

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Ottica non lineare



Simone Cialdi

Outline

- Delle equazioni di Maxwell all'equazione non lineare
- Non linearità del secondo ordine
 - Phase matching
 - Generazione di seconda armonica
 - Casi CW e impulsato
 - Effetto della GVM
 - Effetto della dispersione
- Non linearità del terzo ordine
 - Self phase modulation (SPM)
 - Allargamento spettrale per SPM

Equazione dell'ottica non lineare

Considerando che trattiamo frequenze ottiche e che il materiale in cui la luce propaga è isolante possiamo scrivere le eq. di Maxwell in questo modo:

$$\nabla B = 0 \quad ; \quad \nabla D = S_c = 0 \quad ; \quad \nabla X E = -\frac{2B}{2t} = -\frac{2}{2t} r_0 H \quad (X_m = 0)$$

$$\nabla X H = S_c + \frac{2D}{2t} = \frac{2D}{2t}$$

per quanto riguarda il vettore D nel dominio spettrale possiamo scrivere:

$$\widetilde{D}(\omega) = \mathcal{E}_{o}\widetilde{E} + \widetilde{P} = \mathcal{E}_{o}\widetilde{E} + \mathcal{E}_{o}\widetilde{X}\widetilde{E} + \mathcal{E}_{o}\widetilde{X}\widetilde{E} + \mathcal{E}_{o}\widetilde{E}(\omega) \cdot \widetilde{F}(\omega) + \widehat{P}_{\omega}(\omega)$$
pol. non lineare

adesso riscrivo D nel dominio temporale:

$$\begin{cases} \forall x \, E = -\mu_0 \, \frac{3H}{3t} \\ \forall x \, H = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1 \otimes E + \mathcal{E}_{\mu L} \right) \end{cases}$$

per disaccoppiare E e H scrivo il rotore del rotore di E:

considereremo fasci laser parassiali con dimensioni trasverse tra qualche mm e 10um o poco meno. Quindi possiamo approssimare:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$
 doe $E = A(t, z) e^{-i\omega_0 t + i\omega_0 t}$

infatti tutte le derivate trasverse vedono una variazione di E entro la dimensione del fascio mentre la derivata lungo z vede la variazione entro la lunghezza d'onda contenuta in k_0

quindi sostituendo nella seconda equazione ottengo:

che riscrivo nel dominio spettrale:

$$\frac{\omega^{2} \tilde{\mathcal{E}}_{c}}{c^{2}} \tilde{\mathcal{E}}_{c} \tilde{\mathcal{E}}_{c} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{c}}{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{c}} = \tilde{\mathcal{E}}_{c} \left[n_{o} \frac{\partial^{2} \tilde{\mathcal{E}}_{c}}{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{c}} \right]$$

adesso dobbiamo analizzare con calma tutti i termini dell'equazione a partire da $\widehat{\mathcal{E}}$

$$\widetilde{E}(\omega) = \int E(t) e^{+i\omega t} dt$$
 doe $E_s A e^{-i\omega_o t + i\omega_o t}$
 $\Rightarrow \widetilde{E}(\omega) = \widetilde{A}(\omega - \omega_o) e^{i\kappa_o t} = \widetilde{A}(\Omega) e^{i\kappa_o t}$ $\Omega = \omega - \omega_o$



nota anche che con la definizione che abbiamo dato di trasformata di Fourier vale la seguente equazione:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \stackrel{\widehat{F}}{\Longrightarrow} -i\omega \, \hat{f}$$

adesso analiziamo il termine in ω^2 :

$$\frac{\omega^{2}}{c^{2}} \tilde{\epsilon}_{r}(\omega) = K^{2}(\omega) = K^{2}(\omega_{o} + \Omega) \approx \left[K(\omega_{r}) + \frac{\partial K}{\partial \omega} \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} K}{\partial \omega^{2}} \Omega^{2} \right]^{2}$$

$$\stackrel{df}{=} \left[K_{o} + \frac{1}{V_{g}} \Omega + \frac{1}{2} D \Omega^{2} \right]^{2} \approx K_{o}^{2} + \frac{2 \kappa_{o}}{V_{g}} \Omega + \kappa_{o} D \Omega^{2}$$

$$veloct_{o} d grupps$$

$$d spread$$

e adesso il termine con la derivata seconda in z:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \widetilde{R} = \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \widetilde{A} e^{i\kappa_{0}t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{A} e^{i\kappa_{0}t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2\widetilde{A}}{2t} e^{i\kappa_{0}t} + i\kappa_{0}\widetilde{A} e^{i\kappa_{0}t} \right)$$

dove ho trascurato il termine senza k_0

adesso riscrivo l'eq. di pg 5 sostituendo:

$$\begin{bmatrix} K_{o}^{2} + \frac{2K_{o}}{V_{g}} S + K_{o} D S ^{2} \end{bmatrix} \tilde{A} e^{iu_{o}^{2}} - k_{o} \tilde{A} e^{iu_{o}^{2}} + 2ik_{o} \frac{2\tilde{A}}{2\tilde{c}} e^{iu_{o}^{2}} = F \left[h_{o} \frac{2\tilde{c}}{2\tilde{c}} h_{u} \right]$$

adesso torno nel dominio temporale applicando le proprietà della trasformata. In particolare devo ricordare che A è funzione di ω - ω_0 , quindi:

2ik,
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2iko}{\sqrt{g}} \frac{\partial A}{\partial t} - k_0 D \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = e \int_{\text{hota}}^{\text{tiant-ikot}} \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{NL}$$

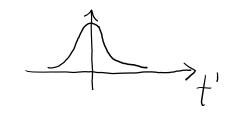
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial A}{\partial t} + i \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{e^{+iw_0 t} - iv_0 t}{2i \kappa_0} m_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} P_{NL}$$

prima di procedere con l'analisi dei processi non lineari è opportuno analizzare la parte lineare dell'equazione:

Per analizzare l'effetto del termine di dispersione conviene fare un cambio di varibili. Mi metto nel riferimento «temporale» dell'impulso:

$$\begin{cases} t' = t - \frac{2}{\sqrt{t}} \\ \frac{2}{t} = \frac{2}{t} \end{cases}$$





$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

quindi sostituendo nell'equazione trovo:

$$\frac{\partial A}{\partial z^{i}} + i \frac{1}{2} D \frac{\partial^{2} A}{\partial z^{i}} = 0 \implies \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial z^{i}} - i \frac{1}{2} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z, \omega) = e^{i \frac{1}{2}} D \omega^{2} \widetilde{A} = 0 \implies \widetilde{A}(z$$

quindi l'impulso acquista un termine di fase quadratico (chirp). Fare il caso gaussiano e vedere cosa succede nel dominio temporale

Processi non lineari al 2° e 3° ordine:

quindi analiziamo il termine:
$$\frac{e^{+i\omega_{o}t - i\kappa_{o}t}}{2i\kappa_{o}} \mu_{o} \frac{2^{2}}{2t^{2}} \rho_{\omega}$$

Nota che ω_0 è la frequenza portante dell'impulso con ampiezza complessa A. Quindi il termine non lineare dovrà fornire la stessa freguenza portante.

quindi i termini non lineari possono cambiare la frequenza portante e far interagire impulsi con frequenze portanti diverse. Ogni campo E lo posso vedere come sovrapposizione di campi con frequenze portanti diverse, 3 nel caso del 2° ordine e 4 nel caso del 3° ordine:

notare che ho aggiunto il c.c. Nel caso dei termini non lineari bisogna prima fare il calcolo con il campo reale e poi si estrae il termine $\rho^{-i}\omega_{m}+$

Analiziamo per primo il termine al secondo ordine:

Per il momento consideriamo uno scalare al posto del tensore e ci disinteressiamo degli indici relativi alla polarizzazione per tornare su questo punto in un secondo momento:

scriviamo esplicitamente P_{NL} considerando tre diverse frequenze tali che: ω_3 = ω_1 + ω_2

devo estrarre il termine oscillante alla frequenza ω_3 ed in particolare (per come sono state scritte le equazioni) il termine con l'esponenziale complesso: $e^{-i\omega_3}$ † quindi il P_{NI} da sostituire nell'equazione è:

notare il 2 e notare in particolare che non ho potuto sostituire a k_1+k_2 il k_3 (questo è un punto molto importante).

quindi riscriviamo il termine non lineare dell'equazione (considerando la portante ω_3):

$$\frac{e^{+i\omega_3t-i\kappa_3t}}{2i\kappa_3}\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varepsilon_0\chi^{(2)}2A_1A_2e^{-i\omega_3t+i(\kappa_1+\kappa_2)t}\right] =$$

trascuro le derivate delle ampiezze complesse e quindi ottengo:

$$= i \frac{\omega_3 \chi^{(i)}}{c \eta_3} A_1 A_2 e^{-i \Delta K^2}$$
 dove $\Delta K = K_3 - K_1 - K_2$

quindi l'equazione è:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{i}{2} D_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_3 = i \chi_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta x t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{i}{2} D_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_3 = i \chi_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta x t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{i}{2} D_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_3 = i \chi_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta x t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_3 + \frac{i}{2} D_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_3 = i \chi_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta x t}$$

dobbiamo adesso scrivere le equazioni anche per A_1 e A_2 (esercizio) e si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_{1} + \frac{i}{2} D_{1} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} A_{1} = i \chi_{1} A_{3} A_{2}^{*} e^{+i\Delta x t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_{2} + \frac{i}{2} D_{2} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} A_{2} = i \chi_{2} A_{3} A_{1}^{*} e^{+i\Delta x t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial t} A_{3} + \frac{i}{2} D_{3} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} A_{3} = i \chi_{3} A_{1} A_{2} e^{-i\Delta x t}$$

prima di vedere alcuni casi, dobbiamo capire meglio cosa è Δk e dobbiamo riconsiderare il fatto che i γ contengono un tensore (dobbiamo far ricomparire gli indici sulle componenti).

phase matching:

Vediamo perchè è importante ottenere: $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$

consideriamo la generazione di secondo armonica nel caso di un fascio continuo e in condizione di non-depletion (l'eff.di conversione inferiore al 10%):

$$\omega_1 = \omega_2$$

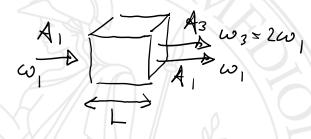
$$\omega_3 = \langle \omega_1 \rangle$$

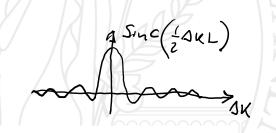
posso trascurare tutte le derivate rispetto al tempo e considero solo l'equazione per A_3 visto che A_1 rimane praticamente invariato per ipotesi:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_3 = i \lambda_3 A_1 e^{-i \Delta k \cdot t}$$

poichè A_1 è costante mettendo l'origine dell'asse z al centro del cristallo ottengo:

$$A_3(L) = i\gamma_3 A_1 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} i\lambda \kappa^2 dz = i\gamma_3 A_1 Sinc(\frac{1}{2}\Delta \kappa \cdot L) \cdot L$$



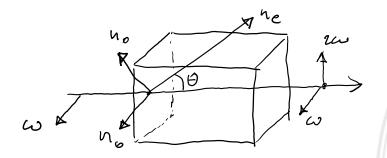


Scriviamo esplicitamente il Δk e vediamo perchè serve un cristallo birinfrangente per ottenere la condizione di phase matching:

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = \frac{\omega_3}{c} n_3 - \frac{\omega_1}{c} n_1 - \frac{\omega_2}{c} n_2 = \frac{\omega_3}{c} n_3 - 2\frac{\omega_1}{c} n_1 = \frac{\omega_3}{c} (n_3 - n_1)$$

In un cristallo isotropo n_3 e n_1 sono diversi, in particolare n cresce al diminuire della lunghezza d'onda. Quindi non posso ottenere la condizione di phase matching (conservazione dell'impulso).

Nel caso di un cristallo birifrangente posso sfruttare la dipendeza dell'indice di rifrazione visto da un'onda straordinaria in funzione dell'orientazione del cristallo. Vediamo il caso della generazione di 400nm a partire da 800nm con un cristallo di BBO:

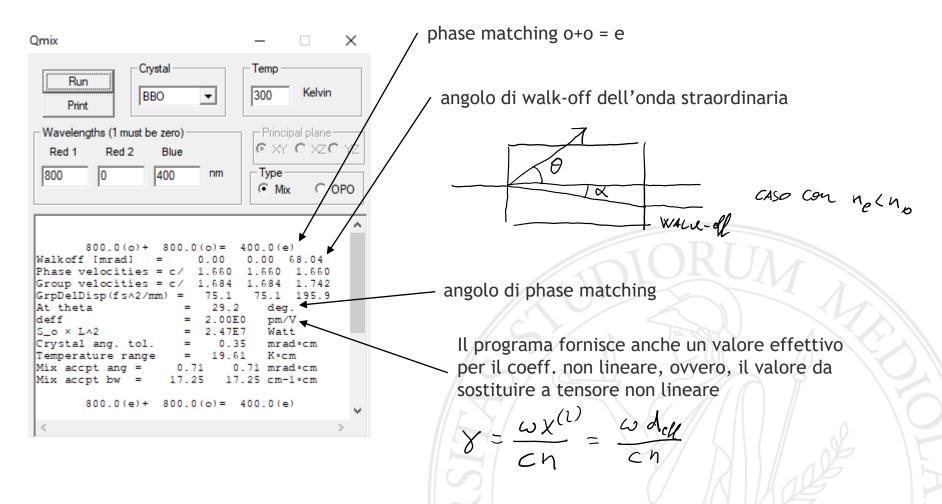


$$\frac{1}{n'(\theta)} = \frac{\sin \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}$$

$$pan + the \theta + the de$$

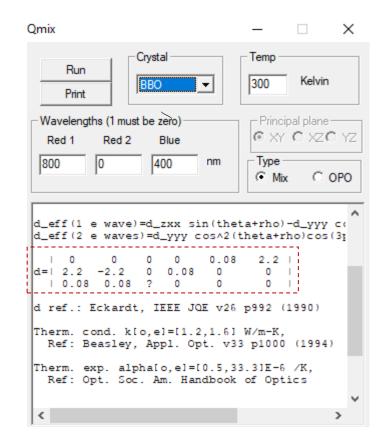
$$h(\theta, 2\omega) = h_o(\omega)$$

Conviene vedere questo caso direttamente con il programma SNLO:



Attenzione: su alcuni libri viene riportato un valore di d uguale a quello di SNLO moltiplicato per ε_0 . Si capisce subito per l'ordine di grandezza è 10^{-21} invece di 10^{-12}

Quindi dalla condizione di phase-matching vediamo anche come devono essere orientati i campi. Per quanto riguarda il tensore non lineare questo viene riportato sempre in forma contratta (grazie alle simmetrie dei cristalli) e ad esempio per il BBO è:



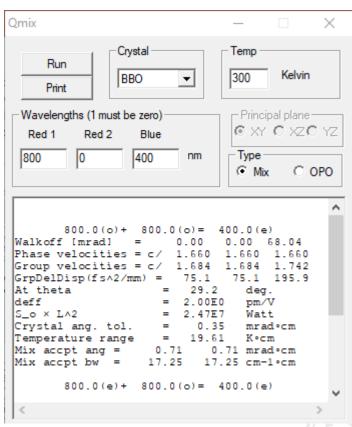
dove dè in pm/V

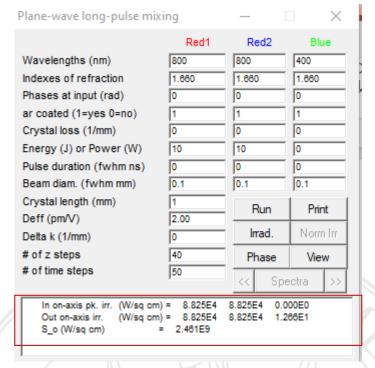
e gli indici sono da intendersi in questo modo:

da notare che qui gli gli assi xyz sono quelli del cristallo mentre nelle equazioni compaiono le coordinate degli assi scelti nel lab. Il programma SNLO automaticamente calcola il deff relativo alla condizione di phase matching trovata

caso CW in condizione di non depletion:







notare che gli indici di rifrazione sono uguali per la prima e la seconda armonica perchè siamo in condizione di phase matching

Esercizio: ritrovare il risultato di SNLO sapendo che

$$I(x) = I_0 e^{-\frac{2x^2}{w^2}}$$

<u>Caso impulsato</u>: nel caso impulsato poichè la prima e la seconda armonica hanno diversa velocità di gruppo devo considerare anche il termine con la derivata prima rispetto al tempo (mi metto nel caso di non depletion in modo da considerare il termine non lineare solo nell'equazione per la seconda armonica):

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g_3}} \frac{\partial A_3}{\partial t} = i \chi_3 A_1^2 \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g_3}} \frac{\partial A_1}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

mi metto nel riferimento temporale della seconda armonica:

$$t' = t - \frac{t}{v_{g_3}}$$

$$z' = t$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial}{v_{g_3}} \frac{\partial}{\partial t}$$

sostituisco e trovo:

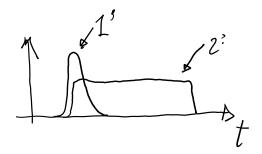
$$\begin{cases} \frac{\partial A_{3}}{\partial t^{1}} = i \chi_{3} A_{1}^{2} \\ \frac{\partial A_{1}}{\partial t^{1}} - \left(\frac{1}{V_{d_{3}}} - \frac{1}{V_{3}}\right) \frac{\partial A_{1}}{\partial t^{1}} = \rho \qquad \Rightarrow A(2^{1}, t^{1}) = A(t^{1} - \left(\frac{1}{V_{d_{1}}} - \frac{1}{V_{d_{3}}}\right) ^{2}) = A(t - g_{2}^{2}) \qquad \Rightarrow 2A_{3}^{2} = i \chi_{3} \left[\widehat{A}_{1} e^{+i \cdot g_{2}^{2} \cdot \widehat{A}_{3}^{2}}\right] = \frac{1}{2} \left[\widehat{A}_{1} e^{+i \cdot g_{2}^{2} \cdot \widehat{$$

=
$$i\chi_3 \int d\Omega' \, \widetilde{A}_1(\Omega - \Omega') \, e^{+i\gamma \tilde{\gamma}^2(\Omega - \Omega')} \, \widetilde{A}_1(\Omega') \, e^{+i\gamma \tilde{\gamma}^2\Omega'} =$$

= $i\chi_3 \int d\Omega' \, \widetilde{A}_1(\Omega - \Omega') \, \widetilde{A}_1(\Omega') \, e^{+i\gamma \tilde{\gamma}^2\Omega} = i\chi_3 \, \widetilde{A}_1 \otimes \widetilde{A}_1 \, e^{-i\gamma \tilde{\gamma}^2\Omega}$

quid Hego: $\widetilde{A}_3(L,\Omega) = i\chi_3 \, \widetilde{A}_1 \otimes \widetilde{A}_1 \, \operatorname{sinc}(\frac{1}{2} \operatorname{gL}\Omega)$

Se la larghezza spettrale della sinc è più piccola di quella del prodotto di convoluzione (ovvero di A_1^2) allora abbiamo un effetto di deformazione dovuto al fatto che la seconda armonica sta rimanendo indietro rispetto alla prima e si forma un impulso di tipo rettangolare (antitrasformata della sinc):



questa sinc definisce l'accettanza di banda del cristallo:

```
800.0(o)+ 800.0(o)= 400.0(e)

Walkoff [mrad] = 0.00 0.00 68.04

Phase velocities = c/ 1.660 1.660 1.660

Group velocities = c/ 1.684 1.684 1.742

GrpDelDisp(fs^2/mm) = 75.1 75.1 195.9

At theta = 29.2 deg.

deff = 2.00E0 pm/V

S_o × L^2 = 2.47E7 Watt

Crystal ang. tol. = 0.35 mrad cm

Temperature range = 19.61 K cm

Mix accpt ang = 0.71 0.71 mrad cm

Mix accpt bw = 17.25 17.25 cm-1 cm
```

dove 1cm⁻¹ sono 30GHz



Esercizio: 2° armonica nel caso CW in condizione di depletion

Effetto della dispersione:

Se l'impulso è molto corto temporalmente la dispersione avrà effetto e tenderà ad allungare (dare un chirp) all'impulso. A pg. 9 abbiamo trovato che la fase spettrale dovuta alla dispersione è:

$$\widetilde{A}(\omega, t) = e^{\frac{i}{2}Dt\omega^2} \widetilde{A}(\omega, 0) \qquad \text{dove} \qquad D = \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2}$$

se consideriamo un caso gaussiano possiamo risolvere analiticamente il problema di fare l'antitrasformata e ottenere l'allungamento temporale:

$$\widetilde{A}(\omega_{1}z) = e^{\frac{i}{2}D_{7}\omega^{2}} e^{-\frac{\omega^{2}}{\Delta^{2}}}$$

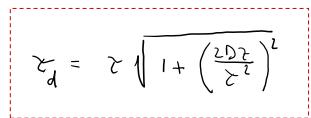
$$\Rightarrow \widetilde{A}(\omega_{1}z) = e^{\frac{i}{2}D_{7}\omega^{2}} e^{-\frac{\omega^{2}}{\Delta^{2}}}$$

$$\Rightarrow \widetilde{A}(t,z) = e^{-\frac{\chi^{2}}{4}t^{2}} = e^{-\frac{\Lambda^{2}}{4}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}D_{7}^{2}\Delta^{4})}t^{2} - \frac{i}{8}\frac{D_{7}\Delta^{4}}{(1+\frac{1}{4}D_{7}^{2}\Delta^{4})}t^{2}$$

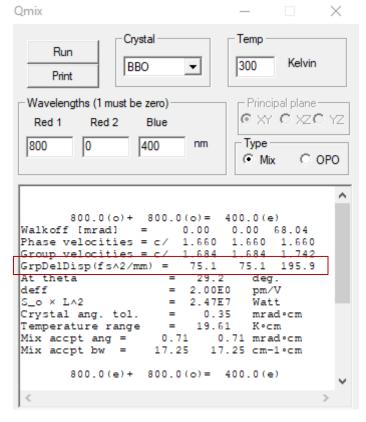
 Δ è chiaramente legato alla lunghezza dell'impulso di ingresso (transform limited):

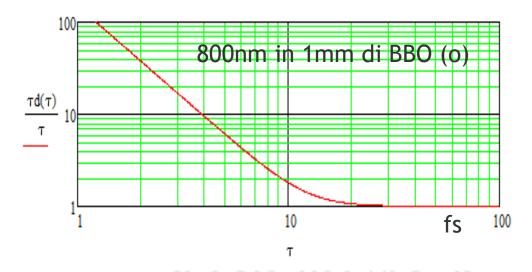
$$\widetilde{A}(\omega,0) = e^{-\frac{\omega^2}{\Delta^2}} \stackrel{\#^{-1}}{\Longrightarrow} \widetilde{A}(t,0) = e^{-\frac{\Delta^2}{4}t^2} = e^{-\frac{\Delta^2}{2^2}} \stackrel{\#}{\Longrightarrow} \mathcal{T} = \frac{2}{\Delta} \qquad \Delta \mathcal{T}_{Four} = \mathcal{T}_{-1,177}$$

Quindi trovo che la lunghezza dell'impulso dopo la dispersione è:



Esempio:





Esercizio: dimostrare che

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{n_F}{c} \qquad \text{doe} \qquad n_F = n - \frac{\partial n}{\partial \lambda} \lambda$$

$$D = \frac{2^2 k}{2\omega^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{2^2 n}{2\lambda^2}$$

Considerazioni generali sull'eff di generazione di seconda armonica:

poicle
$$A_3 \propto A_1^2 \perp e I \propto |A|^2$$
; $P = I \cdot \frac{1}{2} \pi w^2$
 $+ 19 \times 9 : \frac{P_3}{P_1} = e R \propto I_1 \perp^2$ questo almeno finchè GVM e walk-off sono trascurabili

Se non voglio allungare l'impulso a causa della GVM trovo un limite nella lunghezza del cristallo L. Quindi per aumentare l'eff. dovrei aumentare l'intenstà della prima armonica ma in questo modo posso raggiungere la soglia di danneggimento del cristallo.

Ad esempio nel caso del BBO la soglia di danneggiamento è circa 10J/cm2 @ 1064nm, 10ns

Da questo dato devo ricavare la soglia di danneggimaneto per impulsi più brevi, per altre lunghezze d'onda e per treni di impulsi ad alto rep rate

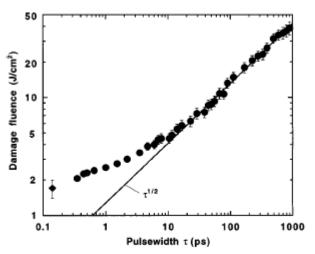


Fig. 5. Pulsewidth dependence of threshold damage fluence for fused silica at 1053 nm (●) and 825 nm (◆).

Come si vede nel caso della fused silica per impulsi fino a 10ps la soglia di danneggimaneto va come la radice della lunghezza. Per lunghezze più brevi satura e si può stimare un fattore 75 sulla soglia di danneggimaneto per impulsi inferiori a 1ps rispetto a 10ns (vedi anche lezione su «elementi ottici»)

Per la lunghezza d'onda tipicamente la soglia di danneggimaneto va come λ

Per i treni ad alto rep rate (>1MHz) si può stimare una soglia di danneggimento in questo modo:

In un cristallo che sta generando seconda armonica la soglia di danneggimaneto va confrontanta con una fluenza effettiva che prende in considerazione il fatto che lo spot della seconda armonica è più piccolo di un fattore radice di 2 e che la soglia di danneggiamento della seconda armonica è più piccola di un fattore 2:

Quindi si ricava per la soglia relativa all'impulso:

$$Fluence_{eff} = \frac{(E1 - E2) + 4E2}{\frac{1}{2}\pi w_1^2}$$
 de sor for the can be soglist impoler (5/an2)

E per il treno di impulsi ad alto rep rate:

$$Intensity_{eff} = \frac{(P1 - P2) + 4P2}{\frac{1}{2}\pi w_1^2}$$
 do called confidence on Qe

Dove E e P sono rispettivamente l'energia dell'impulso e la potenza media del treno all'uscita del cristallo

Non linearità del terzo ordine:

Tra gli effetti che possono essere generati da questo termine selezioniamo quello che produce una portante uguale a quella dell'onda entrante, ovvero, analiziamo la Self Phase Modulation (SPM).

dobbiamo sostituire nel termine non lineare la polarizzazione non lineare al terzo ordine:

considero il caso con una sola frequenza portante, elimino gli indici dal tensore e scrivo:

sono interessato al termine : e

Quindo posso riscrivere la polarizzazione non lineare con un d effettivo tale che:

Prima di sostituire questa P_{NL} nell'equazione non lineare conviene capirne meglio il significato fisico:

$$D = \mathcal{E}_{o}\mathcal{E}_{r}E + P_{nc} = \mathcal{E}_{o}\mathcal{E}_{r}E + 2\mathcal{E}_{o}d|A|E = \mathcal{E}_{o}\mathcal{E}_{rnc}E \qquad dee$$

$$\mathcal{E}_{r_{nc}} = \mathcal{E}_{r}\left(1 + 2d|A|^{2}\right) \implies n_{nc} = \sqrt{\mathcal{E}_{rnc}} = n\sqrt{1 + \frac{2d|A|^{2}}{\mathcal{E}_{r}}} \approx n + \frac{d}{n}|A|^{2}$$

$$ma \qquad I = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{o}cn|A|^{2} \implies n_{nc} = n + n_{2}I \qquad dec \qquad n_{2} = \frac{2d}{\mathcal{E}_{o}cn^{2}}$$

Come si vede l'effetto è quello di modificare l'indice di rifrazione del materiale attraversato dall'impulso. Abbiamo già visto questo fenomeno quando abbiamo trattato il mode-locking via effetto Kerr

Poichè è un effetto del terzo odine è originato da un'Hamiltoniana di interazione simmetrica (4° ordine) e quindi è tipico di tutti i materiali. Un esempio è quello relativo alla SPM nelle fibre ottiche di ossido di silicio.



Sotituendo nell'equazione non lineare e trascurando le derivate temporali di A si ottiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} D \frac{\partial^{2} A}{\partial t^{2}} = \frac{e^{+i\omega_{0}t - i\omega_{0}t}}{2i\omega_{0}} \mu_{0} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left[2\xi_{0} d |A|^{2} A e^{-i\omega_{0}t + i\omega_{0}t} \right] =$$

$$= \frac{i}{2} n_{2} \xi_{0} n_{0} \omega_{0} |A|^{2} A$$

$$doze \qquad n_{2} \cdot 2.6. io^{-20} m_{\chi}^{2} \quad \text{rel ono delle fibre}$$

$$\delta e \quad \text{mineto} \quad \text{nel} \quad \text{Nerimeto} \quad \text{temporole dell'implie};$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} D \frac{\partial^{2} A}{\partial t^{2}} = \frac{i}{2} n_{2} \xi_{0} n_{0} \omega_{0} |A|^{2} A$$

Nel caso generale devo risolvere numericamente, ma se la dispersione è trascurabile (ad esempio perchè l'impulso entra già chirpato in fibra (circa 100ps) allora posso scrivere:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} n_2 \epsilon_n \omega_o |A|^2 A - \frac{\times}{2} A$$

dove per completezza ho aggiunto anche un termine di perdita (α >0) o di guadagno (α <0)

adesso sostituisco: $A(t, z) = A_0 \mu(t, z)$ de e μ μ e μ e

$$\mu(t,o)$$
 s

der quiel l's è le poterno dell'impelie ell'impelie ell'impelie ell'impelie dell'impelie ell'impelie dell'impelie ell'impelie ell'impelie ell'impelie ell'impelie.

$$\Rightarrow \frac{2\mu}{2t} = i \frac{1}{L_{NL}} |\mu|^2 \mu - \frac{\alpha}{2} \mu$$

Luc = luphora non lineare

$$L_{NL} = \frac{1}{8P_0}$$

$$8 = \frac{4n_2}{\sqrt{w^2}}$$

l'equazione si può risolvere nel seguente modo:

$$\mu(t,t)$$
 = $r(t,t)$ e $i\phi(t,t)$ Sostite. Le trans :

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2}r \\ \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2}r \end{cases} \Rightarrow r(t, t) = \frac{-\frac{\alpha}{2}t}{r(t, t)} de \qquad left = \frac{1-c}{\alpha}$$

quindi l'impulso acquista un termine di fase che fa cambiare la larghezza spettrale:

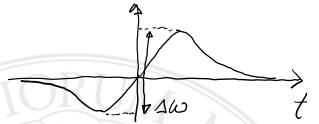
la funzione r è normalizzata a 1 all'ingresso della fibra quindi, supponendo un impulso gaussiano

$$r(t,0) = e^{-\frac{t^2}{2t^2}}$$

$$\Rightarrow \phi(t,L) \cdot \frac{Lell}{L_{NL}} e^{-\frac{2t^2}{2t^2}}$$

questo termine di fase va a cambiare la frequenza istantanea dell'impulso:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\phi}{2t} = \omega_0 + \frac{Lell}{Lu} + \frac{4t}{z^2} e^{-\frac{2t^2}{\zeta^2}}$$



trovando il massimo e il minimo della funzione di trova un allargamento spettrale:

Considerazioni sull SPM:

- 1) La SPM tende ad allargare lo spettro dell'impulso. Nel dominio temporale il profilo non cambia quindi vuol dire che viene aggiunto un chirp che può essere rimosso con un compressor. Quindi la SPM può essere un modo per generare impulsi di breve durata.
- 2) La SPM trasferisce il rumore di ampiezza nel rumore di fase, quindi tende a far fluttuare la frequenza centrale del laser.
- 3) La SPM è alla base della generazione del supercontinuum. Per fare in modo che l'effetto di allargamento spettrale sia molto efficiente la dispersione deve essere nulla in modo da minimizzare la lunghezza non lineare