

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

Fotoconteggio e funzione di correlazione dell'intensità (caso classico)



Simone Cialdi

<u>Outline</u>

Analisi delle prime misure Fotoconteggio classico Teoria di Mandel Generazione di radiazione "pseudo-termica" Corpo nero Metodo del disco di Arecchi Funzione di correlazione dell'intensità classica Disuguaglianze valide nel caso classico Esperimenti storici Hanbury & Twiss, Morgan & Mandel, Kimble



<u>Analisi delle prime misure</u>

<u>Il Power Meter</u>



Posso considerare il fotodiodo come un generatore di corrente.

La corrente (elettroni che attraversano il conduttore nell'unità di tempo) è proporzionale alla potenza (numero di fotoni che arriva nell'unità di tempo)

 $I = \Re P$

Dunque per la legge di Ohm:





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

Schema del rivelatore di singoli fotoni

<u>Abbiamo usato un rivelatore basato su APD in configurazione</u> <u>Geiger.</u>



Previsione sul numero dei conteggi

Numero di fotoni nell'unità Laser a gas $P = h v N_f$ di tempo He:Ne Quantum-Efficiency del $v = \frac{c}{2}$ $\lambda = 633 nm$ rivelatore $N_c = QEN_f = QE\frac{P}{hv}$ $N_c >> N_{dark-counts} \approx 100 - 300 s^{-1}$ $N_c << N_{death-time} = \frac{1}{T_{death-time \approx 1 \mu s}}$ Numero di conteggi nell'unità di tempo $P = F P_{Leser}$ Abbiamo ricavato una QEtot del 15% @ 633nm per il rivelatore basato su APD C30921S Trasmittività filtri



Effetto del tempo morto del rivelatore

 τ =1.4 μ S tempo morto del rivelatore N conteggi che avrei rivelato sulla finestra Δ T con τ =0 Nr conteggi effettivamente rivelati sulla finestra Δ T

$$\Delta T_{eff} = \Delta T - \tau N_r \qquad \Longrightarrow \qquad N_r = N \frac{\Delta T - \tau N_r}{\Delta T}$$



∆T_{eff} è la lunghezza temporale effettiva della finestra di acquisizione





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

Rumore classico e rumore «quantistico» della sorgente

I due rumori sono scorrelati e quindi si sommano in quadratura. Dalla misura fatta con il power meter abbiamo ricavato che il rumore classico (dovuto al laser e all'accoppiamento in fibra) è circa il 3 per mille.





J**NIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO** Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

<u>Ricostruzione della funzione di distribuzione dei</u> <u>conteggi nel caso del laser attenuato</u>





Caso di due radiazioni che arrivano contemporaneamente sul rivelatore



Si ottiene facilmente:

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} P_1(i) P_2(n-i)$$

Ovvero, la funzione di distribuzione risultante è la convoluzione delle due



<u>Caso di una sorgente con potenza non costante nel</u> <u>tempo</u>

Lampada al «Neon» vista dal fotodiodo

In questo caso è evidente che la distribuzione non è Poissoniana





Fotoconteggio classico

Fluctuations of Photon Beams and their Correlations

By L. MANDEL

Department of Physics, Instrument Technology, Imperial College, London

MS. received 3rd March 1958, and in revised form 28th April (1958)

I(t) Radiazione con un tempo caratteristico di variazione di intensità au



Voglio ottenere la funzione di distribuzione dei conteggi presi su intervalli temporali ΔT molto più piccoli di τ . (ovvero, il rivelatore deve essere più veloce del segnale)

Dunque per ogni acquisizione la I(t) è costante durante l'intervallo di tempo ΔT



La sorgente luminosa è statisticamente all'equilibrio e attraversa tutti gli stati accessibili (sistema ergodico), dunque è possibile definire una funzione di distribuzione dei valori dell'intensità:

Rispetto ad un dato valore dell'intensità la distribuzione dei conteggi è una Poissoniana:

$$P(n,I) = e^{-\alpha I \Delta T} \frac{(\alpha I \Delta T)^n}{n!}$$

Per ottenere la distribuzione dei conteggi nel caso generale dobbiamo mediare su tutti i valori dell'intensità per mezzo della distribuzione D(I):

$$P(n) = \int dI D(I) P(n, I) = \int dI D(I) e^{-\alpha I \Delta T} \frac{(\alpha I \Delta T)^n}{n!}$$



U**niversità degli studi di milano** Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali Vedi "Quantum Optics", D. F. Walls, G. J. Milburn cap. 3 pag. 48-52

<u>Calcolo di n_{medio} e della varianza sui conteggi</u>

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \int dI D(I) e^{-\alpha I \Delta T} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\alpha I \Delta T)^n}{n!} = \alpha \langle I \rangle \Delta T$$

$$Per \ la \ dimostrazione \ ricordare \ che:$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\langle I \rangle = \int dI \ I \ D(I)$$

$$A = \int dI \ I \ D(I)$$

$$A = \int dI \ I \ D(I)$$
Notare \ che \ il \ contributo \ classico \ dovuto \ alla \ fluttuazione \ dell'intensità \ e \ tanto \ più \ visibile \ quanto \ più \ visibile \ quanto \ più \ e \ alta \ l'intensità \ e \ dta \ l'intensità \ e \ alta \ l'intensità \ e \ dta \ dta \ l'intensità \ e \ dta \ l'intensità \ e \ dta \ l'intensità \ e \ dta \



UNIVERSITÀ DEGI Facoltà di scienz

FISICHE E NATURA

Contributo "particellare"

Contributo legato alla fluttuazione dell'intensità

Radiazione termica

Consideriamo una radiazione con la seguente distribuzione dell'intensità:

$$D(I) = \frac{1}{\bar{I}} e^{-\frac{I}{\bar{I}}}$$

Dalle precedenti otteniamo:

$$P(n) = \frac{\overline{n}^{n}}{(1+\overline{n})^{1+n}} \quad \text{Distributione termica}$$

$$\overline{n} = \alpha \langle I \rangle \Delta T = \alpha \overline{I} \Delta T \qquad \left\langle \Delta n^{2} \right\rangle = \overline{n} (1+\overline{n})$$
Rumore più grande rispetto
al caso Poissoniano
Fattore di Fano:
$$f = \frac{\langle \Delta n^{2} \rangle}{\overline{n}} = (1+\overline{n}) > 1 \quad \text{caso Super-Poissoniano}$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

<u>Corpo nero</u>

La distribuzione termica è quella che si ottiene nel caso di un corpo nero quando osserviamo il singolo modo della radiazione:



Radiazione e materia si trovano all'equilibrio termico (quindi il numero medio per modo è dato dalla distribuzione di Bose-Einstein).



Vogliamo trovare la distribuzione dei conteggi relativi ad un intervallo temporale ∆T per un modo della radiazione.



U**NIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO** Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali Nota che il potenziale chimico è posto a 0 nella distribuzione di Bose-Einstein

Corpo nero (2)

Adesso scrivo la funzione di distribuzione del numero per modo della radiazione:





<u>Disco di Arecchi</u>

Generazione di radiazione pseudo-termica con grande tempo di coerenza



Nel caso di una normale lampadina il tempo di coerenza è piccolissimo perché la radiazione viene emessa su uno spettro molto ampio:

$$\tau = \frac{1}{\Delta \omega} \approx 10^{-15} s$$

Quindi agli occhi di un rivelatore la lampadina emette radiazione costante con una distribuzione che risulta Poissoniana

Allora ho bisogno di una sorgente con distribuzione di intensità:

$$D(I) = \frac{1}{\bar{I}} e^{-\frac{I}{\bar{I}}}$$

Con tempi di coerenza molto più lunghi rispetto a quelli di risposta del rivelatore



MEASUREMENT OF THE STATISTICAL DISTRIBUTION OF GAUSSIAN AND LASER SOURCES*

F. T. Arecchi

Laboratori Centro Informazioni Studi Esperienze, Milano, Italy, and Istituto di Fisica dell'Università, Milano, Italy (Received 18 November 1965)



<u>Teorema del limite centrale</u>

(ci sarà utile per ricavare la funzione di distribuzione dell'intensità generata dal disco in un punto)

Considero n variabili x_i scorrelate con medie m_i e varianze σ_i

La variabile somma x ha distribuzione gaussiana tale che:





J**NIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO** Acoltà di scienze matematiche, Isiche e naturali Il disco presenta in superficie delle irregolarità molto più piccole rispetto alla dimensione del fascio laser incidente. Ogni irregolarità è la sorgente di un'onda sferica con una fase <u>casuale e scorrelata</u> rispetto a quella delle altre sorgenti.

In un certo punto del piano su cui vediamo le speckles abbiamo un campo elettrico dato dal contributo di tutte le "zone" del disco colpite dal laser (ogni "zona" ha una dimensione confrontabile con quella delle irregolarità):

$$a(t) = \sum \alpha \cos(\phi_i(t))$$

La fase emessa dalla zona i-esima varia nel tempo perché il disco ruota. Il tempo di variazione caratteristico è il tempo di coerenza scritto nella pg. 16



Per ogni sorgente si ottiene:

$$m_i = 0 \qquad \sigma_i^2 = \frac{1}{2}\alpha^2$$

Per il teorema del limite contrale si ottiene subito:

$$m = 0 \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 N \qquad P(a) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{a}{2\sigma^2}}$$

2

Poiché l'intensità è proporzionale al quadrato del campo dalla P(a) ricavo subito la D(I):

$$D(I) = \frac{1}{\bar{I}} e^{-\frac{I}{\bar{I}}}$$

Ovvero la distribuzione di intensità che ci fornisce la distribuzione termica dei conteggi



Funzione di correlazione dell'intensità

Caso classico

La funzione di correlazione dell'intensità ci permetterà di distinguere tra radiazione classica e radiazione quantistica.





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

$\underbrace{I \longrightarrow I_{1}}_{I_{2}} \xrightarrow{BS} I_{1}}_{I_{2}} \begin{cases} I_{1}(t) = T I(t) \\ I_{2}(t) = R I(t) \end{cases} \longrightarrow g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t) I(t+\tau) \rangle_{t}}{\langle I(t) \rangle_{t} \langle I(t+\tau) \rangle_{t}}$





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali <u>Nel caso classico queste disuguaglianze vengono</u> <u>sempre verificate</u>

<u>Confronto tra sorgente laser e sorgente termica</u>





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

$$g_{termica}^{(2)}(0) = \frac{\left\langle I^{2} \right\rangle}{\left\langle I \right\rangle^{2}} = \frac{\int_{0}^{\infty} D(I)I^{2} dI}{\left(\int_{0}^{\infty} D(I)I dI\right)^{2}} = \frac{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{I_{o}} e^{-\frac{I}{I_{o}}}I^{2} dI}{I_{o}^{2}} = 2$$

$$g_{termica}^{(2)}(\tau \gg \tau_{c}) = \frac{\left\langle I(t)I(t+\tau) \right\rangle}{\left\langle I(t) \right\rangle^{2}} = \frac{\left\langle I(t) \right\rangle \left\langle I(t+\tau) \right\rangle}{\left\langle I(t) \right\rangle^{2}} = 1$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

<u>Coerenza spaziale</u>



Si dimostra subito che :

In generale l'intensità I è anche una funzione della coordinata trasversa x. Quindi posso anche scrivere la funzione di correlazione dell'intensità in funzione dello shift spaziale Δx

$$g^{(2)}(\Delta x) = \frac{\langle I(t,0)I(t,\Delta x)\rangle_t}{\langle I(t,0)\rangle_t \langle I(t,\Delta x)\rangle_t}$$

(0)

 $g^{(2)}(0) \ge 0$

 $(\Delta x) \le g^{(2)}$

 $g^{(2)}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI In regime di fotoconteggio dobbiamo riscrivere g⁽²⁾ in funzione dei conteggi

Conteggi diretti sui due rivelatori





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANC Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

<u>Conteggi in contemporanea</u>

 $dp_{1} = \eta_{1}I_{1}(t)dt \implies dp_{c} = dp_{1}dp_{2} = \eta_{1}\eta_{2}I_{1}(t)I_{2}(t)dtdt$ $dp_{2} = \eta_{2}I_{2}(t)dt \implies dp_{c} = \eta_{1}\eta_{2}\int_{0}^{\Delta t}dt\int_{0}^{\Delta t}dtI_{1}(t)I_{2}(t)$ $\Delta p_{c} = \eta_{1}\eta_{2}\langle I_{1}(t)I_{2}(t)\rangle\Delta t\Delta t$

E' la probabilità congiunta di avere un conteggio sul rivelatore 1 entro la finestra Δt e un conteggio sul rivelatore 2 entro la finestra temporale Δt

$$\Delta p_c(\tau) = \eta_1 \eta_2 \langle I_1(t) I_2(t+\tau) \rangle \Delta t \Delta t$$

E' la probabilità congiunta di avere un conteggio sul rivelatore 1 entro la finestra Δt e dopo un tempo τ un conteggio sul rivelatore 2 entro la finestra temporale Δt

<u>Ridefinizione di g(2) con le probabilità di</u> <u>conteggio:</u>

 $\frac{\Delta p_c(\tau)}{\Delta p_1 \Delta p_2}$

 $\Delta t N_1 N_2$

$$\begin{cases} \Delta p_1 = \eta_1 \langle I_1(t) \rangle \Delta t \\ \Delta p_2 = \eta_2 \langle I_2(t) \rangle \Delta t \end{cases} \implies g^{(2)}(\tau) = \\ \Delta p_c(\tau) = \eta_1 \eta_2 \langle I_1(t) I_2(t+\tau) \rangle \Delta t \Delta t \end{cases}$$

Adesso riscrivo la $g^{(2)}$ in funzione dei conteggi misurati nella finestra temporale Δt

$$\begin{cases} N_{i} = \frac{\Delta p_{i}}{\Delta t} \\ N_{12} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Delta p_{c}(\tau)}{\Delta t} \end{cases}$$

Il problema è collegare i conteggi N_{12} a qualcosa di misurabile (dal momento che si tratta di una probabilità congiunta sospettiamo che N_{12} dipenda dai conteggi in contemporanea)

FISICHE E NATURALI

<u>Tecnica usata per la rivelazione dei conteggi in contemporanea</u> <u>(porta AND)</u>





Da notare che i conteggi in contemporanea misurati con la tecnica della porta AND dipendono dalla lunghezza della finestra di contemporaneaità Δt_c mentre N12 chiaramente non ha alcuna dipendenza da questa finestra. Quindi N12 è proporzionale ai conteggi in contemporanea ma dobbiamo ancora travare la costante (α) che li lega. Possiamo considerare il caso del laser attenuato inviato al BS. I conteggi sono scorrealti e quindi i conteggi in contemporanea sono:

$$\widetilde{N}_{12} = \Delta \tau_c N_1 N_2$$

Ovvero, per ogni conteggio che abbiamo sul rivelatore 1 la probabilità di averne uno sul 2 entro la finestra di contemporaneatà è $\Delta t_c N_2$

Inoltre sapiamo che nel caso del laser attenuato la $g^{(2)}$ è 1 e quindi:

$$g^{(2)} = \frac{N_{12}}{\Delta t N_1 N_2} = \frac{\alpha \widetilde{N}_{12}}{\Delta t N_1 N_2} = \frac{\alpha \Delta \tau_c N_1 N_2}{\Delta t N_1 N_2} = 1$$

$$\implies \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta \tau_c} \qquad \Longrightarrow \qquad g^{(2)} = \frac{\widetilde{N}_{12}}{\Delta \tau_c N_1 N_2}$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

Esperimento di Hanbury & Twiss





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Proc. Royal Society of London, vol. 243, n. 1234 (1958) 291-319 Il fine di Hanbury e Twiss era quello di dimostrare che è possibile usare le correlazioni dell'intensità per misurare i diametri delle stelle.

Ovvero, una sorgente spazialmente incoerente (stella, lampadina, disco di Arecchi...) produce a grande distanza delle aree di coerenza (speckles) la cui dimensione risulta direttamente proporzionale alla distanza della sorgente e inversamente proporzionale alla dimensione della sorgente.

Formalmente questa relazione deriva dal teorema di Cittern-Zernike (vedi Introduction to the Theory od Coherence and Polarization of Light, E. Wolf, par. 3.2)





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali

teorema di Cittern-Zernike

Nel caso di radiazione termica si può scrivere:

$$g^{(2)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} = 1 + \left| g^{(1)} \right|^2 = 1 + \left| \frac{\langle A_1^* A_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}} \right|^2$$

funzione di correlazione dei campi (A è l'ampiezza complessa del campo)

Nel caso di una sorgente fatta da punti scorrelati e posta a distanza molto più grande della sua dimensione abbiamo (teorema di Cittern-Zernike http://en.wikipedia.org/wiki/Van_Cittert-Zernike_theorem):

$$g^{(1)} = \frac{\int d\zeta d\eta \bar{I}(\zeta,\eta) e^{-ik(p\zeta+q\eta)}}{\int d\zeta d\eta \bar{I}(\zeta,\eta)} \begin{cases} p = \frac{x_2 - x_1}{R} & \text{dove } R \neq la \\ \text{distanza della sorgente} \\ q = \frac{y_2 - y_1}{R} \end{cases}$$

Dove ξ , η sono le coordinate sul piano della sorgente e x, y quelle sul piano di rivelazione.Quindi una sorgente spazialmente incoerente produce a grande distanza una radiazione spazialmente coerente...



Nel nostro caso poniamo x1=0, x2=x, y1=0, y2=0 e consideriamo gaussiano il profilo di intensità della sorgente:

$$\bar{I}(\zeta,\eta) = e^{-\frac{2(\zeta^2+\eta^2)}{w^2}}$$

dove:

 $\sqrt{2} \lambda R$

 π

W

$$g^{(2)} = 1 + |g^{(1)}|^2 = 1 + e^{-\frac{2x^2}{\Delta^2}}$$

Per fare il conto è utile ricordare che:

$$\widetilde{F}_k\left(e^{-\frac{x^2}{w^2}}\right) \propto e^{-\frac{w^2}{4}k^2}$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI



Correlazioni temporali





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

B. L. Morgan and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. vol. 16, n. 32 (1966) 1012

<u>Esperimento di Kimble</u>

Il primo esperimento di ottica quantistica



FIG. 1. Outline of the principal elements of the experiment.

Sorgente a singolo atomo

Correlazioni temporali



FIG. 3. Values of $1 + \lambda(\tau)$ derived from the data. The broken curve shows the theoretically expected form of $\langle \hat{I}_G(\tau) \rangle$ (with $\Omega/\beta = 4$) for a single atom, arbitrarily normalized to the same peak.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO Facoltà di scienze matematiche, Fisiche e naturali <u>H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, Phys. Rev.</u> <u>Lett. vol. 39, n. 11 (1977) 691</u>