UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

# Laser combs

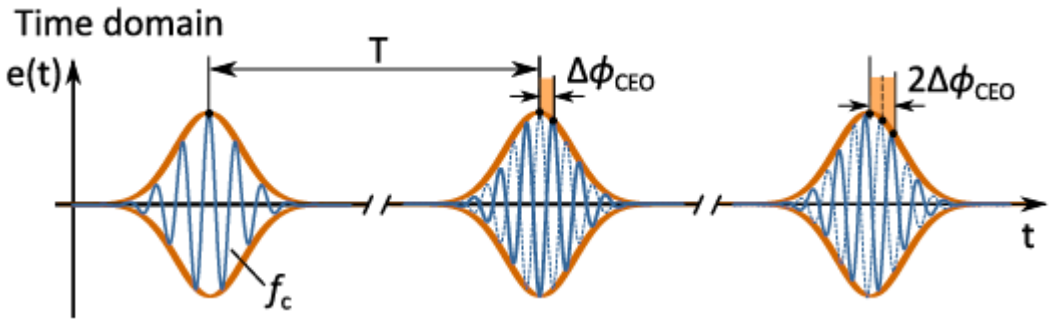
*Simone Cialdi*

# Outline

- Mode-locked laser comb
  - Carrier-envelope-offset (CEO)
  - f2f method (Hansch Nobel prize 2005)
- Optical cavity comb
  - Mismatch tra comb del laser e della cavità
  - Effetto della dispersione degli specchi sul comb
- PDH pulsed regime
  - Controllo del rep rate
  - CEO control
- Rumore di fase e di ampiezza in un laser

# Pettine di frequenza di un laser mode-locked (CEO)

A causa del fatto che la velocità di fase e la velocità di gruppo non sono uguali all'interno del mezzo attivo (o di altri elementi ottici presenti nella cavità del laser) abbiamo un offset tra il profilo dell'impulso (che propaga con la velcoità di gruppo) e la portante ottica (che propaga con la velocità di fase):




Questo shift di fase produce un offset nel comb spettrale del laser:

$$E(t) = \sum_n A(t-nT)\, e^{-i\omega_0(t-nT) - i\Delta\phi_{CEO} n}$$

$$\Big\Downarrow \tilde{\mathbb{F}}$$

$$\tilde{E}(\omega) = \int dt\, E(t)\, e^{+i\omega t} = \sum_n e^{+i\omega_0 nT - i\Delta\phi_{CEO} n} \int dt\, A(t-nT)\, e^{i(\omega-\omega_0)t}$$

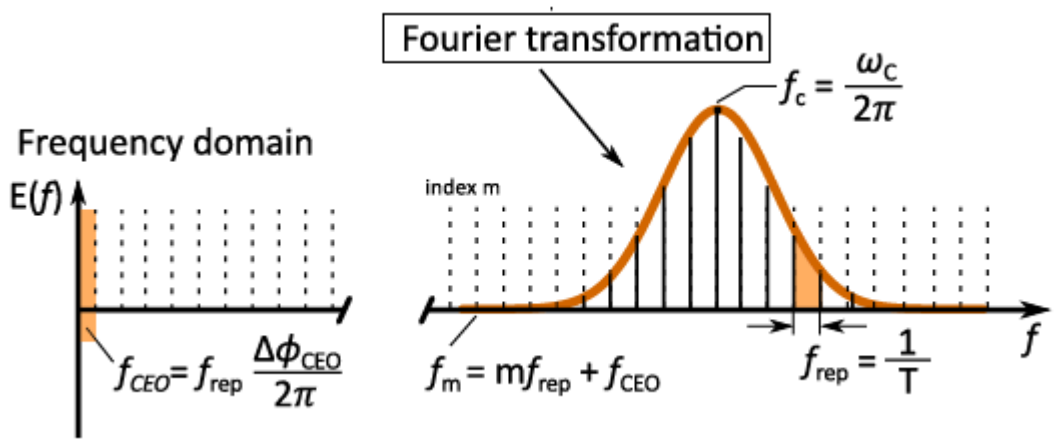
sostituisco $t' = t - nT \Rightarrow dt' = dt$

$$= \sum_n e^{i\omega_0 n T - i\Delta\phi_{CEO} n} \int dt' A(t') e^{i(\omega-\omega_0)(t'+nT)} dt' =$$

$$= \sum_n e^{i\omega n T - i\Delta\phi_{CEO} n} \int dt' A(t') e^{i(\omega-\omega_0)t'} = \sum_n e^{i\omega n T - i\Delta\phi_{CEO} n} \tilde{A}(\omega-\omega_0)$$

$$\sum_n \left(e^{i\omega T - i\Delta\phi_{CEO}}\right)^n = \frac{1}{1-e^{i(\omega T - \Delta\phi_{CEO})}} = \sum_m \delta(\omega-\omega_m) \quad \text{dove}$$

$$\omega_m = 2\pi\frac{m}{T} + \frac{\Delta\phi_{CEO}}{T} \Longrightarrow f_m = \frac{m}{T} + \frac{\Delta\phi_{CEO}}{2T}\frac{1}{T} \qquad f_{rep} = \frac{1}{T}$$



La $f_{rep}$ può essere misurata con grandissima precisione con la tecnica già vista. Se la $f_{CEO}$ è nota allora abbiamo un pettine di frequenze che può funzionare come un righello per misure di frequenza ad altissima precisione (circa 1 parte di $10^{16}$)

## f2f method per la misura della $f_{CEO}$:

VOLUME 85, NUMBER 11 PHYSICAL REVIEW LETTERS 11 SEPTEMBER 2000

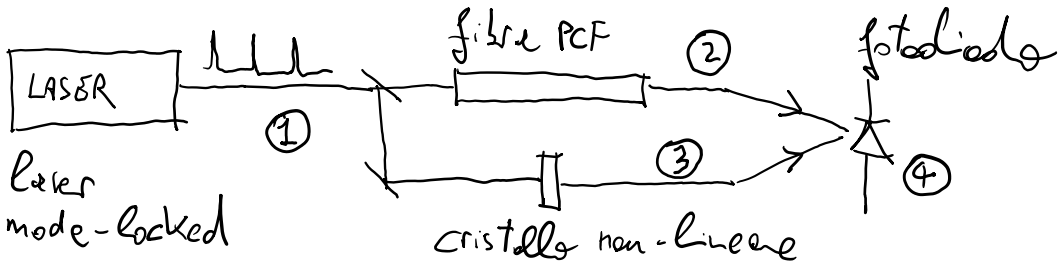
### Optical Frequency Synthesizer for Precision Spectroscopy

R. Holzwarth, Th. Udem, and T. W. Hänsch
*Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Hans-Kopfermann-Straße 1, 85748 Garching, Germany*

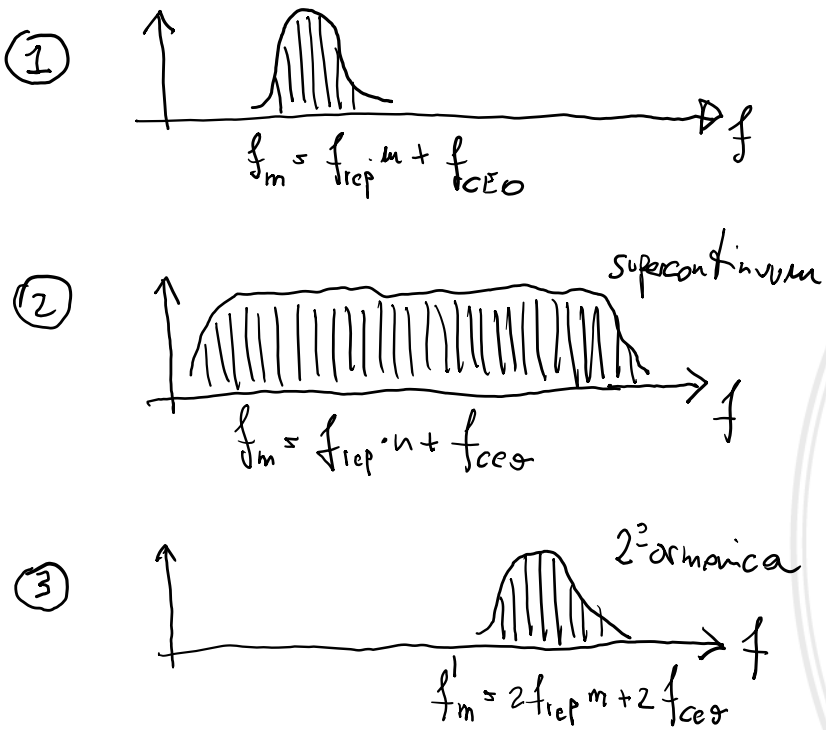
J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St. J. Russell
*Optoelectronics Group, Department of Physics, University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY, United Kingdom*
(Received 4 May 2000)

We have used the frequency comb generated by a femtosecond mode-locked laser and broadened to more than an optical octave in a photonic crystal fiber to realize a frequency chain that links a 10 MHz radio frequency reference phase-coherently in one step to the optical region. By comparison with a similar frequency chain we set an upper limit for the uncertainty of this new approach to $5.1 \times 10^{-16}$. This opens the door for measurement and synthesis of virtually any optical frequency and is ready to revolutionize frequency metrology.

Schema per il metodo f2f:




Vediamo cosa accade nel dominio spettrale:




Nota: il supercontinuum è prevalentemente dovuto a SPM (effetto non-lineare del terzo ordine). Per massimizzare l'effetto l'impulso deve essere molto corto nella propagazione in fibra e quindi serve una fibra con dispersione nulla alla lunghezza d'onda del laser

Il battimento a frequenza più bassa che osservo è proprio $f_{CEO}$

# Mismatch tra comb del laser e comb della cavità:

Al fine di usare una cavità per aumentare la potenza media di un treno di impulsi laser questi si devono sommare in fase all'interno della cavità. Nel dominio spettrale questo vuol dire sovrapporre perfettamente il comb del laser a quello della cavità.

Vediamo il comb della cavità:

parametro di stabilità

$$\nu_{n,p,l} = \frac{c}{2L}\left(n \pm \frac{2p + |l| + 1}{2\pi}\arccos(m)\right)$$

***+(-) se B>0 (B<0)***

dall'equazione di ciclicità per il campo elettrico in cavità troviamo un termine di offset del comb che dipende dal paramentro di stabilità (consideriamo solo il modo 0,0):

LASER : $f_{Lm} = m f_{Lrep} + f_{CEO}$

CAVITÀ : $f_{Cm} = m f_{Crep} + f_{CAV}$

supponiamo che esista un certo $m_0$ per cui corrispondente modo del laser e della cavità risuonano:

$$m_0 f_{Lrep} + f_{CEO} = m_0 f_{Crep} + f_{CAV} \Rightarrow f_{Lrep} - f_{Crep} = \frac{f_{CAV} - f_{CEO}}{m_0} \stackrel{df}{=} \frac{f_{off}}{m_0}$$

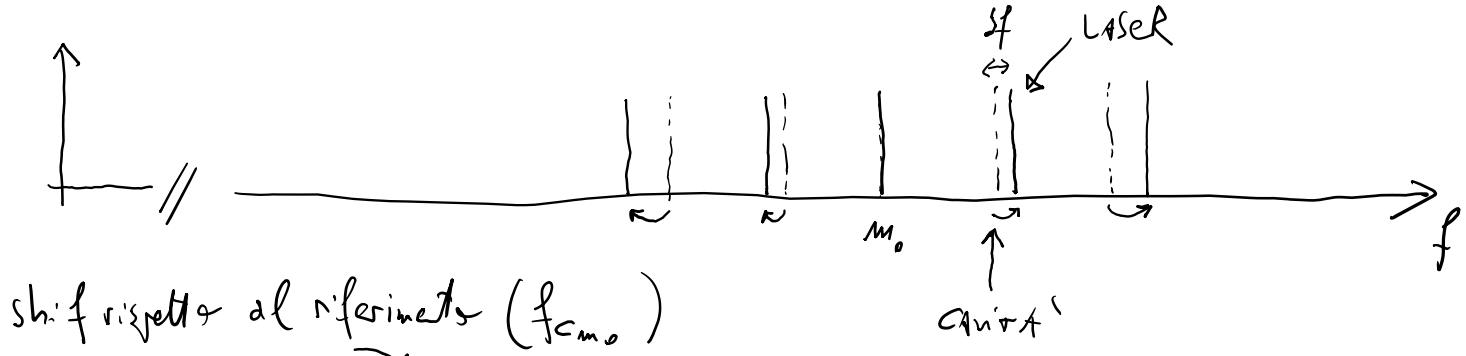
se consideriamo un laser con una $\lambda$ di circa 1000nm e un round trip di 10ns (100MHz) allora: $m_0 = \frac{L}{\lambda_0} = 3 \cdot 10^6$

adesso considero il modo $m = m_0 + \delta m$ e calcolo lo shift in frequenza tra laser e cavità:

$$\delta f = (m_0 + \delta m) f_{Lrep} + f_{CEO} - (m_0 + \delta m) f_{Crep} - f_{CAV} =$$

$$= \delta m \left( f_{Lrep} - f_{Crep} \right) = \delta m \frac{f_{off}}{m_0}$$

quindi per $\delta m$ diverso da 0 ho un mismatch simmetrico tra laser e cavità:




posso scrivere: $$\delta m = \frac{\delta \nu}{f_{c_{rep}}} = -\frac{c}{f_{c_{rep}} \lambda_0^2}\,\delta\lambda = -m_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$$

quindi: $$\delta f(\delta\lambda) = \delta m(\delta\lambda)\,\frac{f_{off}}{m_0} = -f_{off}\cdot\frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$$

adesso considero che il modo della cavità ha una larghezza $\Delta\nu_c$ (legata alla finesse della cavità) e che il laser ha uno spettro con larghezza $\Delta\lambda$ e vado a ricavare come è tagliato lo spettro del laser a causa della presenza di $f_{off}$:

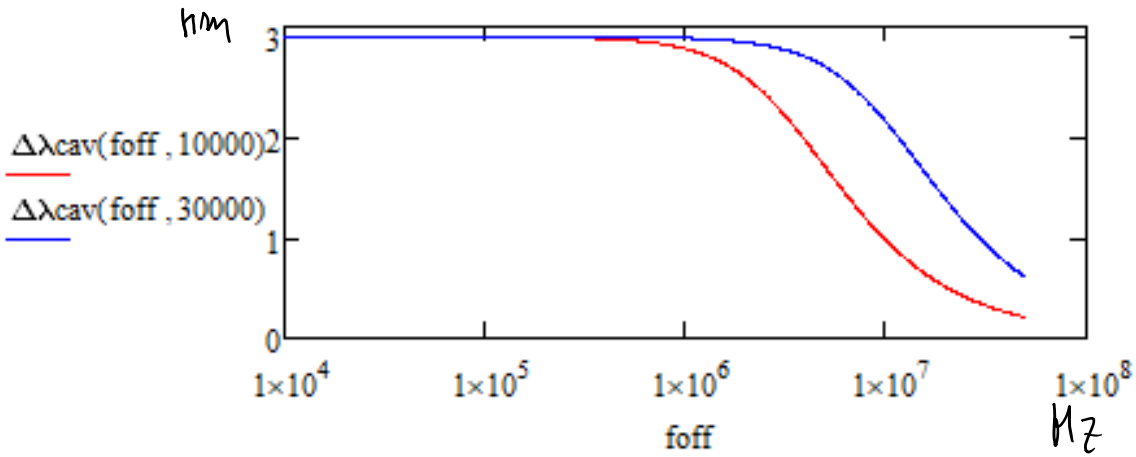
$$S(\delta\lambda) = S_{LASER}(\delta\lambda)\, e^{-\frac{2\,\delta f^2(\delta\lambda)}{\left(\frac{\Delta\nu_c}{1{,}177}\right)^2}} \quad \text{dove} \quad S_{LASER}(\delta\lambda) = e^{-\frac{2\,\delta\lambda^2}{\left(\frac{\Delta\lambda}{1{,}177}\right)^2}}$$

quindi si ottiene una larghezza spettrale accoppiata in cavità uguale a:

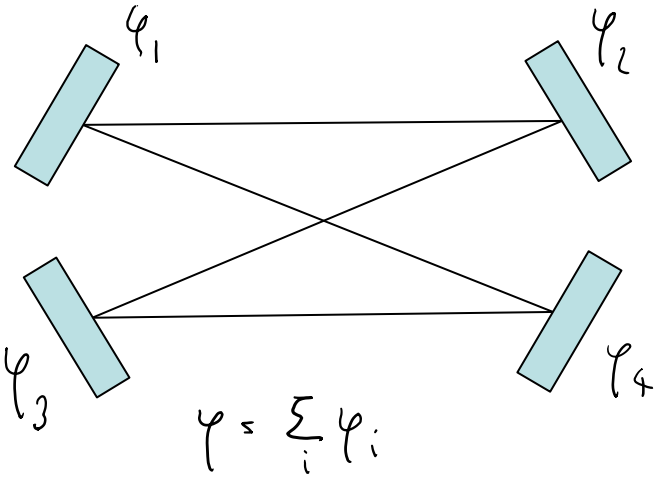
$$\boxed{\Delta\lambda_{CAV} = \frac{\alpha \cdot \Delta\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta\lambda^2}}} \quad \text{dove} \quad \boxed{\alpha = \frac{\Delta\nu_c \lambda_0}{f_{off}}}$$

ad esempio con $f_{clk} = 100\,MHz$ $\begin{cases} \Delta\nu_{c_1} = 10\,kHz & (F = 10^4) \\ \Delta\nu_{c_2} = 30\,kHz & (F \approx 3000) \end{cases}$

$\lambda_0 = 1030\,nm$ e $\Delta\lambda = 3\,nm$



# effetto della dispersione degli specchi sul comb della cavità




gli specchi hanno un coating formato da molti strati, quindi il fascio laser penetra nel coating e acquista una fase aggiuntiva. La lunghezza effettiva della cavità dipende anche da questa fase

$$\boxed{L_{eff} = L + \frac{\varphi}{2\pi}\lambda}$$

dove L è il round trip cnsiderando la superficie degli specchi

inoltre questa fase cambia con la lunghezza d'onda

quindi per il modo m-esimo della cavità posso scrivere:

$$\frac{L_{eff}}{\lambda_m} = m \Rightarrow \frac{L + \frac{\varphi(\lambda_m)}{2\pi}\lambda_m}{\lambda_m} = m \Longrightarrow \nu_m = \frac{c}{\lambda_m} = \frac{c}{L}\left(m - \frac{\varphi(\lambda_m)}{2\pi}\right)$$

adesso mi posso riferire al modo $m_0$ e sviluppare in serie rispetto a questo:

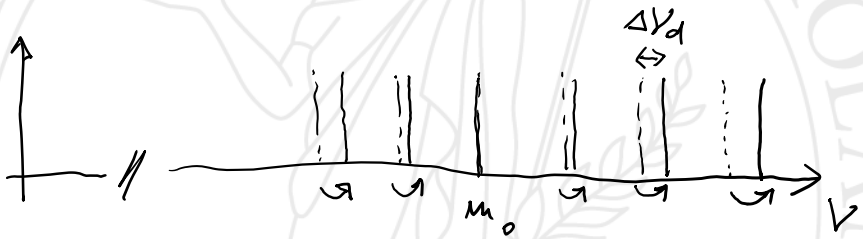
$$\nu_{m_0+\delta m} = \frac{c}{L}\left(m_0 + \delta m - \frac{\varphi_0}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\delta\lambda(\delta m) - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\delta\lambda^2(\delta m)\right)$$

dove $\delta\lambda = -\frac{\lambda_0}{m_0}\delta m$ (vedi pg. 9) quindi:

$$\nu_{m_0+\delta m} - \nu_{m_0} = \frac{c}{L}\left(\underbrace{\delta m + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\lambda_0}{m_0}\delta m}_{} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\frac{\lambda_0^2}{m_0^2}\delta m^2}_{\Delta\nu_d}\right)$$

questo pezzo cambia la frep a causa della penetrazione del fascio all'interno dello specchio (ma la distanza tra i denti del pettine è fissata)

questo pezzo va a cambiare la distanza tra i denti del pettine



considero solo il pezzo al secondo ordine e scrivo la modulazione dello spettro del laser:

$$S_2(\delta\lambda) = S_{Laser}(\delta\lambda)\, e^{-\frac{2\Delta\nu_d^2(\delta\lambda)}{\left(\frac{\Delta\nu_c}{1{,}177}\right)^2}}$$

posso scrivere:

$$\Delta\nu_d = -\frac{1}{2\pi}\frac{c}{L}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\delta\lambda^2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{c}{L}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2}\delta\nu^2$$

poiché $\delta\nu = -\frac{c}{\lambda_0^2}\delta\lambda$ e $\boxed{GDD \overset{df}{=} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2}}$ ottengo:

$$(2\pi)^2 GDD \frac{c^2}{\lambda_0^4} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} = -2.084\cdot 10^{-5}\,nm^{-2}$$ (per coppia specchio)

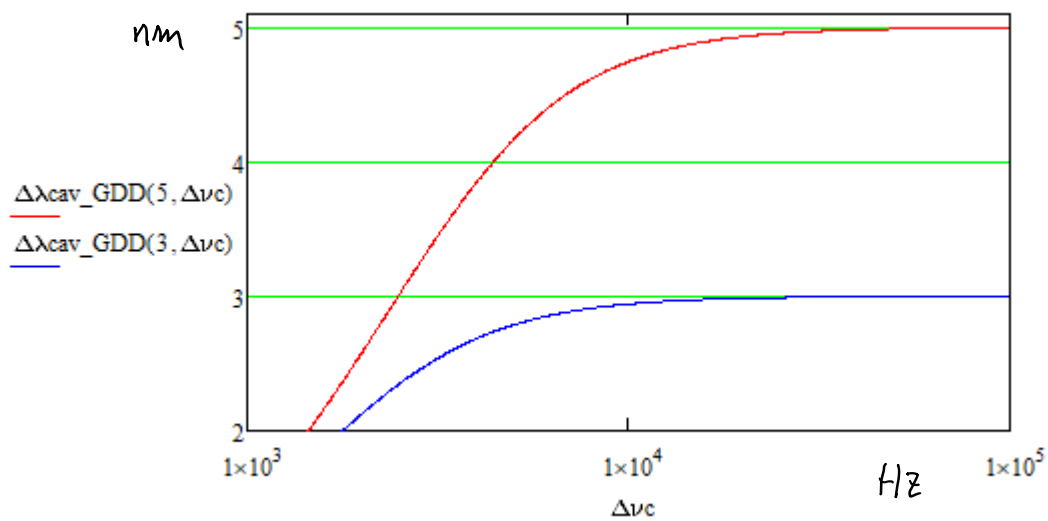
$$\Rightarrow GDD = 6{,}6\ fs^2$$

come nel caso del mismatch tra laser e cavità arrivo ad un'equazione simile:

$$\Delta\lambda_{CAV-GDD} = \frac{\beta \cdot \Delta\nu_c \cdot \Delta\lambda}{\sqrt{\Delta\lambda^2 + \beta^2 \Delta\nu_c^2}}$$

dove $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{L} \frac{1}{2} (2\pi)^2 GDD \frac{c^2}{\lambda_0^2} \cdot 4$ ← 4 specchi

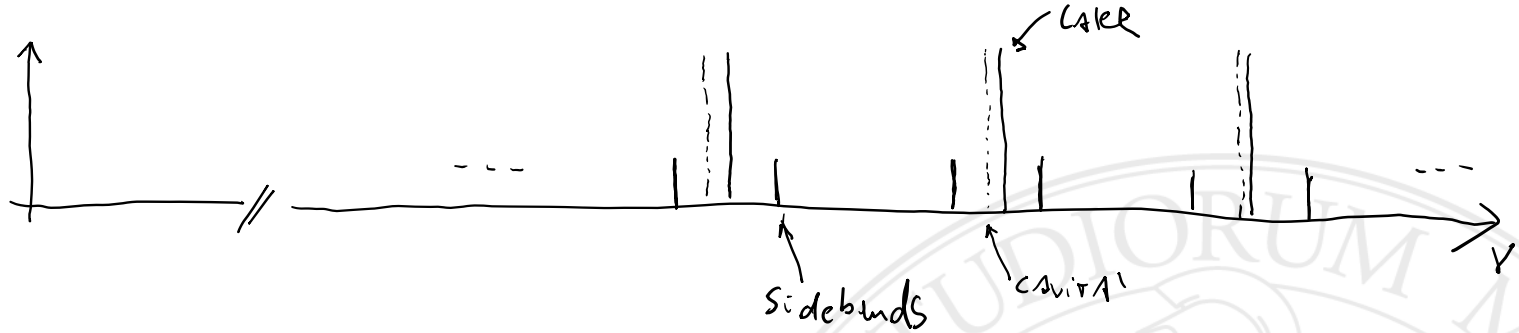
per $\lambda_0 = 1070\,nm$ $\quad GDD = 6{,}6\ fs^2$ $\quad \frac{c}{L} = 100\,MHz$



# PDH in regime impulsato:

Ci serve un metodo per correggere sia la $\nu_{rep}$ della cavità che la $\nu_{off}$ dovuta agli offset in freuenza di cavità e laser. Se usiamo il PDH il segnale di errore sarà dato dalla somma dei contributi per ogni dente del pettine.

Posso immaginare ogni dente del pettine come un laser singolo modo e quindi la modulazione di fase si estende su tutti i denti del pettine:




In questo caso il segnale del discriminatore conterrà la somma dei contributi relativi ad ogni dente (elimino i battimenti tra denti diversi perchè sono ad alta frequenza):

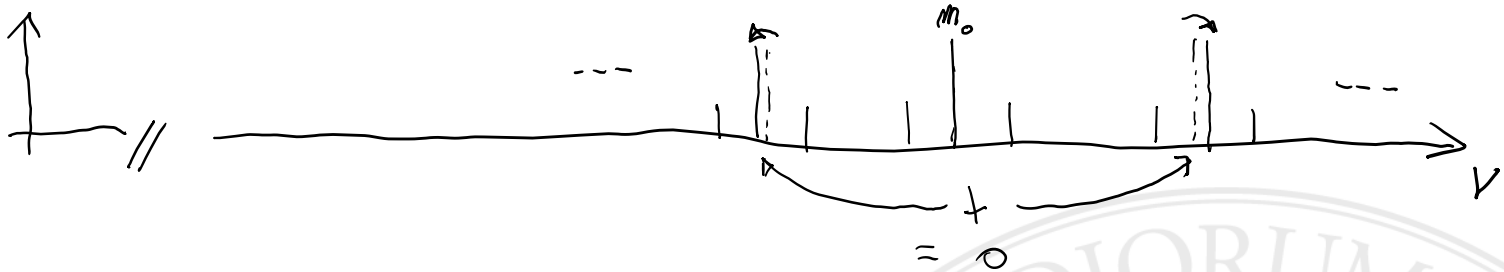
$$\boxed{V_d = D \sum_m \left( V_{L_m} - V_{c_m} \right) = D \sum_{\delta m} \left( V_{L_{m_0+\delta m}} - V_{c_{m_0+\delta m}} \right)}$$

dove
$$\begin{cases} V_{L_{m_0+\delta m}} = (m_0 + \delta m) V_{L_{rep}} + V_{CEO} \\ V_{c_{m_0+\delta m}} = (m_0 + \delta m) V_{c_{rep}} + V_{CAV} \end{cases}$$

ho cioè $\nu$ al posto di $f$

grazie al fatto che il contributo in δm è simmetrico questo segnale è sostanzialmente quello di un normale PDH. Infatti, supponendo che per il dente m0 la frequenza del laser e della cavità siano usguali abbiamo:

$$V_d = D \sum_{\delta m} \left( \nu_{L_{rep}} - \nu_{C_{rep}} \right) \delta m = 0$$




Quindi con questo metodo riusciamo a centrare il «baricentro» ma non possiamo eliminare $\nu_{off} = \nu_{CAV} - \nu_{CEO}$

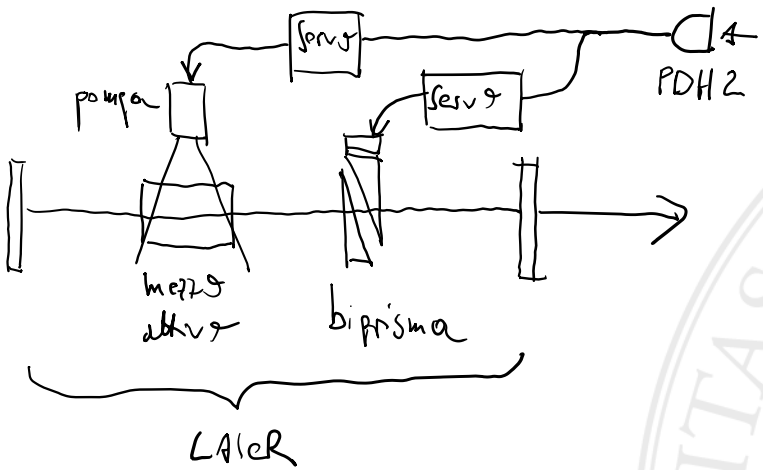
Per poter correggere noff dobbiamo eliminare la simmetria, ovvero, dobbiamo guardare solo la parte destra o sinistra del pettine e costruire un secondo PDH su quella:

In questo modo annullando il segnale di errore del PDH1 abbiamo la centratura del «baricentro» mentre annullando il segnale di errore del PDH2 otteniamo $\nu_{off}=0$ (e di conseguenza anche $\nu_{Lrep}=\nu_{Crep}$)

Il segnale di errore del PDH1 sappiamo che va applicato tramite un servo all'attuatore piezo collegato ad uno degli specchi della cavità. Rimane da capire cosa fare con il segnale di errore del PDH2.

Il segnale di errore del PDH2 deve correggere noff e quindi deve essere collegato ad un attuatore capace di cambiare la differenza tra velocità di gruppo e di fase all'interno del laser (non è l'unico modo).

Una possibilità è quella di usare due attuatori, un biprisma e la corrente di pompa del laser (il laser è tipicamente pompato pompato da un laser a diodo):




Il biprisma va a correggere il valore medio di $\nu_{off}$ portandolo a zero. La parte ad alta frequenza del segnale di errore viene applicata sulla pompa del laser per correggere il rumore ad alta frequenza su $\nu_{off}$ (cambiando la potenza di pompa si va a cambiare l'indice di rifrazione del mezzo attivo).

# Laser CW: rumore di fase e di ampiezza

$$E = E_0 \left(1 + a(t)\right) e^{-i\omega_0 t + i\phi(t)} \qquad a, \phi \in \mathbb{R}$$

modulazione di ampiezza

mod. di fase.

freq. istantanea

nota che $\omega(t) = \omega_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$ quindi il rumore su $\phi$ entra nel segnale di errore del PDH

Ma $a, \phi \ll 1$ quindi:

$$E \approx E_0 (1 + a)(1 + i\phi) e^{-i\omega_0 t} \approx \left(1 + a(t) + i\phi(t)\right) e^{-i\omega_0 t}$$

Se rivelo questo campo con un power meter ottengo:

$$P = |E|^2 = |E_0|^2 (1 + a + i\phi)(1 + a - i\phi) \approx |E_0|^2 (1 + 2a)$$

E sull'analizzatore di spettro (FFT) vedo:

$$\tilde{P} = \int P e^{i\Omega t} dt = |E_0|^2 \left( \delta(\Omega) + 2a(\Omega) \right)$$

nota che il contributo della fase è sparito

poichè a(t) è una funzione reale ottengo:

$$a(\Omega) = \int a(t) e^{+i\Omega t} dt$$

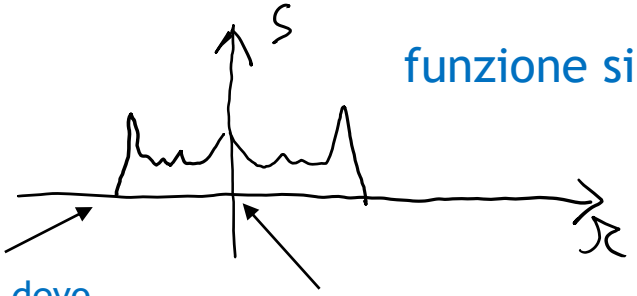
$$a^*(\Omega) = \int a(t) e^{-i\Omega t} dt = a(-\Omega)$$

$$a(\Omega) \stackrel{df}{=} |a(\Omega)| e^{i\phi_a(\Omega)}$$

$$|a(\Omega)| e^{-i\phi_a(\Omega)} = |a(-\Omega)| e^{i\phi_a(-\Omega)} \Longrightarrow \begin{cases} |a(\Omega)| = |a(-\Omega)| \\ \phi_a(\Omega) = -\phi_a(-\Omega) \end{cases}$$

quindi se visualizzo il power spectrum del segnale ottengo:

$$S = |\tilde{P}|^2 = |E_0|^4 \cdot 4\,|a(\Omega)|^2 \quad \text{per } \Omega \neq 0$$




funzione simmetrica

Per le alte frequenze devo assicurarmi che la banda del rivelatore sia maggiore della banda del rumore

In prossimità dello 0 al posto della δ ho una funzione con una larghezza spettrale inversamente proporzionale al tempo di osservazione del segnale

posso considerare solo le Ω positive e normalizzare il power sectrum in modo che:

$$\int_0^{+\infty} S\, d\Omega = \frac{\sigma^2}{\langle P \rangle^2} \qquad \sigma^2 \overset{df}{=} \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$$

media nel dominio temporale

# Laser impulsati: rumore di fase e di ampiezza

vedi pg. 18

$$E(t) = \sum_n A(t-nT)\, e^{-i\omega_0 (t-nT) - i\Delta\phi_{ceo}\, n} \left(1 + a + i\phi\right)$$

$\Downarrow$ osservo la potenza

$\Delta\phi_{ceo}$ non compare

$$P = |E(t)|^2 = \sum_n |A(t-nT)|^2 (1+2a)$$

$A^*(t-nT)A(t-mT) = 0$ per $n \neq m$

$\Downarrow$ Banda del rivelatore

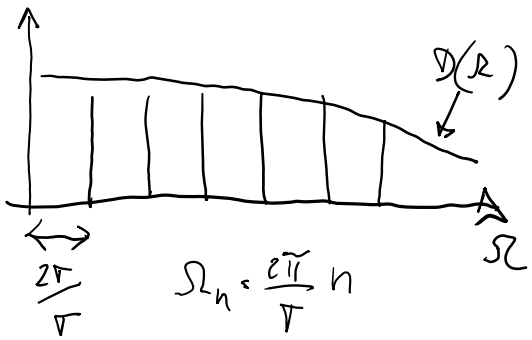
$$P = \sum_n D(t-nT)(1+2a)$$

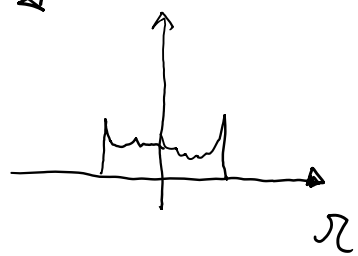
$\Downarrow \tilde{\mathbb{F}}$

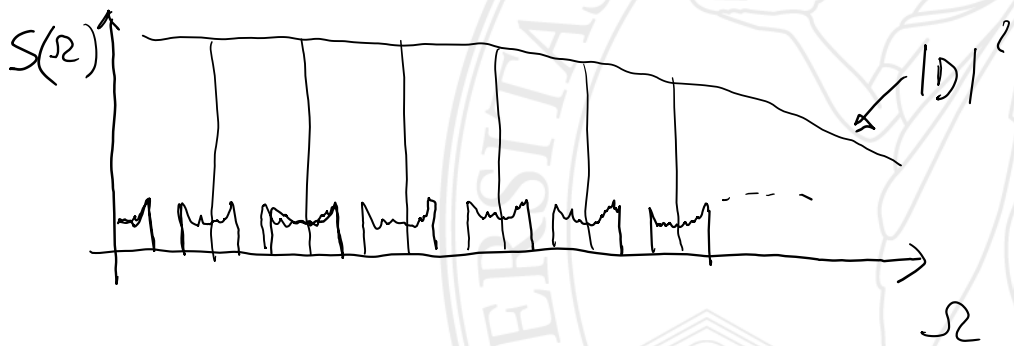
$$P(\Omega) = \left[\sum e^{i\Omega nT}\, D(\Omega)\right] \otimes \left(\delta + 2a(\Omega)\right)$$

convoluzione

$$\left[\sum_n e^{i\Omega n T} D(\Omega)\right] \otimes \left(\delta + 2a(\Omega)\right)$$




$$S(\Omega) = |P(\Omega)|^2 = |D(\Omega)|^2 \left[\sum_n \left(\delta(\Omega-\Omega_n) + 4|a(\Omega-\Omega_n|^2\right)\right]$$