato un valore più alto probabilmente perché l'area dello spot era più grande e quindi subiva maggiori passando nel mezzo attivo.

Misure 2014

Inversione di popolazione:

$$N = \left(\frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2 \right) \frac{1}{\sigma l_a}$$

lunghezza mezzo attivo

$$N_{90} = 5.8 \cdot 10^{22} m^{-3}$$

$$N_{78} = 1 \cdot 10^{23} m^{-3}$$

Poiché all'equilibrio il guadagno deve essere uguale alle perdite nel caso R=78% abbiamo bisogno di una maggiore inversione di popolazione (notare anche la dipendenza di N dalla lunghezza del mezzo attivo). Questa densità è molto inferiore al drogaggio che è circa $10^{25} m^{-3}$.

Emissione stimolata:

$$\tau_{stim} = \frac{1}{B_0 \phi} \qquad P_{out} = \frac{h\nu}{\tau_1} \phi$$

$$B_0 = \frac{\sigma c}{V_{eff}} \qquad \tau_1 = \frac{2L_{eff}}{\gamma_1 c}$$

$$\tau_{stim} = \frac{h\nu}{2\sigma} \frac{\gamma_1 S}{P_{out}}$$

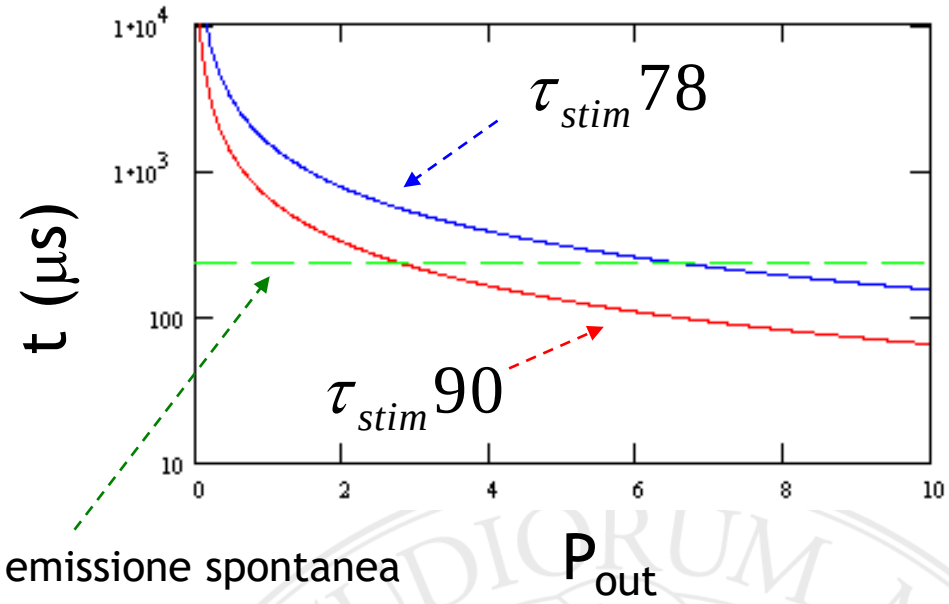
$$\left(\frac{h\nu}{\tau\sigma} \right) \frac{\gamma_1}{2} S = m$$

coeff. angolare

Misure 2014

L'emissione stimolata diventa competitiva rispetto a quella spontanea solo quando il laser emette più di 3W (R=90%) e più di 6W (R=78%).

L'emissione stimolata a parità di potenza di uscita è più veloce nel caso R=90 perchè all'interno del laser è presente una maggiore potenza.

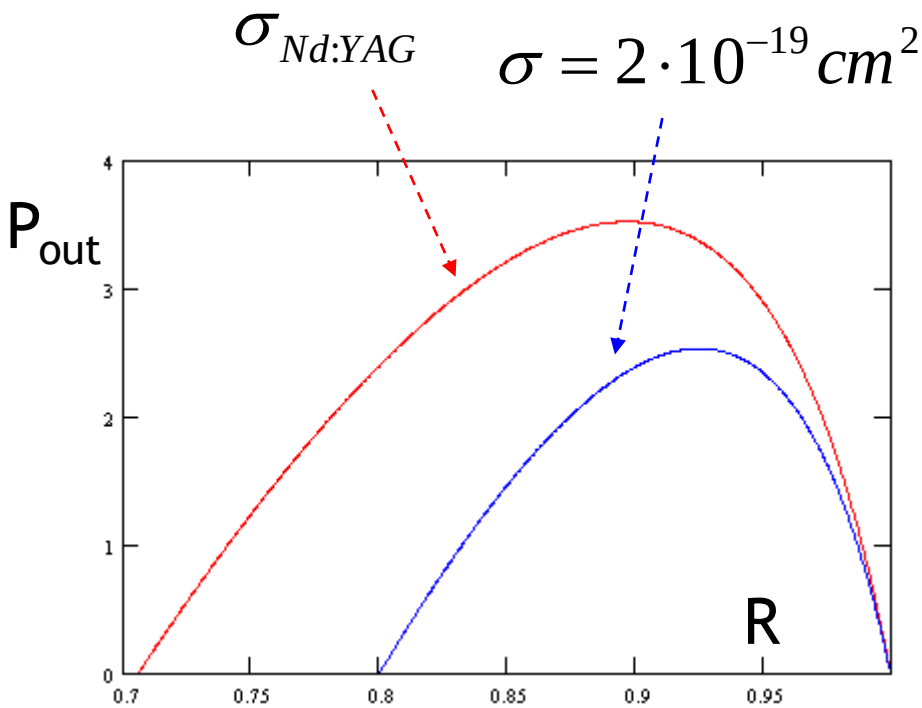


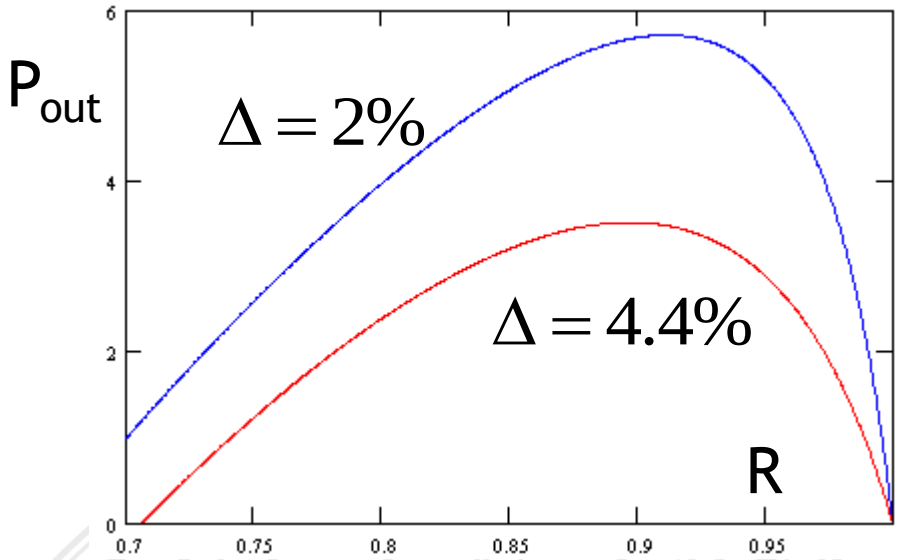
Ottimizzazione accoppiatore di uscita:

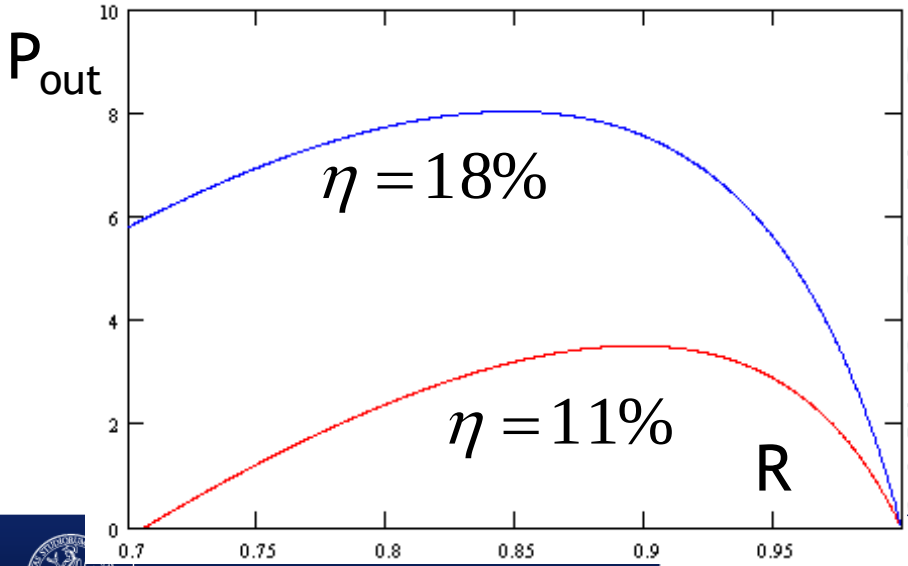
Adesso posso graficare la potenza di uscita in funzione della riflettività dell'accoppiatore di uscita a corrente fissata:

$$P_{out} = \left(\frac{h\nu}{\tau\sigma}\right)\frac{\gamma_1(R)}{2}S\left(\frac{\eta\frac{25A\cdot 15V}{25A-I_{sd}}(I-I_{sd})}{h\nu_p\left(\frac{\gamma_1(R)}{2}+\gamma_2(\Delta)\right)\frac{1}{\sigma\tau}S_{ma}}-1\right)$$

Misure 2014







La curva rossa è sempre la stessa e si riferisce al caso del 2014.

Oscillazioni di rilassamento

Fino ad ora abbiamo studiato il laser all'equilibrio. Quando il laser è all'equilibrio il guadagno è uguale alle perdite.

Quando accendiamo il laser la potenza deve passare da 0 (pochi fotoni) ad alcuni W. In questo transiente il guadagno non può essere uguale alle perdite altrimenti la potenza non potrebbe aumentare (il laser non è all'equilibrio).

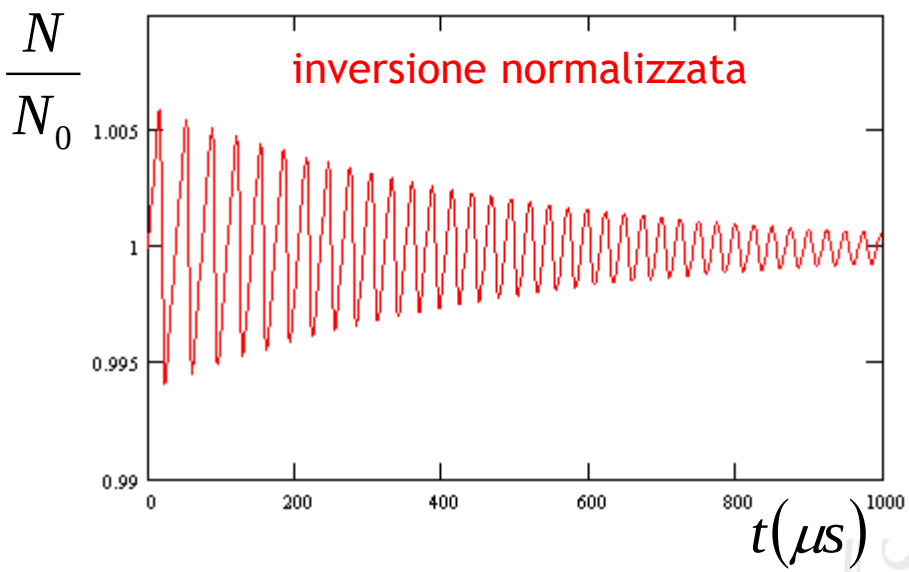
Adesso ci proponiamo di studiare questo transiente, ed in generale vogliamo capire cosa succede quando spostiamo il laser dalla sua posizione di equilibrio.

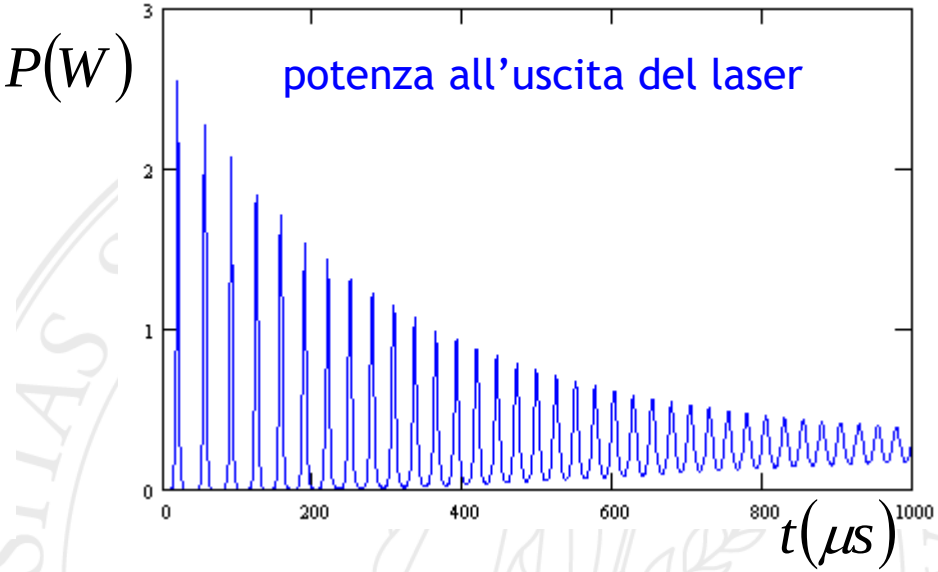
Questo è un argomeno fondamentale sia per lo studio ed il progetto dei laser CW che per i laser impulsati (sia Q-switched che mode-locked).

Le equazioni che useremo sono quelle trovate nella prima lezione, ma adesso le dobbiamo risolvere senza porre a 0 le derivate rispetto al tempo.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = R - B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau} N \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau_c} \phi \end{cases}$$

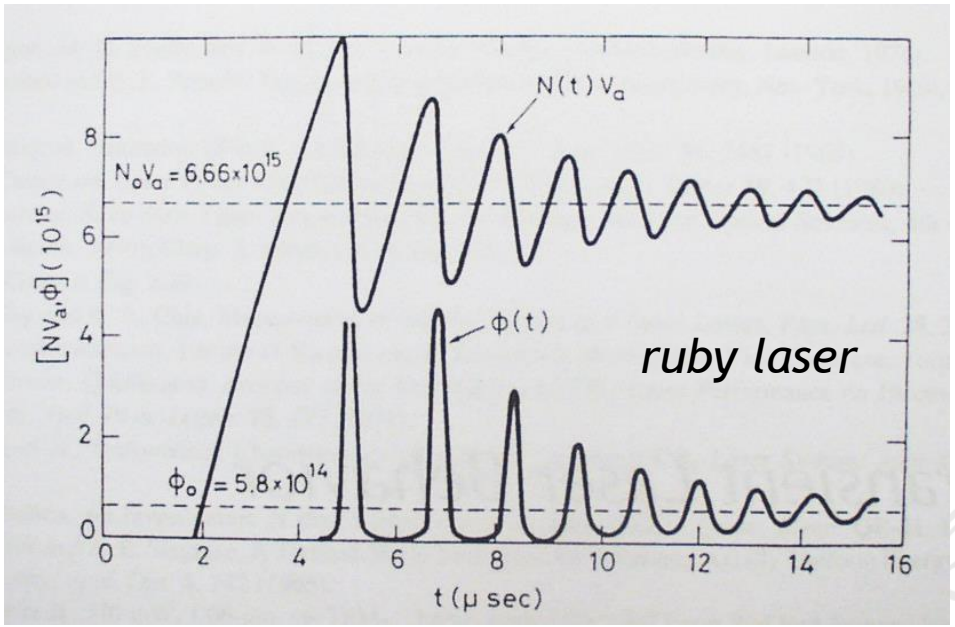
Vediamo subito il risultato di una simulazione realistica (Nd:YAG) relativa ad un laser che parte da una condizione fuori equilibrio, ovvero, con una potenza iniziale minore rispetto a quella di equilibrio e con un'inversione di popolazione iniziale pari a quella di equilibrio (è possibile ottenere sperimentalmente questa condizione iniziale introducendo perdite in cavità per un tempo di circa 1μs ovvero un tempo molto più lungo del tempo caratteristico delle perdite della cavità (decine di ns) e molto più corto del tempo di decadimento spontaneo (quindi il mezzo attivo non ha il tempo di cambiare popolazione))





All'inizio si ha un tipico comportamento impulsato, poi il laser tende all'equilibrio in un tempo confrontabile con il tempo di decadimento spontaneo, la frequenza aumenta e la dinamica diventa quella di un oscillatore armonico smorzato dove P e N oscillano sfasati di 90° .

Analiziamo adesso l'andamento di N e P nel caso di un laser a rubino (3 livelli). Qualitativamente nulla cambia rispetto al caso precedente. Solo che adesso partiamo con il laser spento e accendiamo la pompa al tempo t=0



Esercizio: notare che i picchi di potenza corrispondono ad una inversione di popolazione N0, perché?

- L'inversione di popolazione sale fino a superare il livello di equilibrio perchè in cavità non ci sono fotoni
- Il numero di fotoni in cavità sale molto velocemente sopra il livello di equilibrio perchè l'inversione di popolazione è molto alta
- L'inversione di popolazione cala velocemente a causa dell'emissione stimolata dovuta all'alto numero di fotoni
- Il guadagno cala velocemente a causa della diminuzione dell'inversione di popolazione e così diminuiscono anche i fotoni
- L'inversione ricomincia ad aumentare a causa della diminuzione di fotoni in cavità …

Adesso lineariziamo le equazioni del laser nel caso perturbativo rispetto alla condizione di equilibrio (dal punto di vista sperimentale questo è il primo step per studiare la dinamica del laser sottoposto ad esempio a piccole fluttuazioni nella potenza di pompa o a fluttuazioni delle perdite, oppure a studiare la dinamica di un transiente)

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = R - B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau} N \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau_c} \phi \end{cases}$$

$$N(t) = N_o + \delta N(t)$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \delta\phi(t)$$

Sostituisco le perturbazioni nelle equazioni e ottengo:

$$\begin{cases} \dfrac{d(N_o + \delta N)}{dt} = R - B_o(\phi_o + \delta\phi)(N_o + \delta N) - \dfrac{1}{\tau}(N_o + \delta N) \\ \dfrac{d(\phi_o + \delta\phi)}{dt} = V_o B_o(\phi_o + \delta\phi)(N_o + \delta N) - \dfrac{1}{\tau_c}(\phi_o + \delta\phi) \end{cases}$$

Trascurando il secondo ordine con $\delta N \delta\phi$ e imponendo la condizione di equilibrio per N_0 e ϕ_0 si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta N}{dt} = -B_0\phi_0\delta N - B_0 N_0 \delta\phi - \dfrac{1}{\tau}\delta N \\[2ex] \dfrac{d\delta\phi}{dt} = V_a B_0 \phi_0 \delta N + \underbrace{V_a B_0 N_0 \delta\phi - \dfrac{1}{\tau_c}\delta\phi}_{=0} \end{cases}$$

Il modo più semplice per disaccoppiare δN e $\delta\phi$ è quello di andare nel dominio spettrale usando la trasformata di Fourier:

$$\frac{d f(t)}{dt} \xrightarrow{\tilde{\mathbb{F}}} i\omega f(\omega) \qquad \text{dove} \qquad \tilde{\mathbb{F}}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\omega\delta N = -B_0\phi_0\delta N - B_0 N_0 \delta\phi - \dfrac{1}{\tau}\delta N \\[2ex] i\omega\delta\phi = V_a B_0 \phi_0 \delta N \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$-\omega^2 \delta\phi + \left(B_0\phi_0 + \frac{1}{\tau}\right) i\omega\,\delta\phi + V_a B_0^2 \omega_0 \phi_0\,\delta\phi = 0$$

Che nel dominio temporale diventa:

$$\frac{d^2\delta\phi}{dt} + \left(B_0\phi_0 + \frac{1}{\tau}\right)\frac{d\delta\phi}{dt} + V_a B_0^2 \omega_0 \phi_0\,\delta\phi = 0$$

Ovvero l'equazione di un oscillatore armonico smorzato.

Dalle equazioni scritte nella prima lezione risulta subito (esercizio):

$$B_0^2 V_0 N_0 \phi_0 = \frac{x-1}{\tau_c \tau}$$

$$B_o\phi_o + \frac{1}{\tau} = \frac{x}{\tau}$$

definisco

$$\begin{cases} t_o \overset{df}{=} \dfrac{2\tau}{x} \\ \Omega \overset{df}{=} \sqrt{\dfrac{x-1}{\tau_c \tau}} \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione dell'oscillatore queste definizioni otteniamo:

$$\frac{d^2\delta\phi}{dt^2} + \frac{2}{t_o}\frac{d\delta\phi}{dt} + \Omega^2\delta\phi = 0$$

Caso oscillante:

$$\Omega > \frac{1}{t_o}$$

Frequenza delle oscillazioni più veloce dello smorzamento

$$\delta\phi = Ce^{-\frac{t}{t_o}}\sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{t_o^2}}\cdot t + \alpha\right)$$

$$\delta N = \frac{1}{\gamma_a B_0 \phi_0}\frac{d}{dt}\delta\phi$$

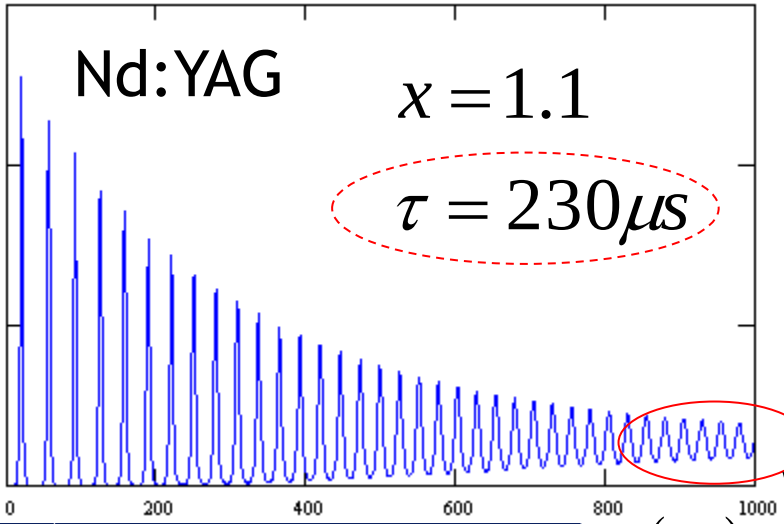
Ottengo due andamenti oscillanti e smorzati con ϕ e N sfasati di 90°

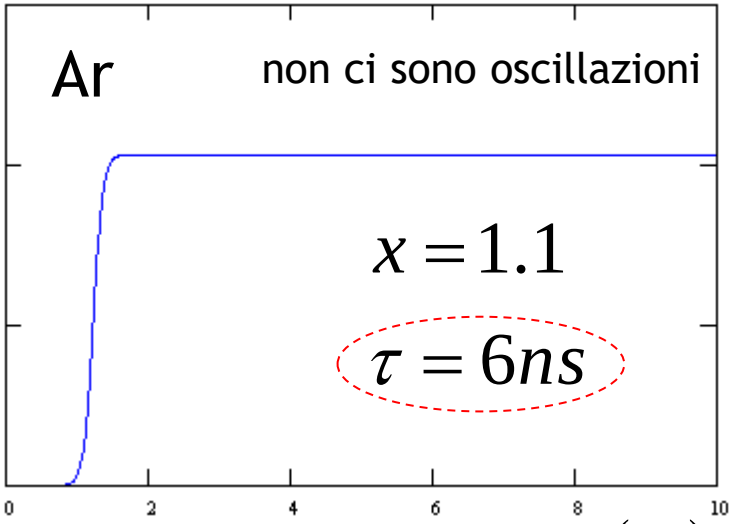
Nel caso di un Nd:YAG la condizione per ottenere il caso oscillante viene facilmente soddisfatta grazie al fatto che il tempo di decadimento spontaneo è molto lungo (230μs). Nel caso invece di un laser a gas solitamente si ottiene un caso non oscillante. Ad esempio nel caso dell'Ar con un tempo di decadimento spontaneo di soli 6ns.

Scrivo esplicitamente la condizione per il caso oscillante:

$$\omega > \frac{1}{t_o} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{x-1}{\tau_c \tau}} > \frac{x}{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x-1} < \frac{4\tau}{\tau_c}$$

A parità di x e τ_c si passa dal caso oscillante al caso smorzato al diminuire del tempo di emissione spontanea:





Regime perturbativo

Le oscillazioni di rilassamento sono attivate da una qualche perturbazione che riguarda il numero di fotoni e/o l'inversione di popolazione. Quello che dobbiamo fare adesso è aggiungere alle equazioni una sorgente di rumore. Questa sorgente attiverà le oscillazioni di rilassamento. Quello che vogliamo ricavare è lo spettro di rumore del laser generato da queste sorgenti di rumore.

Alcuni esempi di sorgenti di rumore:

Rumore sulla pompa del laser: $R_p \rightarrow R_{p_0} + \delta R_p$

Se la pompa è un diodo laser questo rumore sarà dovuto ad esempio al rumore sulla corrente che circola nel diodo

Rumore sulle perdite: $\frac{1}{\tau_c} = FSR(\gamma_1 + 2\gamma_2) = FSR(\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\delta\gamma_2) =$

$$= \frac{1}{\tau_{c_0}} + 2FSR \cdot \delta\gamma_2$$

Questo rumore potrebbe essere dovuto alle vibrazioni meccaniche della cavità che a loro volta inducono una fluttuazione delle perdite interne

Rumore di vuoto che entra dall'accoppiatore di uscita: $\frac{1}{\tau_1}\delta\phi_V$

E' un rumore con spettro piatto sulle frequenze con un contributo di ½ fotone per frequenza

Ognuno di questi rumori comparirà con il suo spettro specifico nell'equazione dell'oscillatore armonico forzato come un particolare termine forzante. Vediamo il caso importante delle fluttuazioni delle pompa. Le equazioni di partenza sono:

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = V_a B_0 N \phi - \dfrac{1}{\tau_c}\phi \\[2ex] \dfrac{dN}{dt} = R_p - B_0 \phi N - \dfrac{1}{\tau} N \end{cases}$$

$$N = N_0 + \delta N$$
$$\phi = \phi_0 + \delta\phi$$
$$R_p = R_{p_0} + \delta R_p$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} i\omega\,\delta\phi = V_a B_0 \phi_0\, \delta N \\ i\omega\,\delta N = \delta R_p - B_0\phi_0\,\delta N - \dfrac{1}{\tau}\delta N - B_0 N_0\,\delta\phi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta\phi = \frac{V_a B_0 \phi_0}{-\omega^2 + \left(B_0\phi_0 + \frac{1}{\tau}\right) i\omega + V_a B_0^2 N_0 \phi_0}\,\delta R_p = \frac{V_a B_0 \phi_0}{(\Omega^2 - \omega^2) + i\frac{2}{t_0}\omega}\,\delta R_p \overset{df}{=} G(\omega)\,\delta R_p$$

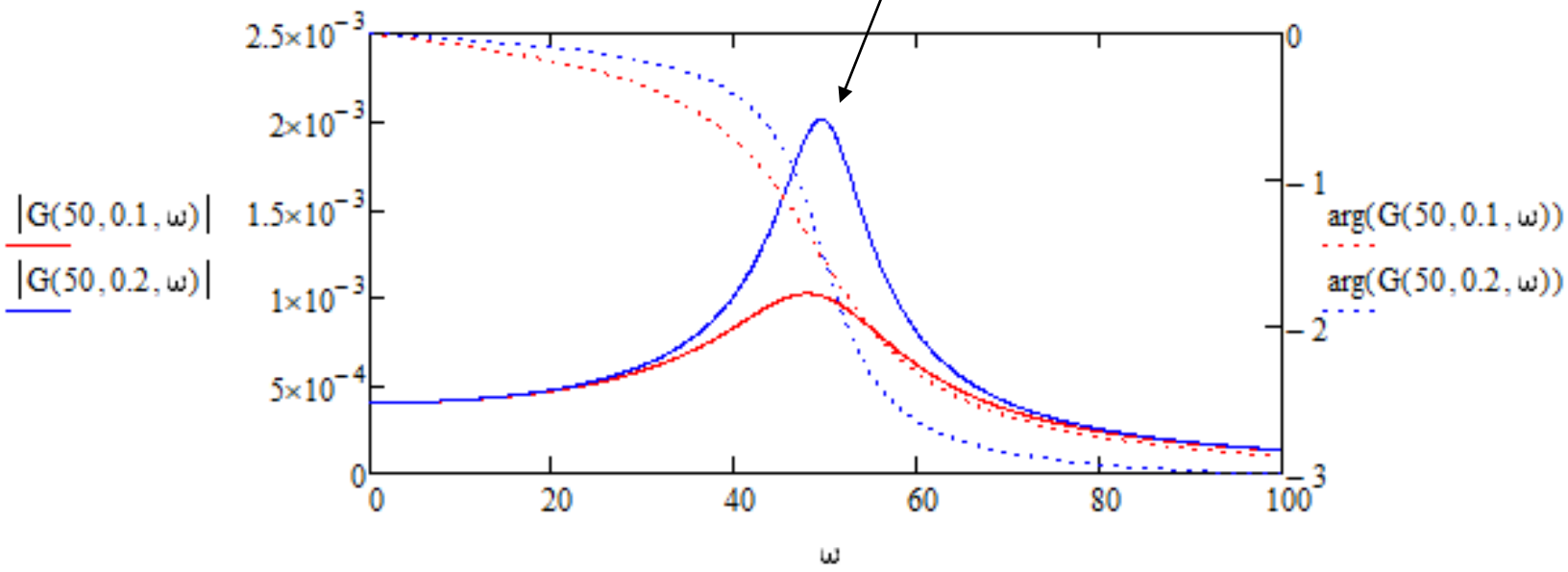
Quindi il rumore della pompa viene trasferito sulla potenza del laser per mezzo della funzione di risposta G dell'oscillatore armonico.

Per prima cosa dobbiamo prendere confidenza con la funzione G e poi dobbiamo capire in che modo l'oscillatore armonico reagisce alla forzante.

Funzione di trasferimento G:

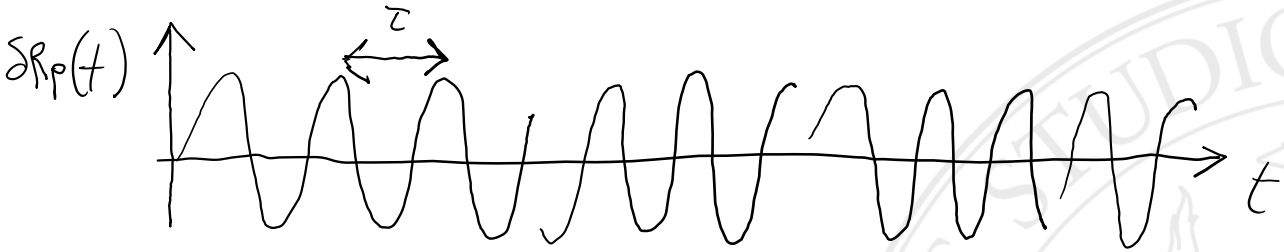
$$G(\Omega, t0, \omega) := \frac{1}{\left(\Omega^2 - \omega^2\right) + i \cdot \frac{2}{t0} \cdot \omega}$$

Lo sfasamento è nullo sotto la risonanza, diventa $\pi/2$ in risonanza e poi π molto sopra la risonanza. La larghezza del picco di risonanza aumenta al diminuire del tempo di smorzamento t0. Da notare che la curva è asimmetrica: molto sopra la risonanza va a 0

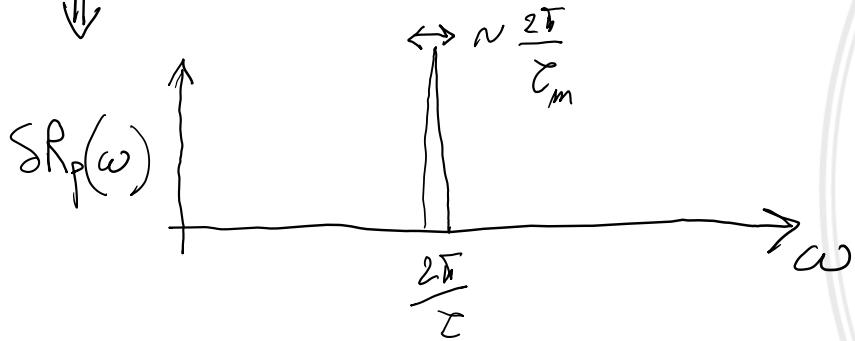


Il rumore δR_p potrebbe essere caratterizzato da picchi in frequenza ben definiti (ad esempio intorno a 50Hz a causa dell'oscillazione della tensione di rete che l'alimentatore della pompa usa per alimentare il laser di pompa). Oppure potrebbe essere caratterizzato da uno spettro continuo che si estende anche sopra la risonanza (certamente è il caso del rumore di vuoto). Oppure nel caso di uno spettro di rumore relativo alle perdite ci aspettimao tanti picchi a frequenze tra 100Hz e 2kHz che sono le frequenze di risonanza dei vari montaggi meccanici del laser.

Per prima cosa vogliamo trovare lo spettro di rumore del laser nel caso di una sorgente di rumore caratterizzata da pochi picchi o anche da un solo picco in frequenza:

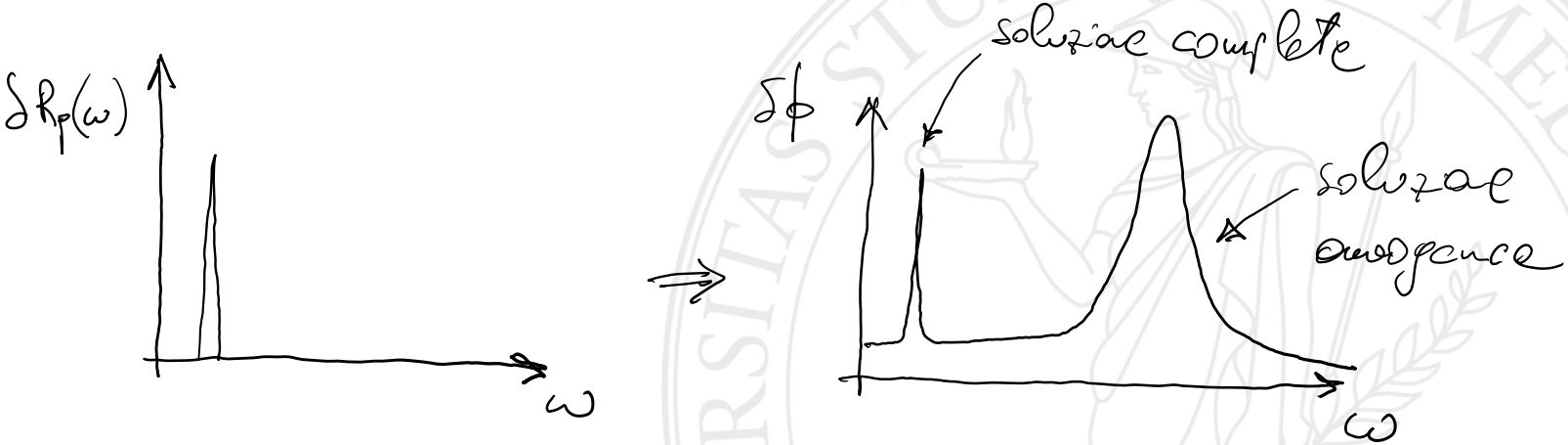


$\tilde{\mathcal{F}}$ $\Downarrow$

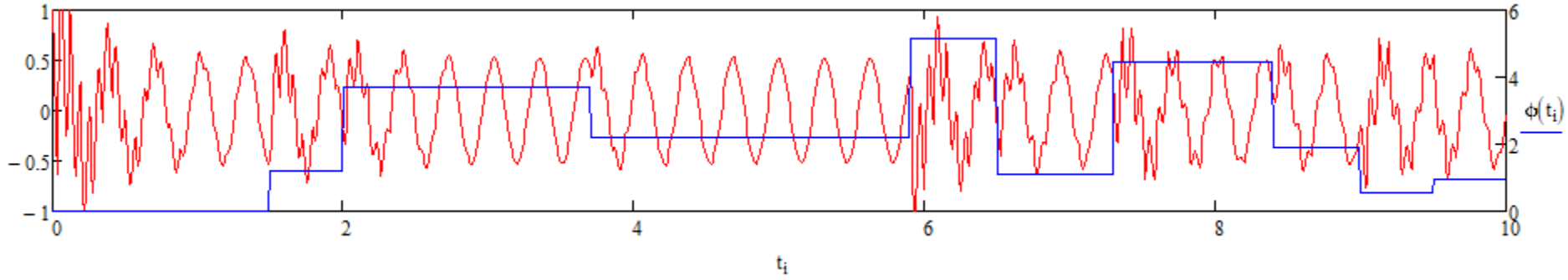


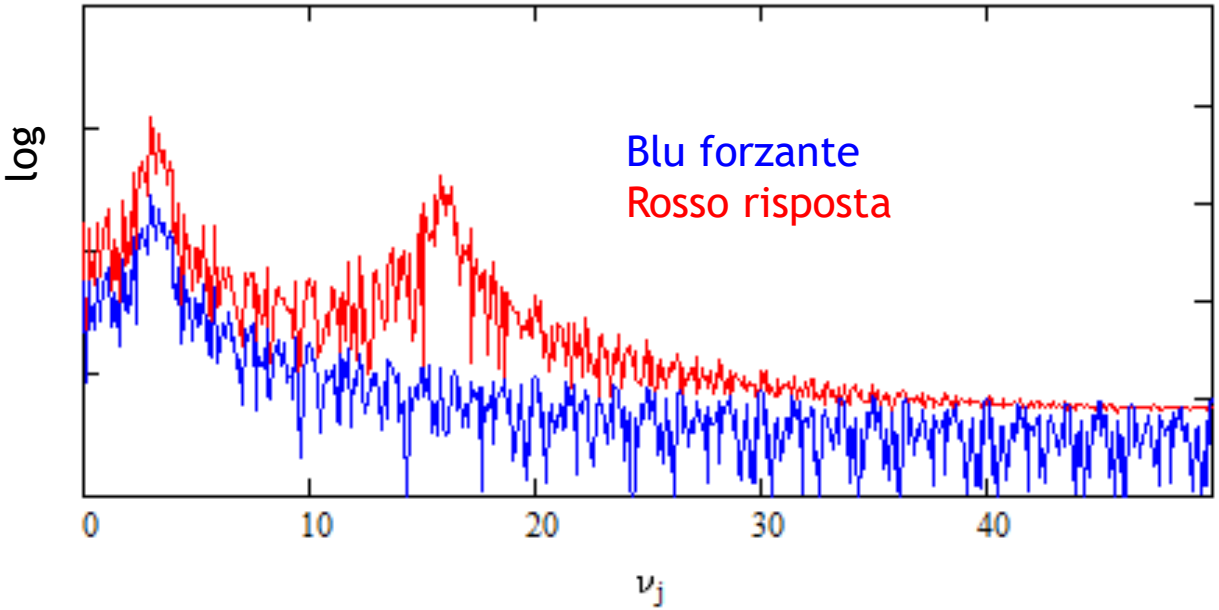
La larghezza del picco nel dominio spettrale andrà come l'inverso del tempo medio tra due salti di fase del rumore.

Per ogni salto di fase mi aspetto di dover scrivere la soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico come la somma della soluzione dell'equazione omogenea + la soluzione particolare della completa in modo da rispettare le condizioni al contorno. Faccio un esempio. Immaginizamo di avere l'oscillatore armonico inzialmente nella posizione 0 (0 fotoni) a velocità 0 (0 variazione sul numero nell'unità di tempo). Al tempo 0 arriva una forzante che va come come cos. E' chiaro che per rispettare le condizioni al contorno non posso scrivere la soluzione solo come soluzione dell'equazione completa ma devo aggiungere la soluzione dell'equazione omogenea la quale evolverà in modo smorzato. Il fatto quindi di avere un contributo da parte dell'omogenea introduce una risposta spettrale che si estende su tutto lo spettro di risposta (funzione G) dell'oscillatore armonico e non si limita quindi solo ai picchi di rumore della forzante.



Vediamo un esempio numerico: l'oscillatore è forzato con una frequenza fissata con dei salti di fase. Si vede che per ogni salto abbiamo delle oscillazioni smorzate alle frequenza di risonanza dell'oscillatore



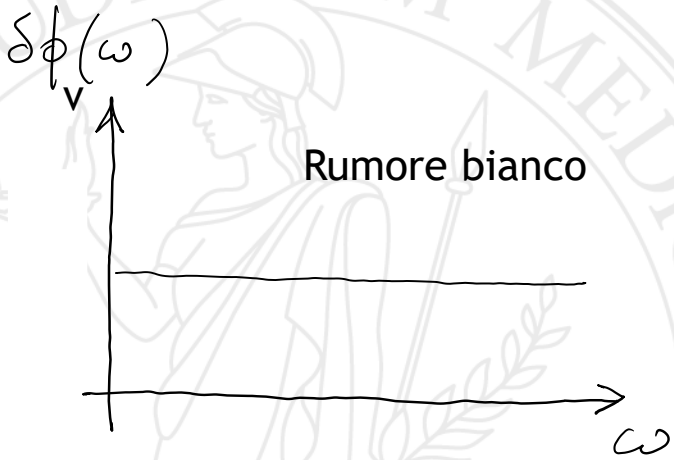


Quindi lo spettro di risposta si estende su tutta la funzione di risposta anche se la forzante è piccata ad una sola frequenza

Nel caso di uno spettro di rumore esteso (o addirittura infinito come lo spettro di rumore di vuoto) mi aspetto che la forzante nasconda la soluzione dell'omogenea nel senso che non gli lascia il tempo di esprimersi. Avremo infatti componenti spettrali di rumore sia più veloci del tempo di smorzamento che della frequenza di risonanza. Per cui la risposta spettrale sarà la funzione di risposta pesata sullo spettro di rumore della forzante.

Proviamo a vedere il caso del rumore di vuoto che entra attraverso l'accoppiatore di uscita del laser. Devo modificare l'equazione per il numero di fotoni considerando il rumore di vuoto come un ingresso nella cavità del laser pesato sulla trasmittività dell'accoppiatore di uscita, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = V_a B_0 N \phi - \dfrac{1}{\tau_c}\phi + \dfrac{1}{\tau_1}\delta\phi_V \\ \dfrac{dN}{dt} = R_p - B_0 N \phi - \dfrac{1}{\tau} N \end{cases}$$



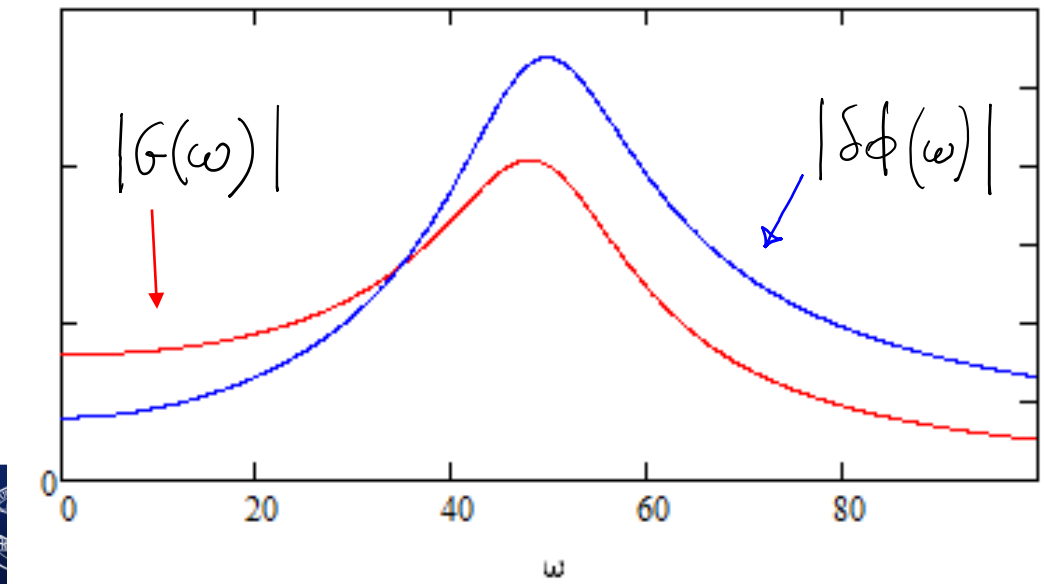
Nel dominio spettrale si ottiene:

$$\begin{cases} i\omega\,\delta\phi = V_a B_0 \phi_0\,\delta N + \frac{1}{\tau_1}\delta\phi_V \\ i\omega\,\delta N = -\left(B_0\phi_0 + \frac{1}{\tau}\right)\delta N - B_0 N_0\,\delta\phi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta\phi(\omega) = \frac{\boxed{\left(i\omega + \frac{2}{t_0}\right)}\frac{1}{\tau_1}}{\left(\Omega^2 - \omega^2\right) + i\frac{2}{t_0}\omega}\,\delta\phi_V$$

Quindi lo spettro di rumore di vuoto viene pesato sulla funzione di risposta dell'oscillatore e nella forzante compare anche iω (ovvero, nel dominio temporale compare anche la derivata temporale del rumore)



Il rumore sulla potenza del laser viene sbilanciato sulle frequenze alte a causa del termine iω

Caso non perturbativo (approccio numerico)

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = R - B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau} N \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_a B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau_c} \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = \dfrac{h\nu}{\tau_1} \phi \\ n = \dfrac{N}{N_o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{2 L_{eff}}{c\, \gamma_1} \\ N_o = \dfrac{1}{\tau_c B_o V_a} \end{cases}$$

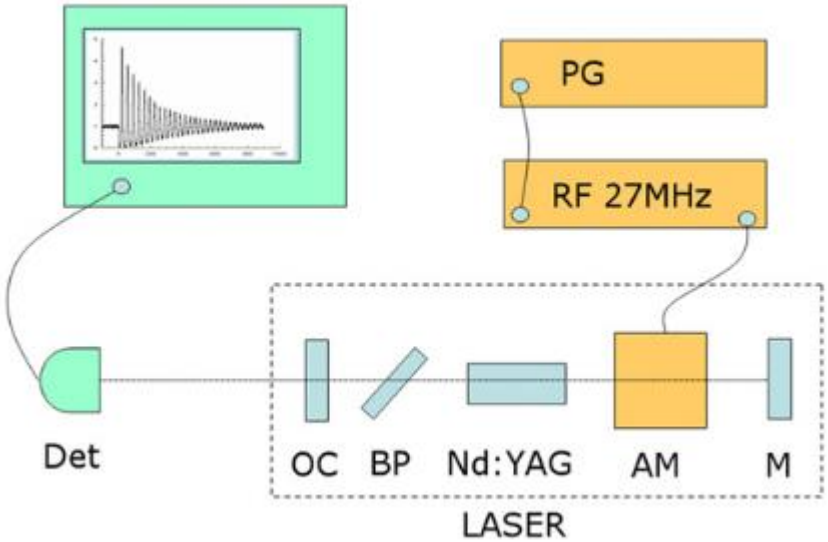
$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{R}{N_o} - \dfrac{2\sigma}{S \gamma_1 h\nu} P n - \dfrac{1}{\tau} n \\ \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau_c} P \end{cases}$$

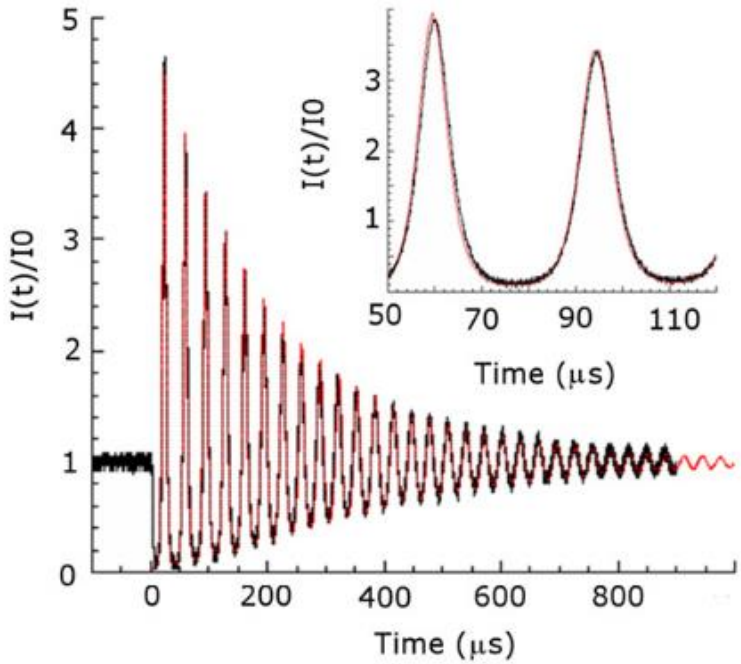
$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \alpha - \beta P n - \dfrac{1}{\tau} n \\ \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{n-1}{\tau_c} P \end{cases}$$

Conviene scrivere le due equazioni rispetto a due variabili "piccole". Quindi uso la potenza in W e il rapporto tra l'inversione di popolazione e l'inversione di pop. all'equilibrio.

Inoltre conviene ridefinire le varie costanti (α, β, τ, τ_c) usando i μs.

Confronto teoria-esperimento





Opt. Comm. 287 (2013) 176-179

Quanto scritto appare ragionevole in un caso a singolo modo ma non è chiaro perché dovrebbe continuare a valere in un caso multimodo.

In un caso multimodo abbiamo modi diversi che si scambiano energia nel tempo e dunque sembrerebbe ragionevole pensare che la dinamica sia in questo caso più complicata rispetto a quella di un semplice oscillatore armonico.

Vedremo che in realtà non è così, il caso multimodo è apparentemente identico al caso singolo modo.

Equazioni di C. L. Tang, H. Statz e G. deMars (TSD) (studio della dinamica nel caso Multimodo)

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = R - B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau} N \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau_c} \phi \end{cases}$$

⇩

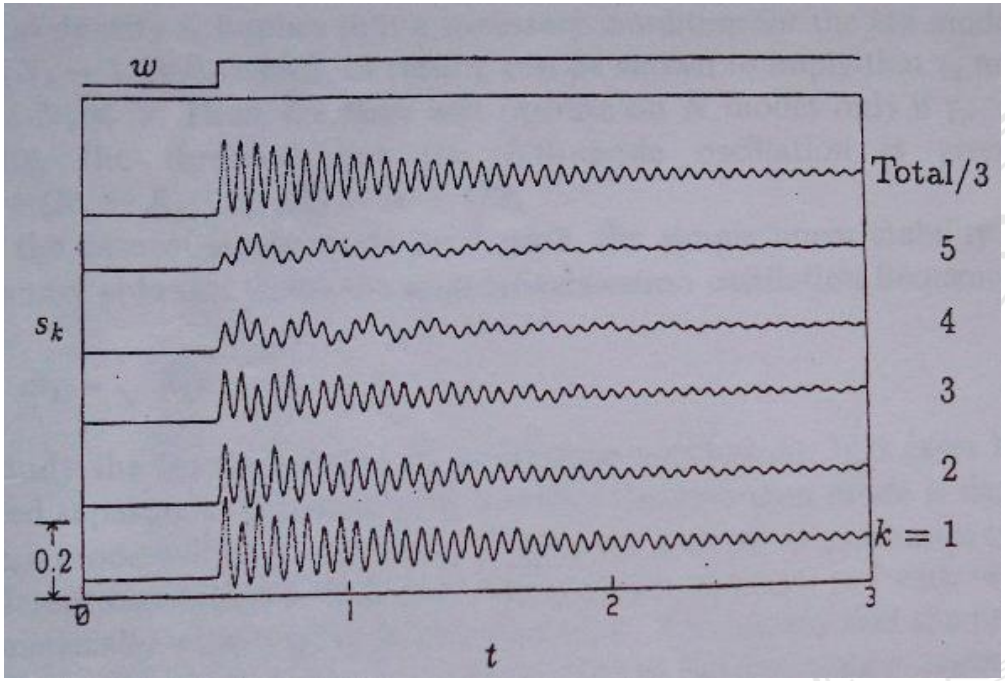
- L'indice "k" corre sul modo
- Ogni modo è un'onda stazionaria con un profilo longitudinale dato da "1-cos…"
- L'inversione di popolazione risente della presenza di tutti i modi quindi bisogna aggiungere una sommatoria
- L'emissione stimolata cambia lungo z perchè l'intensità ha un andamento oscillante, dunque per ottenere l'effetto complessivo è necessario integrare
- Nel caso sotto la lunghezza della cavità è uguale a quella del mezzo attivo

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t,z)}{dt} = R - \sum_k B_{ok} \left\{ \phi_k(t) \left[1 - \cos\left(2m_k \dfrac{\pi}{L} \right) z \right] \right\} N(t,z) - \dfrac{1}{\tau} N(t,z) \\ \dfrac{d\phi_k(t)}{dt} = S_k B_{ok} \phi_k(t) \int_0^L N(t,z) \left[1 - \cos\left(2m_k \dfrac{\pi}{L} \right) z \right] dz - \dfrac{1}{\tau_c} \phi_k \end{cases}$$

Soluzione del sistema di equazioni:

- Se in totale si hanno n modi allora ogni modo possiede n oscillazioni di rilassamento $\nu 1 > \nu 2 > \ldots > \nu n$. Complessivamente sopravvive solo la $\nu 1$ perchè le altre n-1 frequenze si sommano in controfase (quando si considerano tutti i modi). I modi non sono indipendenti.
- La $\nu 1$ è uguale alla frequenza di rilassamento del caso a singolo modo

Simulazione con 5 modi



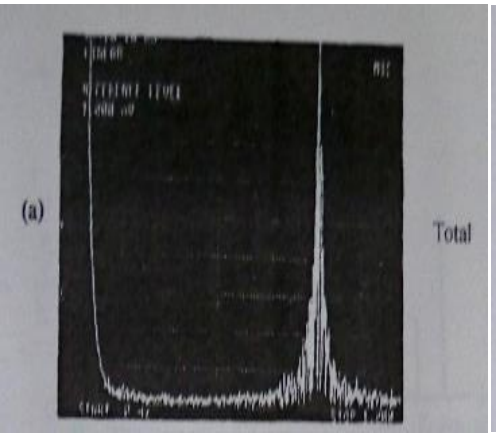
Come si vede sommando le dinamiche dei 5 modi si ottiene il caso oscillante alla frequenza più alta

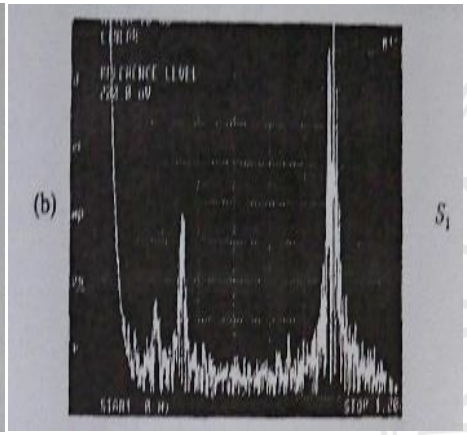
Se il FSR è abbastanza grande diventa possibile selezionare il singolo modo per mezzo di un monocromatore e mettere in evidenza le frequenze di oscillazione del singolo modo:

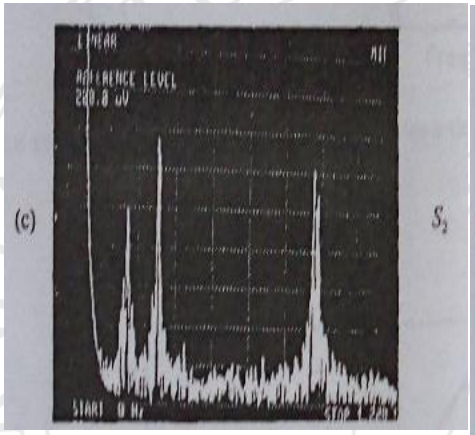
Analizzatore di spettro

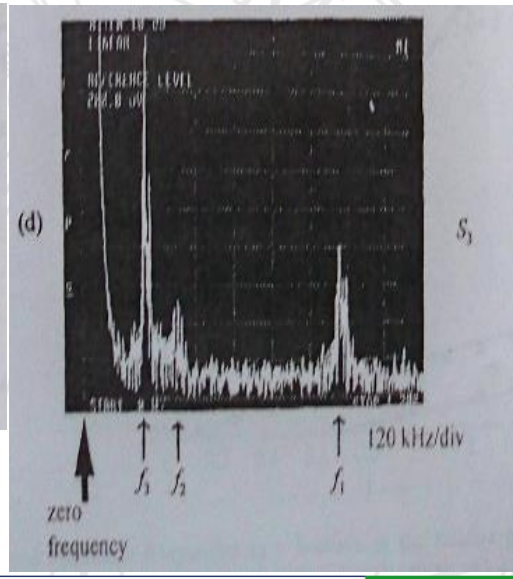
Misura con tre modi:

Totale | Modo 1 | Modo 2 | Modo 3



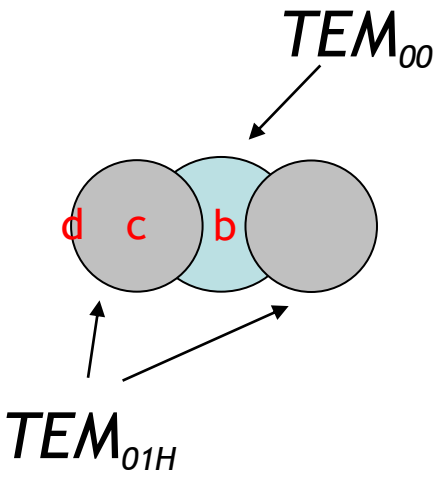






Quando viene selezionato il singolo modo si vedono chiaramente tre picchi

Misura delle oscillazioni di rilassamento nel caso multimodo spaziale

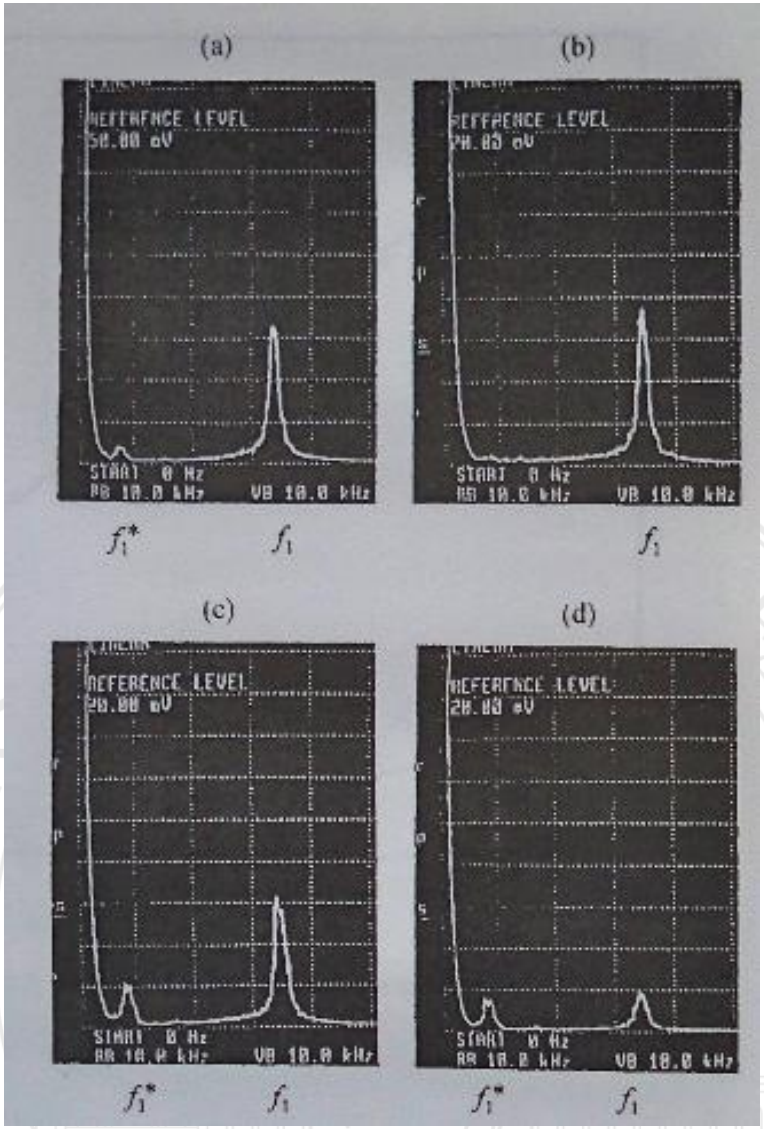


a) Raccolgo tutto il fascio. Le oscillazioni dei due modi spaziali non si compensano esattamente e vedo due picchi.

b) Metto il rivelatore al centro del modo 00 dove non c'è il modo 01. Vedo un solo picco come nei casi precedenti.

c) Metto il rivelatore sul picco del modo 01 dove però ho la coda del modo 00. Le oscillazioni non si compensano esattamente e vedo due picchi.

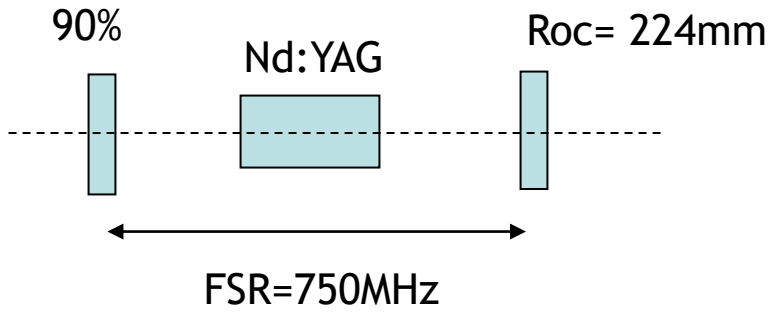
d) Sulla coda del modo 01 e quindi anche del modo 00, vedo ancora due picchi.



Analisi delle misure

Dati 2015

Oscillazioni di rilassamento



Il laser funziona su moltissimi modi e troviamo un andamento lineare della Pout

Misuriamo la frequenza del picco dello spettro delle oscillazioni di rilassamento in funzione della potenza di pompa

$$\gamma 1(R) := -\ln(R) \qquad \gamma 2(\Delta) := -\ln(1-\Delta)$$

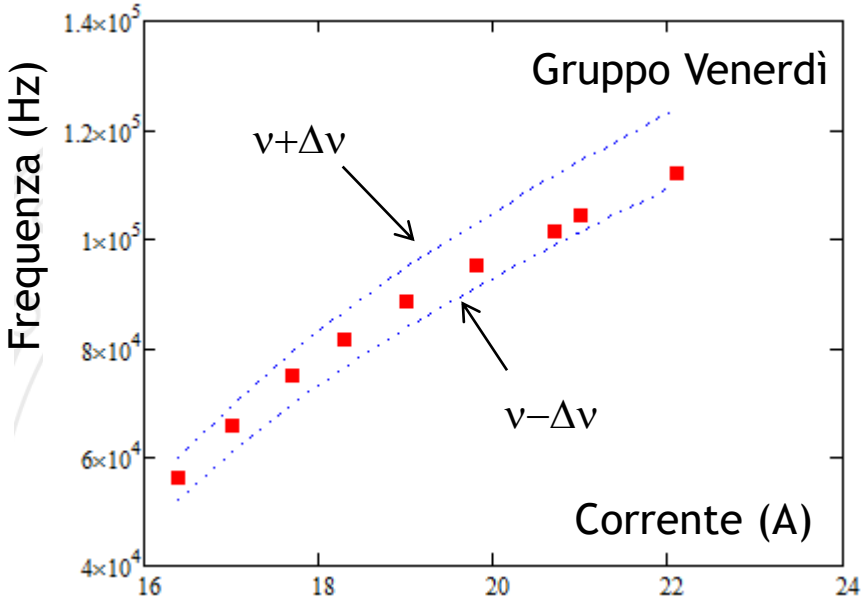
$$\tau c(R,\Delta) := \frac{1}{2\cdot FSR\cdot\left(\frac{\gamma 1(R)}{2}+\gamma 2(\Delta)\right)}$$

$$Is := 14.7 \qquad R := 0.9 \qquad Id := 10.1 \qquad \Delta := 0.001 \qquad \tau := 240\cdot 10^{-6}$$

$$\Delta Is := 0.1 \qquad \Delta R := 0.01 \qquad \Delta Id := 0.1 \qquad \Delta\Delta := 0.001 \qquad \Delta\tau := 10\cdot 10^{-6}$$

$$x(I,Is,Id) := \frac{I-Id}{Is-Id}$$

$$\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{x(I,Is,Id)-1}{\tau\cdot\tau c(R,\Delta)}}$$



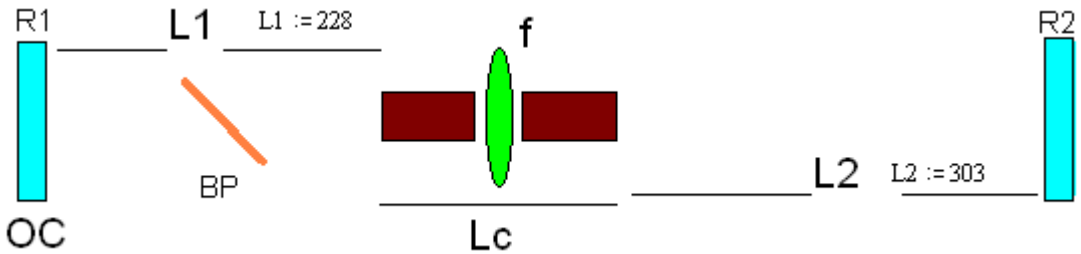
$$\Delta\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau) := \sqrt{\left[\left(\frac{d}{dIs}\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau)\right)\cdot\Delta Is\right]^2+\left[\left(\frac{d}{dId}\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau)\right)\cdot\Delta Id\right]^2+\left[\left(\frac{d}{dR}\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau)\right)\cdot\Delta R\right]^2+\left[\left(\frac{d}{d\Delta}\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau)\right)\cdot\Delta\Delta\right]^2+\left[\left(\frac{d}{d\tau}\nu(I,Is,Id,R,\Delta,\tau)\right)\cdot\Delta\tau\right]^2}$$

Analisi delle misure

Dati 2014

Oscillazioni di rilassamento

Spettro delle oscillazioni di rilassamento nel caso di una cavità con 1 o 2 modi trasversi.
Rispetto al caso precedente abbiamo bisogno di una cavità più lunga:

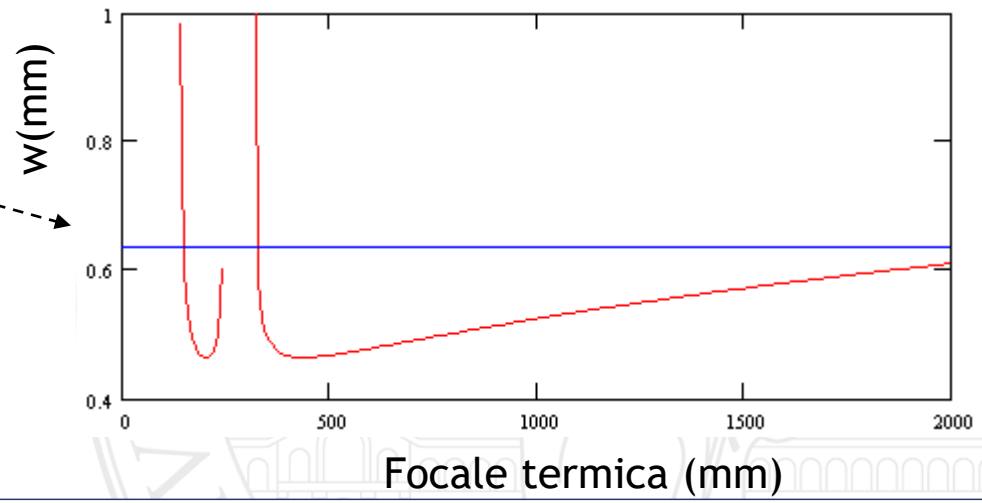


90%

FSR=233MHz

Spot nel mezzo attivo vs focale termica

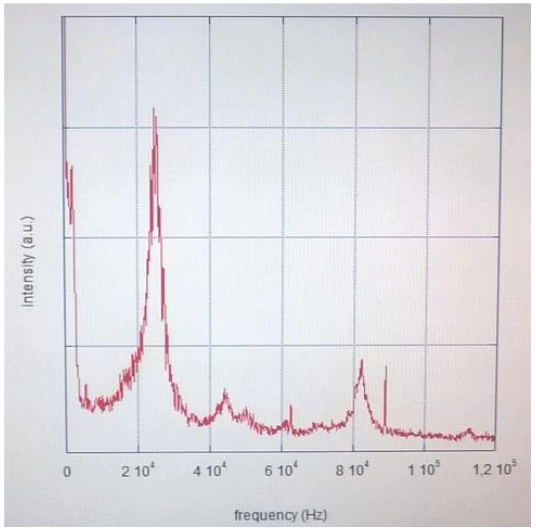
In questo caso siamo vicini alla condizione per ottenere solo il modo spaziale fondamentale.

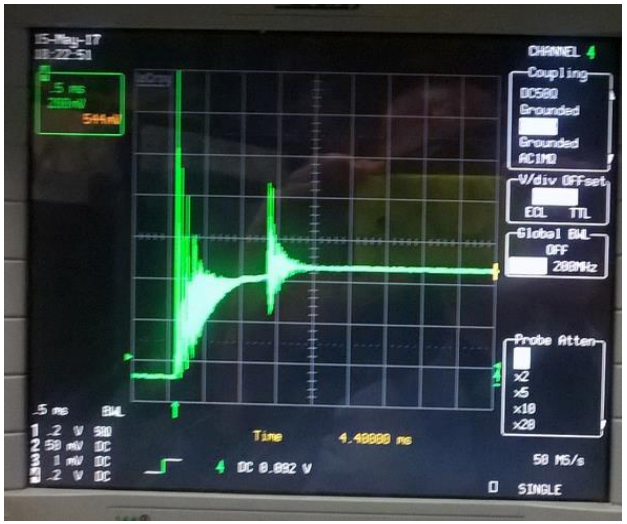


Abbiamo posizionato il fotodiodo in modo da riprodurre la posizione c (vedi pg. 34)

In questo caso però non abbiamo solo il TEM01 orizzontale ma anche il verticale

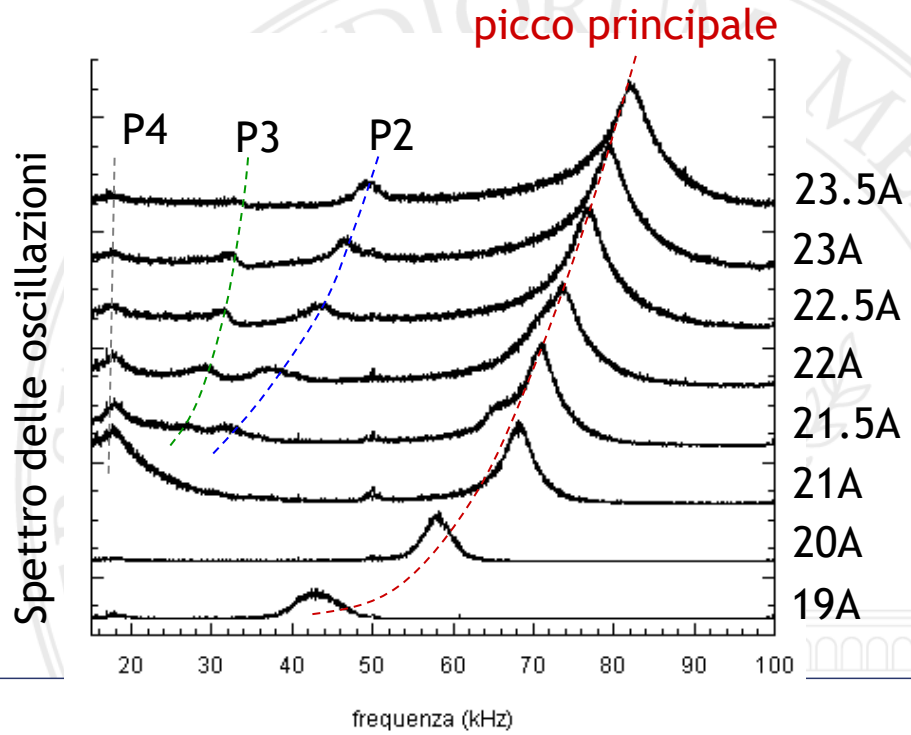
Nota: a occhio si nota la comparsa del modo 01 a circa 21.5A





Si vedono chiaramente 2 picchi aggiuntivi P2 e P3 (a partire proprio da 21.5A) che si spostano in funzione della potenza di pompa (potrebbero essere dovuti ai due modi 01H e 01V). Non è chiaro cosa sia il picco P4 dal momento che non si sposta.

La misura va rifatta tagliano lo 01H e poi lo 01V per vedere cosa cambia.



Analisi delle misure

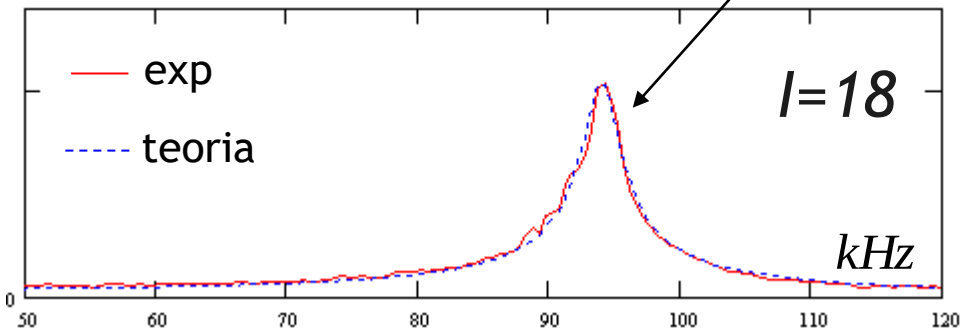
Oscillazioni di rilassamento

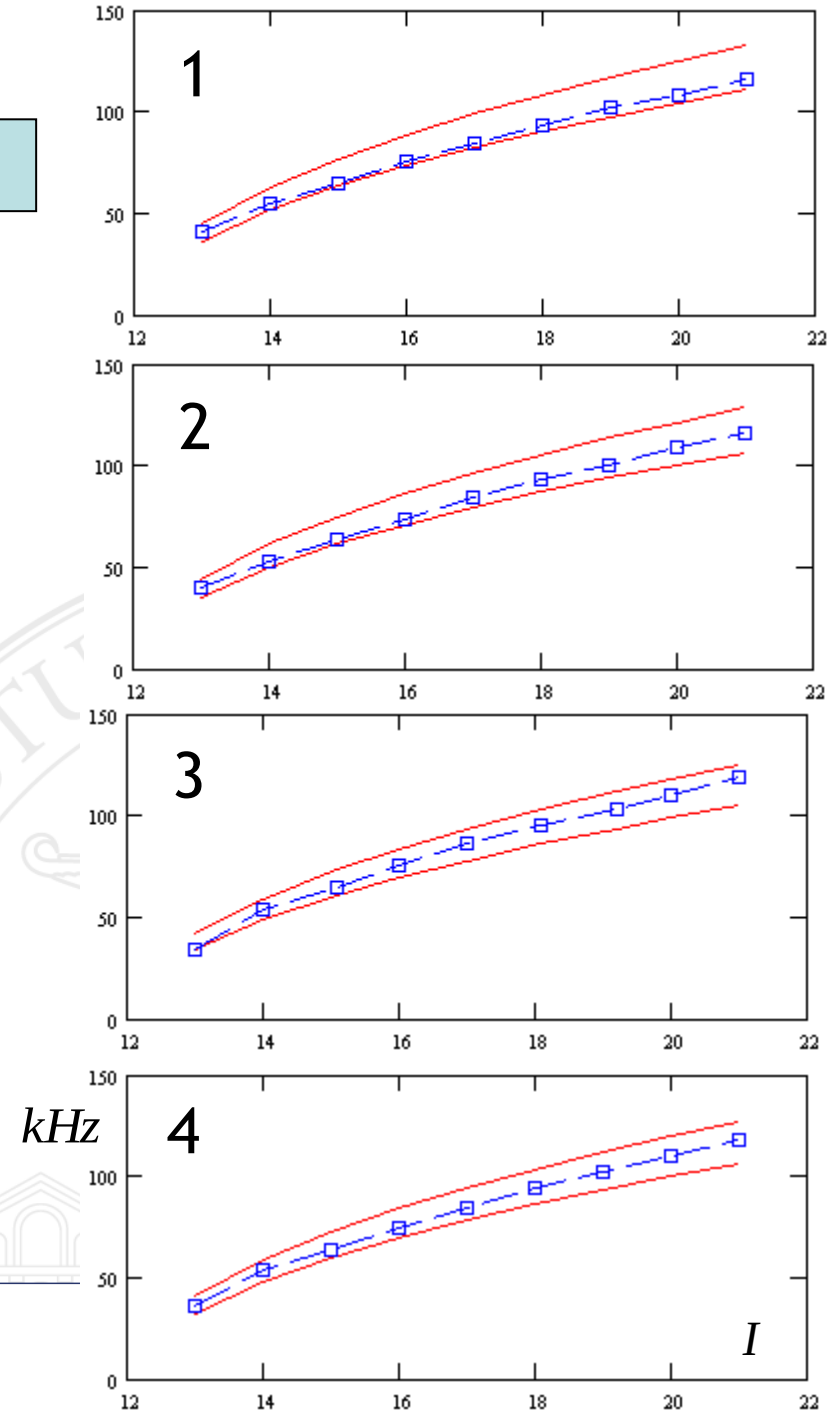
Dati 2011

$$\delta\phi = Ce^{-\frac{t}{t_o}} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{t_o^2}} \cdot t + \varphi\right)$$

$$\begin{cases} t_o = \dfrac{2\tau}{x} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{x-1}{\tau_c \tau}} \\ x = \dfrac{I - I_{sd}}{I_s - I_{sd}} \end{cases}$$

$$\left|\tilde{G}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \frac{4}{t_o^2}\Omega^2}}$$





Q-Switch (generazione di impulsi di alta energia)

Quando il laser parte da una condizione fuori equilibrio tipicamente genera degli impulsi. La tecnica del Q-switch consiste nel portare all'estremo questo comportamento.

Ovvero, si fa partire il laser con una inversione di popolazione iniziale più alta possibile rispetto a quella di equilibrio.

Quindi il guadagno iniziale è altissimo e l'impulso contiene così tanti fotoni da svuotare rapidamente il mezzo attivo per emissione stimolata.

In questa situazione estrema si può dire che:

1) l'energia dell'impulso è quella contenuta inizialmente nel mezzo attivo (la dinamica è molto più veloce dell'emissione spontanea) (tipicamente centinaia di mJ)

2) poiché il mezzo attivo si è svuotato, la lunghezza dell'impulso e paragonabile al tempo di decadimento della cavità (tipicamente ns)

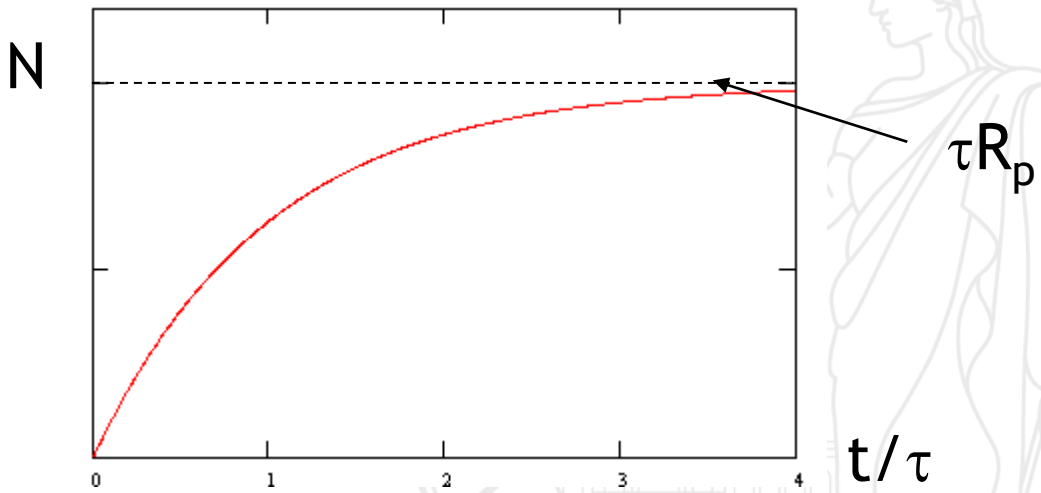
Un punto fondamentale è che per generare una grande inversione di popolazione iniziale abbiamo bisogno di un mezzo attivo con un tempo di emissione spontanea lungo. Quindi il Nd:YAG va bene mentre un Ar no.

Quindi si ottengono facilmente potenze dell'ordine di 100MW, ovvero si possono usare questi laser per saldare, forare e fare le marcature

Per prima cosa si deve generare una grossa inversione di popolazione. Per fare questo possiamo usare una flash-lamp o anche dei diodi ma il punto è che la cavità deve avere inzialmente perdite del 100%, ovvero, l'inversione di popolazione non deve saturare per emissione stimolata (vedremo in lab come questo viene realizzato in pratica):

$$\frac{dN}{dt} = R_p - \frac{1}{\tau} N \quad \Rightarrow \quad N(t) = \tau R_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Come si vede a parità di R l'inversione è tanto più alta quanto più è grande τ. Inoltre si vede anche che non è utile applicare la pompa per un tempo molto più grande del tempo di emissione spontanea:



Vediamo adesso la generazione dell'impulso sempre nel caso in cui abbiamo una inversione di popolazione iniziale molto alta.

Prima pensiamo alla salita dell'impulso e diciamo che il guadagno è talmente alto da generare un tempo di salita più veloce del tempo di decadimento della cavità (e quindi velocissimo rispetto al tempo di decadimento spontaneo). Si ottiene il seguente sistema di equazioni per la parte in salita dell'impulso:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \cancel{R} - B_o \phi N - \cancel{\dfrac{1}{\tau} N} \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \cancel{\dfrac{1}{\tau_c} \phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -B_o \phi N \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N \end{cases}$$

Ovvero:

$$\frac{d\phi}{dt} = -V_o \frac{dN}{dt} \Rightarrow \boxed{\phi_p = V_o N_i}$$

Ovvero, come avevamo detto, il numero di fotoni è uguale al numero di atomi inizialmente eccitati (questo nell'ipotesi che N_i sia molto più grande di N_0)

Adesso dobbiamo analizzare la parte in discesa dell'impulso. Se diciamo che il mezzo attivo è ormai esaurito allora ci rimane solo il tempo di decadimento della cavità:

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{dN}{dt} = R - B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau} N} \\ \dfrac{d\phi}{dt} = \cancel{V_o B_o \phi N} - \dfrac{1}{\tau_c}\phi \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\tau_c}\phi$$

Trovo quindi un esponenziale decrescete con tempo caratteristico τ_c:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\tau_c}\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_p e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

da cui si ricava subito l'andamento della potenza:

$$P(t) = \frac{h\nu}{\tau_1}\phi_p e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

Ovvero la lunghezza dell'impulso è circa uguale al tempo di perdita della cavità

Se diciamo che le perdite sono prevalentemente quelle dell'accoppiatore di uscita (cosa tipica in un laser Q-switch) si ottiene:

$$E(t) = \int P(t)dt = h\nu\phi_p = h\nu V_a N$$

Ovvero l'energia dell'impulso è quella inizialmente immagazzinata nel mezzo attivo

Da questa equazione posso ricavare la potenza della flash-lamp:

$$N = \tau R_p \qquad R_p = \frac{P_p \eta}{h\nu_p S_{ma} l_a}$$

Tutto ciò è vero se l'inversione di popolazione iniziale è molto più alta di quella all'equilibrio e se tutta l'energia interna al laser esce solo attraverso l'accoppiatore di uscita. Se invece non siamo in questo caso la dinamica diventa più complicata da descrivere perché la parte in salita e quella in discesa si "mescolano" e dobbiamo usare in approccio numerico. In questo caso l'impulso diventa anche più simmetrico.

Tempo di attesa dell'impulso di Q-switch

Il tempo di attesa (delay time) è definito come il tempo necessario affinchè i fotoni in cavità diventino una "frazione" del valore di picco (ad esempio 1/10 del picco). A questo livello si può dire che l'inversione di popolazione è rimasta approssimativamente quella iniziale per cui abbiamo:

costante

$$\frac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \frac{1}{\tau_c}\phi = \left(V_o B_o N_i - \frac{1}{\tau_c} \right)\phi = \frac{1}{\tau_c}\left(\frac{N_i}{N_0} - 1 \right)\phi$$

Per cui il tempo di attesa dell'impulso (delay time) è:

$$\tau_D = \frac{\tau_c}{\left(\frac{N_i}{N_0} - 1 \right)}$$

Questa equazione per il delay-time vale anche quando non siamo nella condizione di Q-switch estremo e quindi può essere utile per trovare l'inversione di popolazione iniziale (nel caso ad esempio di una flash-lamp), oppure, nel caso di un pompaggio in continua con i diodi (dove l'inversione di popolazione iniziale è nota) può servire per trovare il tempo di decadimento della cavità.

Energia e potenza di picco dell'impulso nel caso di Q-switch non estremo (tipicamente pompato a diodi):

Per ottenere il risultato dobbiamo partire dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \cancel{R} - B_o \phi N - \cancel{\dfrac{1}{\tau} N} \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau_c} \phi \end{cases}$$

Dove ho trascurato tutte le dinamiche che vanno come il tempo di decadimento spontaneo

Metto in evidenza il fatto che quando il picco raggiunge il suo massimo ottengo:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_p = \frac{1}{V_0 B_o \tau_c} = N_0$$

Ovvero, l'inversione di popolazione di picco è uguale a quella di equilibrio

Facendo il rapporto tra la seconda e la prima equazione ottengo:

$$\frac{d\phi}{dN} = -V_o\left(1 - \frac{N_0}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad \phi(N) = V_o\left(N_i - N - N_0 \ln\left(\frac{N_i}{N}\right)\right)$$

Da questa posso ricavare subito la potenza di picco dell'impulso:

$$\boxed{P_p = \frac{h\nu}{\tau_1}\phi(N_0) = \frac{h\nu}{\tau_1}V_0\left(N_i - N_0 - N_0 \ln\left(\frac{N_i}{N_0}\right)\right)}$$

Per trovare l'energia dell'impulso scrivo:

$$E = \int_0^\infty P dt = \frac{h\nu}{\tau_1}\int_0^\infty \phi\, dt$$

mi serve questo integrale

Trovo il risultato dell'integrale:

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = V_o B_o \phi N - \dfrac{1}{\tau_c}\phi \\ \dfrac{dN}{dt} = -B_o \phi N \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\phi}{dt}\,dt = \int_0^\infty \left(V_o B_o N - \frac{1}{\tau_c} \right) \phi\, dt$$

$$\phi(\infty) - \phi(0) = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dN}{dt}\,dt = -\int_0^\infty B_o \underline{\phi N}\, dt$$

$$V_o \int_0^\infty B_o \underline{\phi N} dt = \frac{1}{\tau_c} \int_0^\infty \phi\, dt$$

$$\int_0^\infty \phi\, dt = -\tau_c V_o \int_0^\infty \frac{dN}{dt}\,dt = \tau_c V_o \left(N_i - N_f \right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{h\nu}{\tau_1} \int_0^\infty \phi\, dt = h\nu \frac{\tau_c}{\tau_1} V_0 \left(N_i - N_f \right) = h\nu \frac{\tau_c}{\tau_1} V_0 N_i \left(1 - \frac{N_f}{N_i} \right)$$

Notiamo che N_f non è un'ulteriore incognita, infatti:

$$\phi(N_f) = V_o\left(N_i - N_f - N_0 \ln\left(\frac{N_i}{N_f}\right)\right) \approx 0$$

Perché alla fine dell'impulso non ci sono fotoni in cavità

Da cui ottengo:

$$\frac{\xi - 1}{\ln(\xi)} = \frac{N_0}{N_i} \quad \text{con} \quad \xi \overset{df}{=} \frac{N_f}{N_i} \quad \Rightarrow \quad N_f = N_f(N_i, N_0)$$

Quindi ottengo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

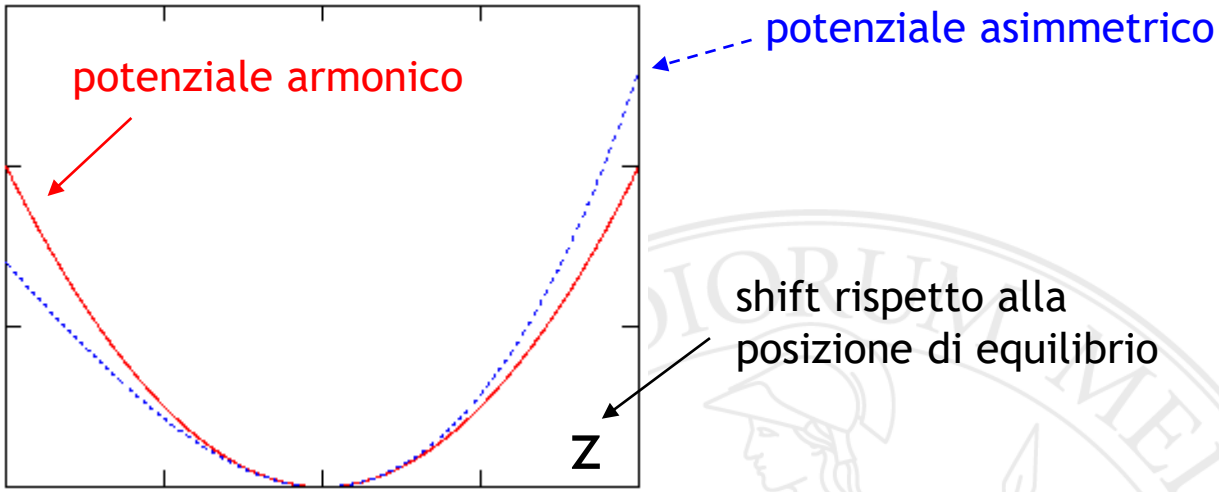
$$\tau_D = \tau_c\left(\frac{N_i}{N_0(\tau_c)} - 1\right)^{-1} \qquad E = h\nu\frac{\tau_c}{\tau_1}V_0 N_i\left(1 - \frac{N_f(N_i, N_0(\tau_c))}{N_i}\right)$$

$$P_p = \frac{h\nu}{\tau_1}V_0\left(N_i - N_0(\tau_c) - N_0(\tau_c)\ln\left(\frac{N_i}{N_0(\tau_c)}\right)\right)$$

Quindi misurando τ_d, E, P_p ricavo le tre incognite: τ_c, τ_1, N_i

Introduzione all'ottica non lineare

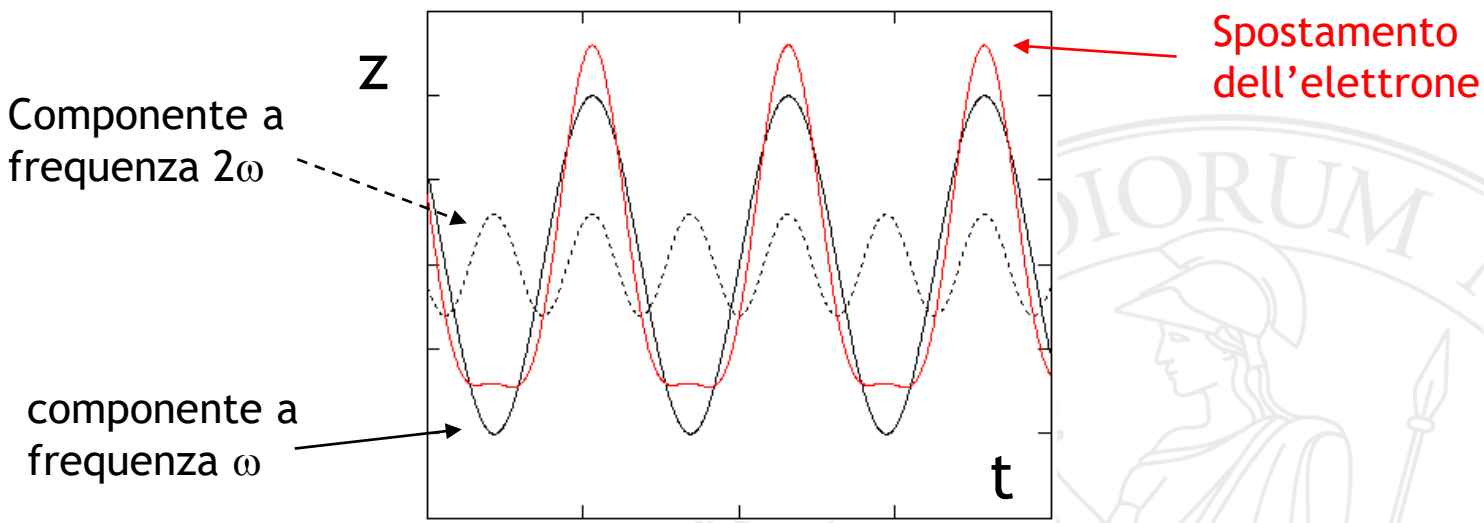
In un cristallo non centrosimmetrico (non simmetrico per inversione spaziale, ad esempio un ferroelettrico) l'elettrone vive in un potenziale asimmetrico:



Quindi l'elettrone risente di una forza di richiamo più grande quando si sposta a "destra". Questa asimmetria ha come conseguenza che se applichiamo una forzante sinusoidale all'elettrone (ovvero, un campo elettrico ad un certa frequenza ω), questo tenderà a muoversi con minore ampiezza quando si sposta a "destra" e con ampiezza maggiore quando si sposta verso "sinistra". Quindi il dipolo associato all'elettrone irraggerà un campo che oltre alla frequenza ω conterrà anche altre frequenze, in particolare la frequenza 2ω.

Approccio intuitivo alla generazione di seconda armonica:

Una dinamica impulsata-smooth la possiamo pensare come dovuta a due frequenze che si sommano quando devono costruire l'impulso e si sottraggono quando devono disegnare l'andamento smooth. Inoltre affinchè questo tipo di relazione di fase sia mantenuto nel tempo è chiaro che deve esistere un rapporto intero tra le frequenze



La risposta non lineare diventa importante quando la forzante è una frazione non del tutto trascurabile rispetto alle forze di legame del cristallo.

Condizione necessaria per la generazione di armonche:

L'impulso con frequenza ω che propaga nel cristallo non lineare induce la polarizzazione ad oscillare anche alla frequenza 2ω. Affinchè venga prodotto un impulso di seconda armonica di grande energia i campi irraggiati alla frequenza 2ω che provengono da punti diversi del cristallo devono sommarsi in modo costruttivo.

Per ottenere interferenza costruttiva la 1° e la 2° armonica devono viaggiare insieme, ovvero, devono avere la stessa velocità di fase.

Affinchè ciò accada l'indice di rifrazione alla frequenza ω (diciamo 1064nm per fissare le idee) deve essere uguale all'indice di rifrazione della seconda armonica (532nm).

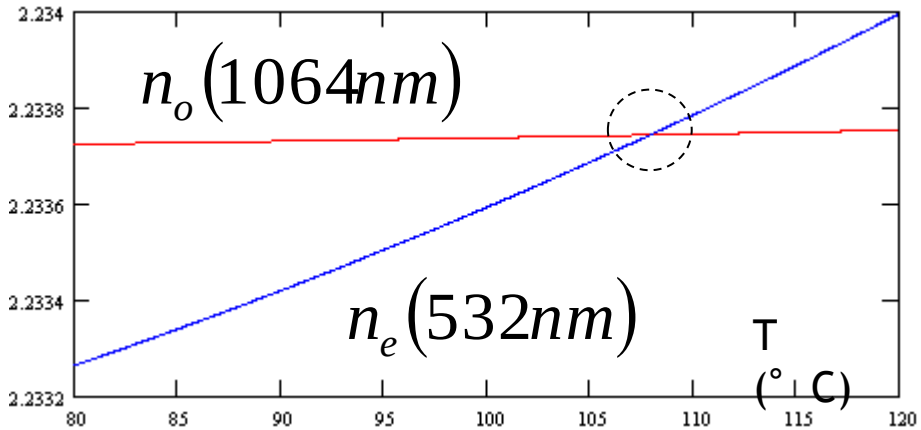
Questo non può mai accadere in un cristallo isotropo perchè l'indice di rifrazione diminuisce all'aumentare della lunghezza d'onda. Possiamo però ottenere la condizione di phase-matching con una delle seguenti tecniche:

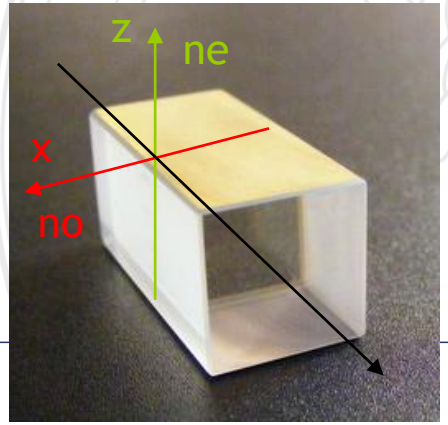
1) phase-matching non critico (con un cristallo birifrangente)
2) phase-matching critico (con un cristallo birifrangente)
3) quasi-phase-matching (QPM) con un cristallo periodically-poled

Nei casi di phase-matching critico e non critico la 1° e la 2° armonica viaggiano nel cristallo con polarizzazioni diverse (diciamo perpendicolari per fissare le idee). Poichè in questi casi il cristallo è birifrangente è possibile (ma non sempre) trovare una configurazione geometrica degli assi del cristallo per cui ad una data temperatura si ottiene la condizione di phase-matching. Da notare subito che poichè le polarizzazioni sono diverse il cristallo non lineare mi deve dare la possibilità di ottenere una oscillazione lungo un asse perpendicolare a quello della forzante (campo).

Phase matching non critico:

Esempio: il **Niobato di Litio** è un cristallo non lineare e birifrangente. In particolare è un cristallo uniassico, ovvero un cristallo caratterizzato da 3 assi due dei quali (x,y) hanno un indice di rifrazione denominato n_o mentre il terzo (z) ha un indice di rifrazione n_e. Se la prima armonica ha polarizzazione lungo x e la seconda lungo z è possibile trovare una temperatura per la quale si ottiene la condizione di phase matching.

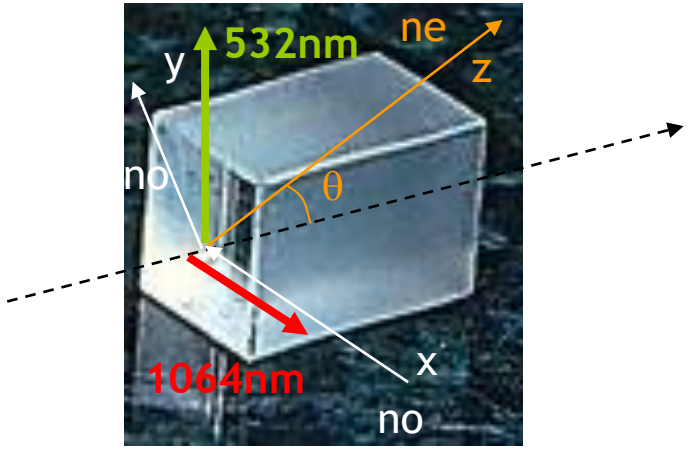




Importante: in questo caso la 1° e la 2° armonica sono onde ordinarie quindi non ho walk-off

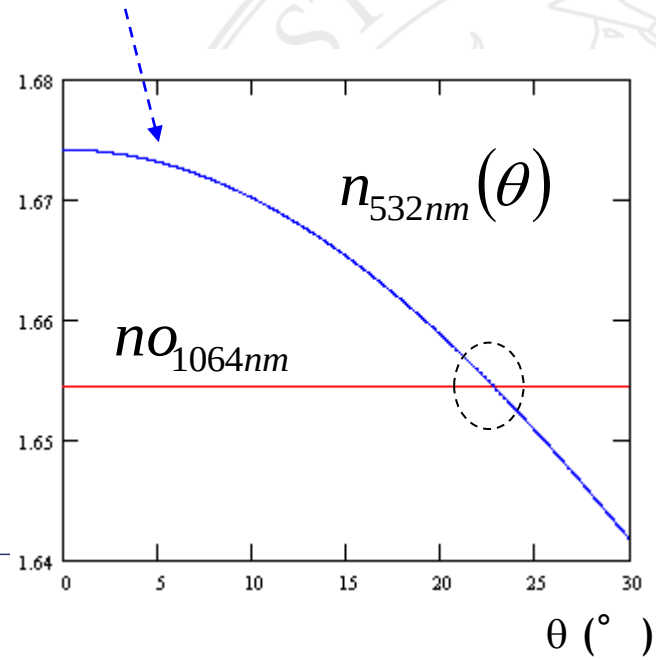
Phase matching critico:

Esempio: il **Borato di Bario (β-BBO)** è un cristallo non lineare e birifrangente. Anche in questo caso si tratta di un cristallo uniassico. A T ambiente è possibile ottenere la condizione di phase-matching se la prima armonica è ordinaria e la seconda armonica straordinaria.



$$\frac{1}{n_{2\omega}^2(\theta)} = \frac{\sin(\theta)^2}{n_{e,2\omega}^2} + \frac{\cos(\theta)^2}{n_{o,2\omega}^2}$$

In questo caso la seconda armonica ha una componente sia sull'asse y (no) che sull'asse z (ne). Quindi la 2° armonica è un'onda straordinaria e l'indice di rifrazione è una funzione dell'angolo θ. In questo caso è possibile trovare un angolo θ per il quale si ottiene la condizione di pahse matching:



In questo caso la 1° e la 2° armonica tendono a separarsi propagando nel cristallo. Infatti, la 2° armonica (essendo straordinaria) subisce un walk-off di 72mrad (poco meno di 1mm dopo un 1cm di cristallo)

Considerazioni generali sul phase-matching critico e non critico: è chiaro che quando è possibile il phase matching non critico è preferibile ed è praticamente obbligatorio quando si ha a che fare con spot micrometrici a causa del walk-off (ad esempio quando si fa generazione non lineare all'interno di piccole cavità OPO)

Quasi-phase-matching (QPM):

I cristalli periodically-poled sono molto costosi ma permettono di generare campi con polarizzazione uguale a quella del campo forzante. E' intuitivo pensare che lo spostamento indotto dalla forzante lungo la sua direzione è in generale maggiore degli spostamenti generati sugli assi perpendicolari, ovvero, i cristalli periodically-poled consentono di sfruttare gli elementi più grandi del tensore non lineare.

Prima descrivo la tecnica del QPM e poi ritornerò sul tensore non lineare per spiegare meglio questo punto.

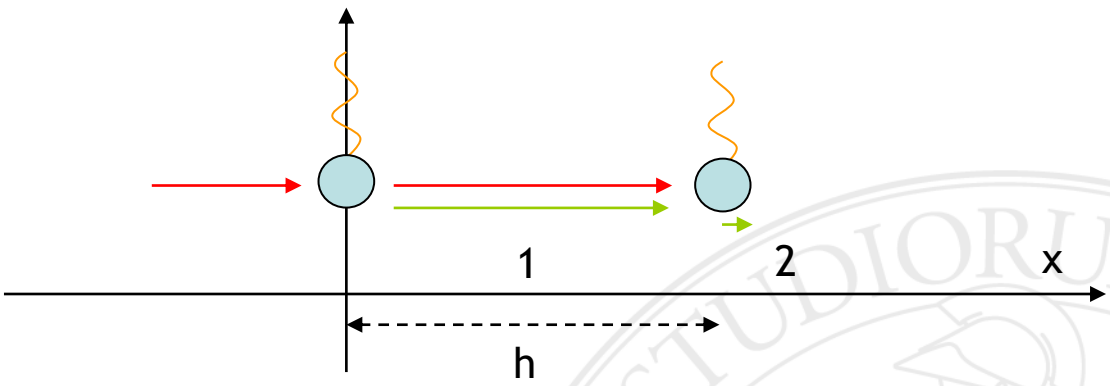
La polarizzazione non lineare va come il campo forzante al quadrato:

$$P_{NL} = 2\varepsilon_0 d E^2$$

d è in realtà un tensore ma quello che adesso ci interessa notare è che se cambio il segno di d (ovvero inverto l'asse z del cristallo) anche la fase della polarizzazione cambia di π.

Ciò vuol dire che se anche non sono in condizione di phase-matching posso evitare interferenza distruttiva sulla 2° armonica se inverto l'asse z del cristallo (e quindi il segno di d) prima che ciò accada.

Per introdurre questa tecnica pensiamo prima al caso di due soli oscillatori non lineari investiti dal campo della 1° armonica:



Sia il primo che il secondo oscillatore generano la frequenza 2ω ma per trovare il campo complessivo dobbiamo considerare la propagazione del campo generato dal primo oscillatore fino alla posizione h e per quanto riguarda il secondo oscillatore dobbiamo considerare la propagazione della forzante fino al punto h e il fatto che la seconda armonica va come il quadrato della prima, complessivamente nel punto h abbiamo:

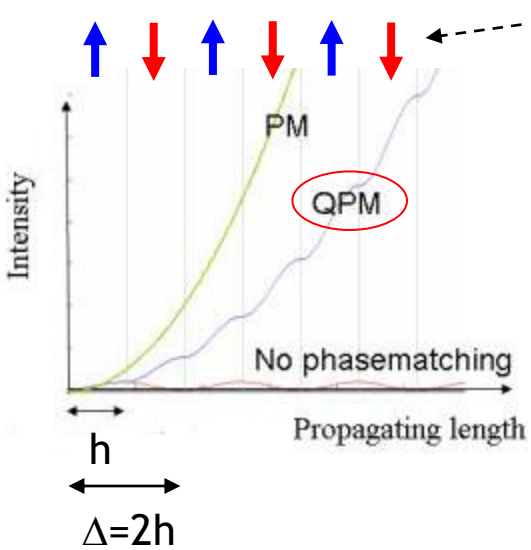
$$E_{2\omega} \propto e^{ik_2 h} + e^{i2k_1 h} = e^{ik_2 h}\left(1 + e^{i\Delta k \cdot h}\right)$$

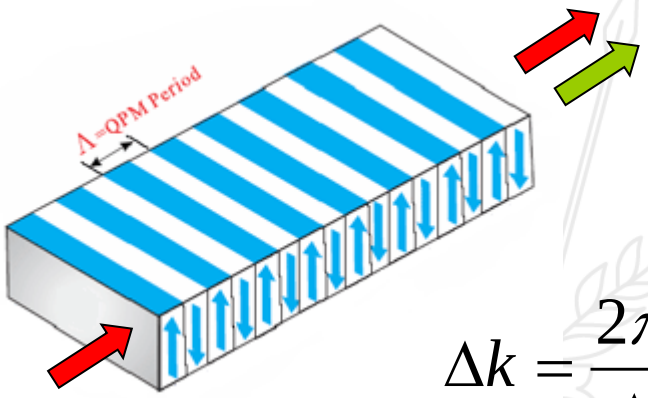
Quando h è tale che $\Delta k \bullet h = \pi$ allora il campo complessivo generato è nullo.

Se pero' invertiamo l'asse del secondo oscillatore otteniamo interferenza costruttiva.

$$E_{2\omega} \propto e^{ik_2 h} - e^{i2k_1 h} = e^{ik_2 h}\left(1 - e^{i\Delta k \cdot h}\right) = 2e^{ik_2 h}$$

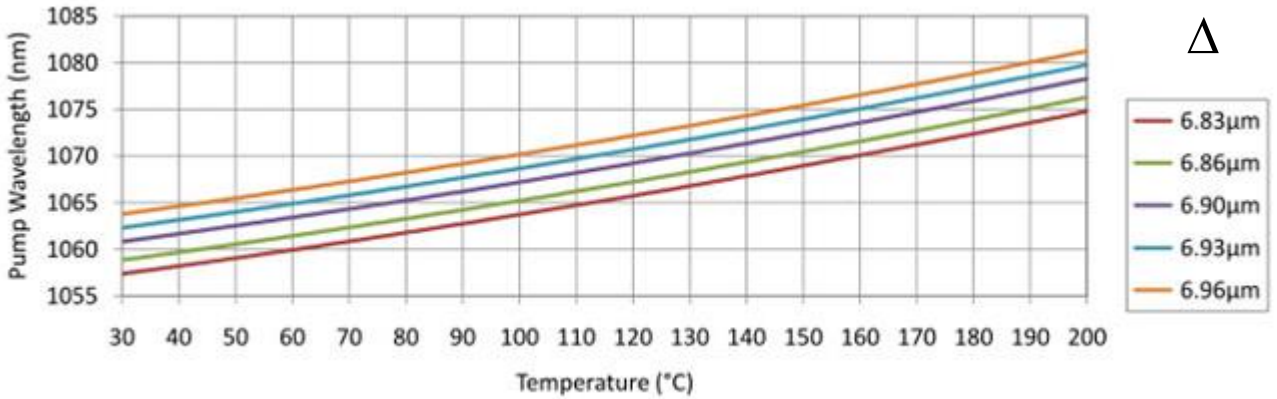
Se invece di avere due soli oscillatori abbiamo un continuo (come nel caso del cristallo) allora dobbiamo considerare anche i campi di seconda armonica generati in tutti i punti tra 0 e h. In questo caso h non è più il punto in cui si ha il campo nullo ma è il punto in cui il campo di seconda armonica inizia a diminuire. Anche in questo caso se dopo un passo h inverto gli oscillatori ovvero l'asse z del cristallo la seconda armonica continua ad aumentare. Questa è la tecnica del quasi QPM:





$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta}$$

Nel caso di un cristallo di Niobato di Litio (drogato con MgO 5% per aumentarne la robustezza) il periodo del reticolo è dell'ordine 6 μm nel caso di generazione di 532nm partendo da 1064nm. Il phase matching viene ottimizzato stabilizzando la temperatura del cristallo ad un certo valore come si vede nella fig. sotto:



Un punto importante è che per ottenere l'orientamento alternato dei domini ferroelettrici devono essere depositati degli elettrodi micrometrici sulla superficie del cristallo e deve essere applicato un campo maggiore del campo coercitivo (l'ordine di grandezza è kV/mm).

Quindi il cristallo non può essere molto spesso altrimenti si dovrebbe applicare una tensione distruttiva. Ciò limita lo spessore massimo all'ordine di 1mm, ovvero, piccola area e quindi piccola potenza.

Tensore non lineare:

La relazione tra il campo elettrico e il vettore polarizzazione non lineare è (al secondo ordine):

$$P_{NL,i} = 2\varepsilon_0 d_{i,j,k} E_j E_k$$

Il tensore d permette di trasferire la sollecitazione del campo su assi diversi rispetto a quello della forzante:

$$\begin{bmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{bmatrix} = 2\epsilon_0 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{bmatrix}$$

Ad esempio l'elemento d_{31} permette di trasferire l'effetto della componente x della forzante lungo l'asse z.

Vediamo il tensore non lineare di uno dei più importanti cristalli non lineari, il Niobato di Litio:

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4.6 & -2.6 \\ -2.6 & 2.6 & 0 & -4.6 & 0 & 0 \\ -4.6 & -4.6 & -25.0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{pm/V}$$

d_{zx} d_{zy} d_{zz}

L'elemento più grande è d_{zz}=25pm/V. Poichè forzante e polarizzazione sono entrambi lungo z questo elemento può essere sfruttato solo con il QPM. Con questa tecnica però il d effettivo diventa: $d_{zz} \cdot 2/\pi$=16pm/V. Considerando poi la qualità del grating arriviamo a circa 14pm/V.

Gli elementi d_{zx} e d_{zy} possono invece essere sfruttati con la tecnica del phase-matching non critico nella quale l'angolo θ è 90° .

Nel caso del phase-matching critico il d_{eff} dipende dalla particolare configurazione geometrica usata poichè la seconda armonica ha componenti su più assi (il calcolo automatico si può fare con il programma free SNLO scaricabile da http://www.as-photonics.com/snlo)

Phase matching come conservazione dell´impulso: (somma e differenza di frequenze)

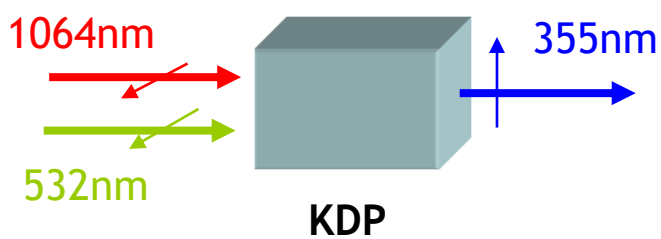
Scrivere $\Delta k=0$ nel caso di generazione di seconda armonica vuol dire:

$$\Delta k = 0 = 2k_1 - k_2 = k_1 + k_1 - k_2 = 0$$

Questo può essere interpretato come segue: nella generazione di seconda armonica 2 fotoni @ 1064nm vengono distrutti per generare 1 fotone @ 532nm in questo processo deve essere conservata non solo l'energia ma anche l'impulso.

L'interazione non lineare al secondo ordine permette non solo di generare la seconda armonica ma in generale di sommare o sottrarre due frequenze in ingresso o di generare due diverse frequenze partendo da 1 in ingresso, in ogni caso dobbiamo avere $\Delta k=0$ o $\Delta k=2\pi/\Delta$ nel caso di QPM.

Esempio: (generazione di 3° armonica)



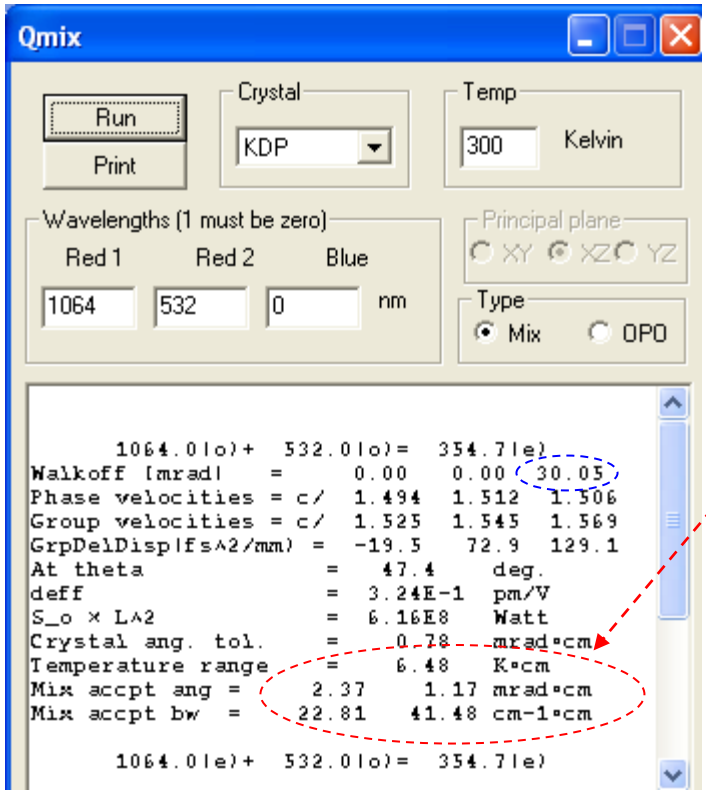
$$k_{355}(\theta) = k^o{}_{1064} + k^o{}_{532}$$

si trova θ=47.4° (phase matching critico) con d_{eff}=0.3pm/V

Quanto posso allontanarmi dalla condizione di conservazione dell'impulso?

Il punto è che i fotoni vengono generati con una indeterminazione spaziale data dalla lunghezza del cristallo quindi dalla relazione di indeterminazione otteniamo:

$$\Delta k \cdot \Delta x = \Delta k \cdot L_c = \frac{1}{2}$$



Quindi più il cristallo è corto e più l'impulso può allontanarsi dalla condizione di PM.

Per far variare Δk posso cambiare le frequenze di ingresso, posso cambiarne la direzione e posso cambiare la temperatura. Le tolleranze possono essere ottenute direttamente da SNLO

Ricordare che $1cm^{-1}$ equivale a 30GHz

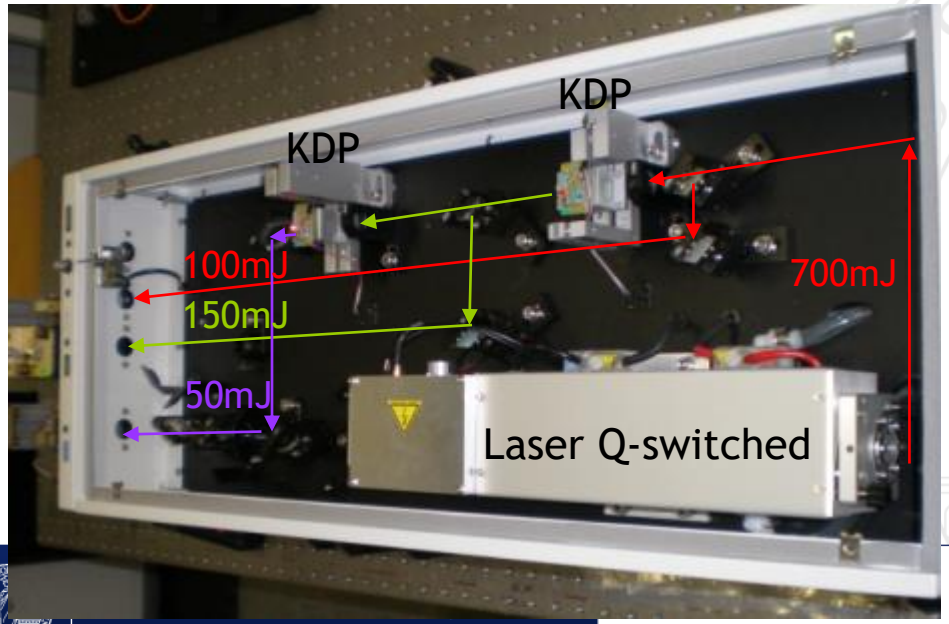
L'esempio si riferisce alla generazione di 3° armonica con il KDP. Si tratta di phase-matching critico. Da notare anche l'angolo di walk-off di 30mrad

Considerazioni generali:

Quindi con un cristallo lungo (ad esempio 2cm) abbiamo meno accettanza angolare e di banda ma possiamo generare più potenza (nella generazione di 2° armonica la potenza generata va come la lunghezza al quadrato).

L'efficienza di generazione va come l'inverso della dimensione dello spot. Ma nel caso di phase-matching critico non è possibile usare spot molto piccoli a causa del walk-off (in particolare lo spot deve essere più grande di $L_c \bullet \theta_{walk\text{-}off}$. In tutti i casi quando si diminuisce la dimensione dello spot si raggiunge presto la soglia di rottura del cristallo.

Laser commerciale con generazione di 2° e 4° armonica:



Rosso 1064nm, Verde 532nm, Viola 266nm

L'impulso @ 1064nm è 4ns.

Ordini di grandezza: da circa 600mJ@1064nm si ottengono 300mJ@532nm (50%). Di questi 150mJ vengono usati per generare circa 50mJ @ 266nm (30%). Notare che parte della 1° e della 2° armonica vengono mandate all'uscita prima di entrare nei cristalli (il profilo spaziale viene deteriorato dalla generazione di armonica).

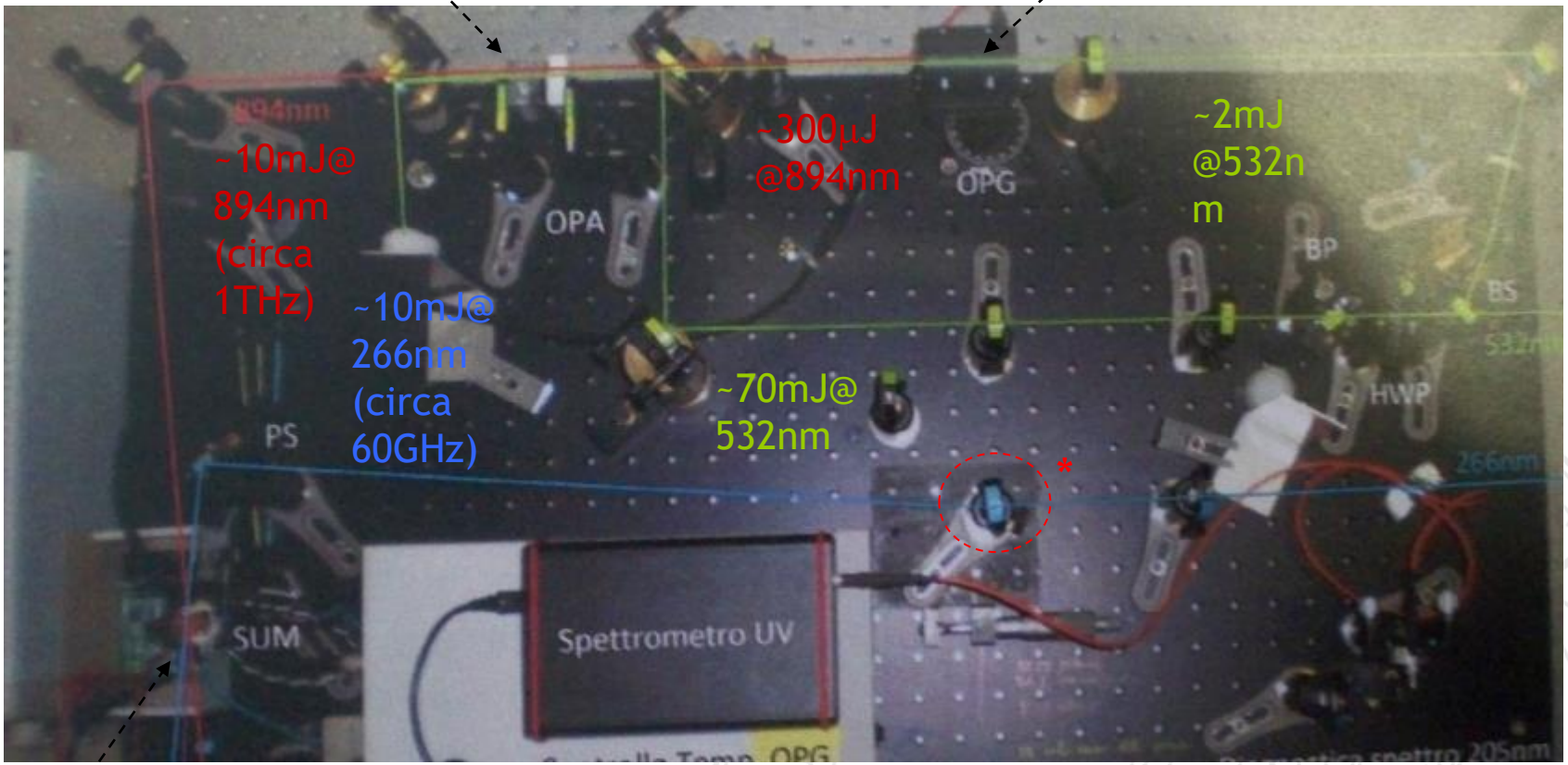
Esempio: generazione di radiazione UV @ 205nm

Lunghezze impulsi 2-3ns

BBO 12mm X 2 incrociati x compensazione walk-off (d piccolo ma grande area ~2mm, PM critico)

PPKTP 30mm (*grande d piccola area ~200μm*)

532nm ⇨ 894nm + 1313nm



BBO 3 o 5 mm

266nm + 894nm ⇨ 205nm ~100µJ

generati in configurazione non collineare per prelevare più facilmente l'impulso @ 205nm

Tolleranze:

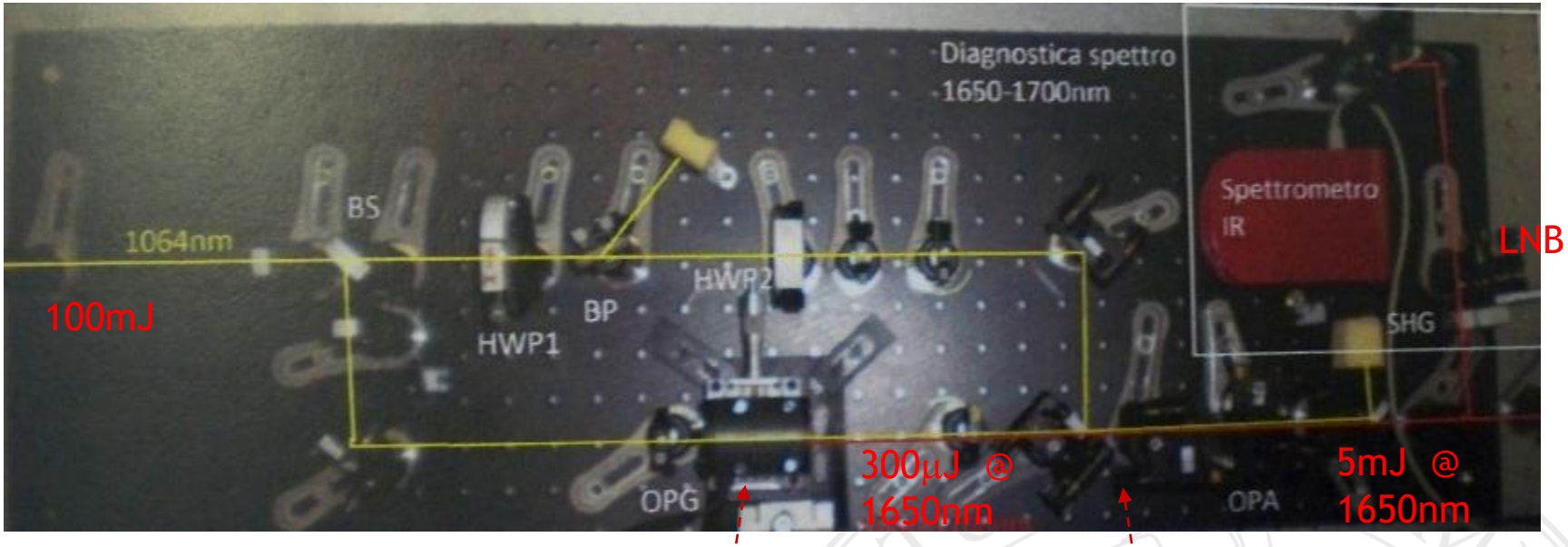
Temperature range =		3.59	K•cm
Mix accpt ang =	0.61	0.17	mrad•cm
Mix accpt bw =	1.70	4.25	cm-1•cm

893.9(e)+ 266.0(o)= 205.0(e)

Esercizio: ricavare la larghezza spettrale del 205nm

* lente fuori asse per compensazione astigmatismo del 266nm

Esempio: generazione di radiazione IR @ 1600-1700nm



	0	0	0	0	1.95	0
d=	0	0	0	3.9	0	0
KTP	1.95	3.9	15.3 *	0	0	0

PPKTP 30mm

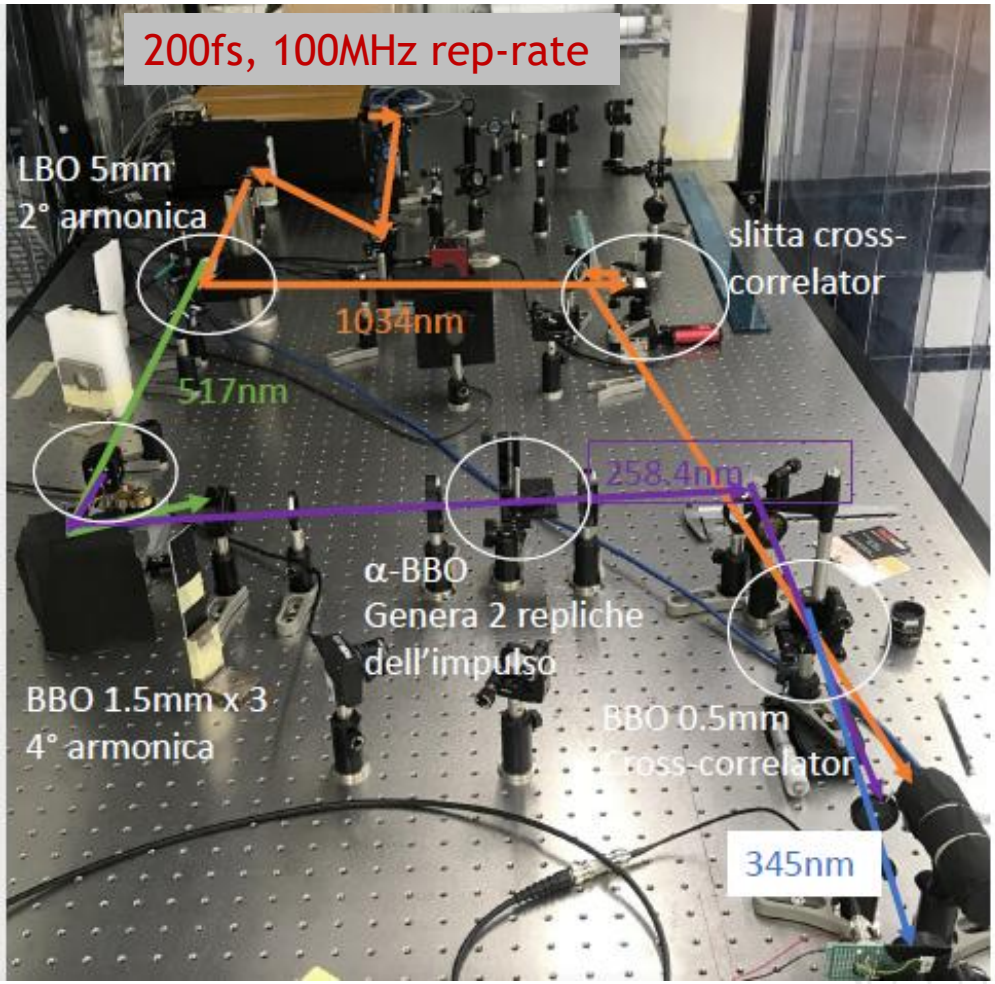
KTP 10mm x 2 incrociati, PM critico

1064nm ⇨ ~1650nm + ~3000nm

Cambiando la temperatura del PPKTP si sceglie la lunghezza d'onda generata nell'IR. Una volta scelta la temperatura del PPKTP i cristalli KTP dell'amplificatore vanno allineati per trovare l'angolo del phase-matching critico. La lunghezza d'onda viene misurata osservando con uno spettrometro (progettato per funzionare fino a 1100nm) la sua seconda armonica a circa 800nm (la seconda armonica si ottiene per mezzo di un cristallo di Niobato di Litio LNB)

* Il KTP rispetto al LNB ha un d minore ma ha una maggiore soglia di danneggiamento

Lab Laser LASA: generazione 4° armonica per test fotocatodi Cs_2Te



2° armonica: generata da un cristallo LBO lungo 5mm alla temperatura di 180°C (phase matching non critico per evitare walk-off). Otteniamo 3W con potenza di pompa di 10W.

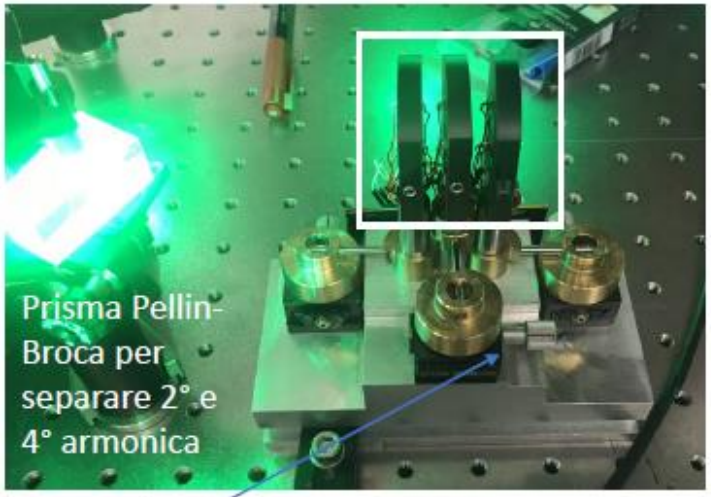
4° armonica: generata da 3 cristalli BBO lunghi 1.5mm con phase matching critico. Usiamo 3 cristalli per avere compensazione del walk-off orientandoli con l'asse principale in modo alternato. Otteniamo 600mW.

Cristallo α-BBO: usiamo un cristallo α-BBO lungo 6.5mm per creare due repliche dell'impulso alla distanza di 5.49ps (questo ci serve a calibrare il cross-correlator per convertire la scala temporale dell'oscilloscopio in ps dell'impulso)

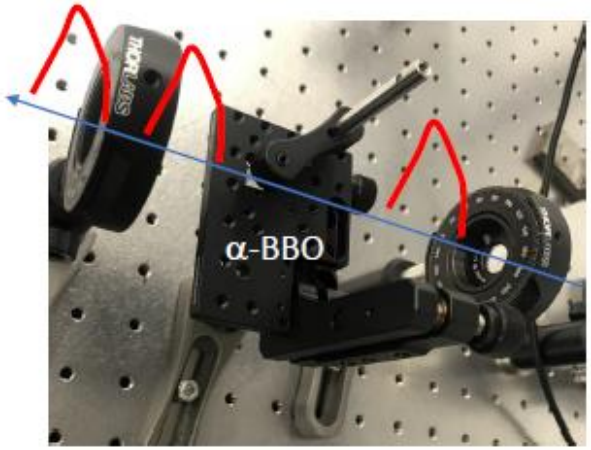
3° armonica: il profilo dell'impulso in 4° viene riscostruito facendo interagire la 4° e la 1° amonica in un cristallo BBO per generare la 3° amonica...

Profilo temporale dell'impulso in 4° amonica

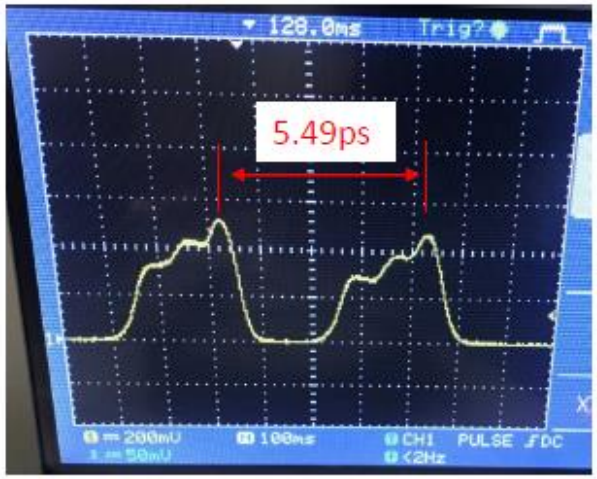
Generato con 3° cristalli BBO



La condizione di phase matching viene trovata ruotando i cristalli rispetto all'asse verticale



Un cristallo α-BBO lungo 6.5mm genera due repliche dell'impulso alla distanza nota di 5.49ps e questo ci serve per calibrare il cross-correlator. Chiaramente senza il cristallo α-BBO si ottiene un solo impulso.



Come previsto è generato un impulso a rampa. Il primo cristallo genera con più efficienza, il secondo un po' meno e il terzo ancora meno perchè la seconda armonica cala in intensità.

Generazione di seconda armonica intracavity: oscillatore sovrasmorzato

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = R - B_0 \phi N - \dfrac{1}{\tau} N \\ \dfrac{d\phi}{dt} = V_a B_0 N \phi - \dfrac{1}{\tau_c} \phi - \alpha \phi^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = N_0 + \delta N \\ \phi = \phi_0 + \delta \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta N}{dt} = R - B_0 (\phi_0 + \delta\phi)(N_0 + \delta N) - \dfrac{1}{\tau}(N_0 + \delta N) \\ \dfrac{d\delta\phi}{dt} = V_a B_0 (N_0 + \delta N)(\phi_0 + \delta\phi) - \dfrac{1}{\tau_c}(\phi_0 + \delta\phi) - \alpha(\phi_0 + \delta\phi)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta N}{dt} \simeq \cancel{\left(R - B_0 \phi_0 N_0 - \dfrac{1}{\tau} N_0\right)} - B_0 \phi_0 \delta N - B_0 N_0 \delta\phi - \dfrac{1}{\tau} \delta N \\ \dfrac{d\delta\phi}{dt} \simeq \cancel{\left(V_a B_0 N_0 \phi_0 - \dfrac{1}{\tau_c}\phi_0 - \alpha \phi_0^2\right)} + V_a B_0 N_0 \delta\phi + V_a B_0 \phi_0 \delta N - \dfrac{1}{\tau_c}\delta\phi - 2\alpha\phi_0 \delta\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\delta\omega}{dt} \cong -\left(B_0\phi_0 + \dfrac{1}{\tau}\right)\delta\omega - B_0\omega_0\,\delta\phi \\ \dfrac{d\,\delta\phi}{dt} \cong \Big(\underbrace{V_a B_0 \omega_0 - \dfrac{1}{\tau_c}}_{=\alpha\phi_0} - 2\alpha\phi_0\Big)\delta\phi + V_a B_0 \phi_0\,\delta\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\delta\omega}{dt} \cong -\left(B_0\phi_0 + \dfrac{1}{\tau}\right)\delta\omega - B_0\omega_0\,\delta\phi \\ \dfrac{d\,\delta\phi}{dt} \cong -\alpha\phi_0\,\delta\phi + V_a B_0 \phi_0\,\delta\omega \end{cases}$$

$$\delta\omega = \frac{1}{V_a B_0 \phi_0}\left(\frac{d}{dt}\delta\phi + \alpha\phi_0\,\delta\phi\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\phi = -\alpha\phi_0\frac{d}{dt}\delta\phi + V_a B_0 \phi_0 \frac{d}{dt}\delta\omega$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\phi = -\alpha\phi_0\frac{d}{dt}\delta\phi - V_a B_0 \phi_0\left[\left(B_0\phi_0 + \frac{1}{\tau}\right)\delta\omega + B_0\omega_0\,\delta\phi\right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\phi = -\alpha\phi_0\frac{d}{dt}\delta\phi - V_a B_0\phi_0\left[\left(B_0\phi_0+\frac{1}{\tau}\right)\delta\omega + B_0\omega_0\delta\phi\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\delta\phi = -\alpha\phi_0\dfrac{d}{dt}\delta\phi - B_0^2 V_a\omega_0\phi_0\delta\phi - V_a B_0\phi_0\left(B_0\phi_0+\dfrac{1}{\tau}\right)\delta\omega \\ \delta\omega = \dfrac{1}{V_a B_0\phi_0}\left(\dfrac{d}{dt}\delta\phi + \alpha\phi_0\delta\phi\right) \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\phi = -\alpha\phi_0\frac{d}{dt}\delta\phi - B_0^2 V_a\omega_0\phi_0\delta\phi - \left(B_0\phi_0+\frac{1}{\tau}\right)\frac{d}{dt}\delta\phi - \left(B_0\phi_0+\frac{1}{\tau}\right)\alpha\phi_0\delta\phi$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\phi = -\left(\underbrace{B_0\phi_0+\frac{1}{\tau}}_{\frac{X}{\tau}}+\alpha\phi_0\right)\frac{d}{dt}\delta\phi - \left[\underbrace{B_0^2 V_a\omega_0\phi_0}_{\frac{X-1}{\tau\tau_c^*}} + \underbrace{\left(B_0\phi_0+\frac{1}{\tau}\right)}_{\frac{X}{\tau}}\alpha\phi_0\right]\delta\phi$$

$$\frac{1}{\tau_c^*} = \frac{1}{\tau_c} + \alpha\phi_0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\phi + \frac{2}{t_0}\frac{d}{dt}\delta\phi + \Omega^2\delta\phi = 0$$

$$\frac{2}{t_0} = \frac{x}{\tau} + \alpha\phi_0 = \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \alpha\phi^2 \Rightarrow \frac{\Delta\phi}{\tau_{RT}} = \frac{\eta\phi_0}{\tau_{RT}} = \alpha\phi_0^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\eta}{\tau_{RT}\phi_0}$$

$$= \frac{x}{\tau} + \frac{\eta}{\tau_{RT}} \approx \frac{\eta}{\tau_{RT}}$$

$$\Omega^2 = \frac{x-1}{\tau\tau_c^*} + \frac{x}{\tau}\alpha\phi_0 = \frac{x-1}{\tau\tau_c^*} + \frac{\eta x}{\tau\tau_{RT}} \approx \frac{x-1}{\tau\tau_c^*} \qquad \eta \sim 1\%$$

$$\boxed{\Omega < \frac{1}{t_0}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{\tau\tau_c^*}} < \frac{\eta}{2\tau_{RT}} \quad ; \quad \tau_c^* = \frac{\tau_{RT}}{\gamma^*}$$

$$\Rightarrow \eta > \sqrt{\frac{4\tau_{RT}}{\tau}(x-1)\gamma^*} \approx 10^{-3}$$