UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Quantizzazione del campo EM, $g^{(2)}$ quantistica e introduzione alla PDC

Seconda quantizzazione

Simone Cialdi

Outline

Analisi delle misure sullo stato termico

Quantizzazione del campo elettromagnetico

- Stato coerente, stato termico e stato di Fock
- Fotoconteggio quantistico
- BS quantistico

g(2) quantistica

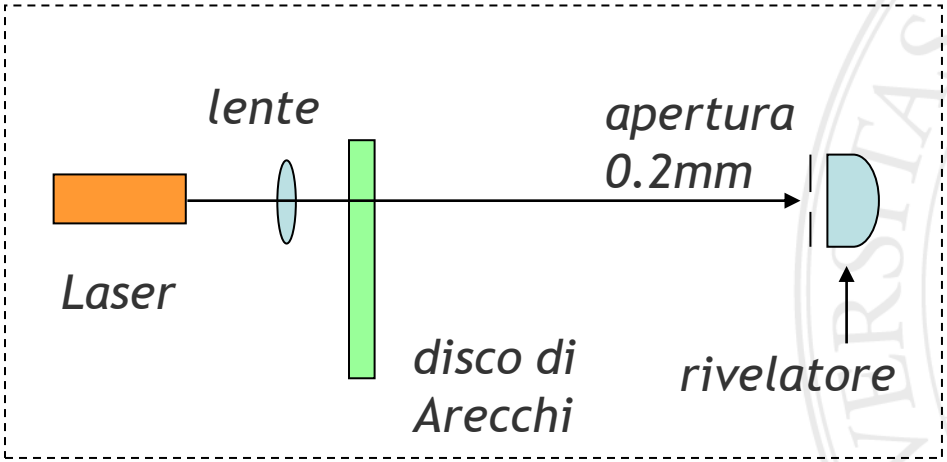
Introduzione alla PDC (parametric down-conversion)

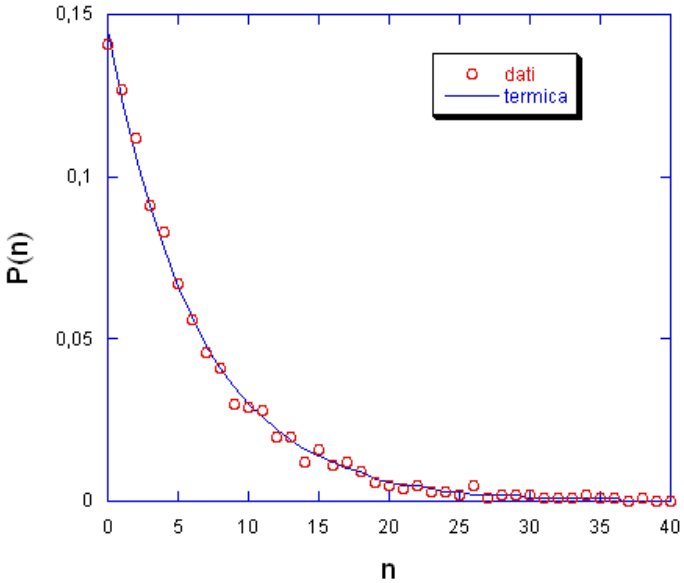
- Violazione della disuguaglianza sulla g(2) con la PDC

Analisi delle misure sulla radiazione pseudo-termica

Per ottenere una funzione di distribuzione termica con il metodo del disco di Arecchi devono essere soddisfatte 4 condizioni:

1. *La finestra temporale ΔT dell'oscilloscopio deve essere molto più piccola del tempo di coerenza τ_c della radiazione prodotta con il disco*
2. *L'area di raccolta deve essere molto più piccola rispetto alla dimensione delle Speckles*
3. *Il fondo deve essere molto più piccolo del segnale*
4. *La trasmittività del disco deve essere uniforme*



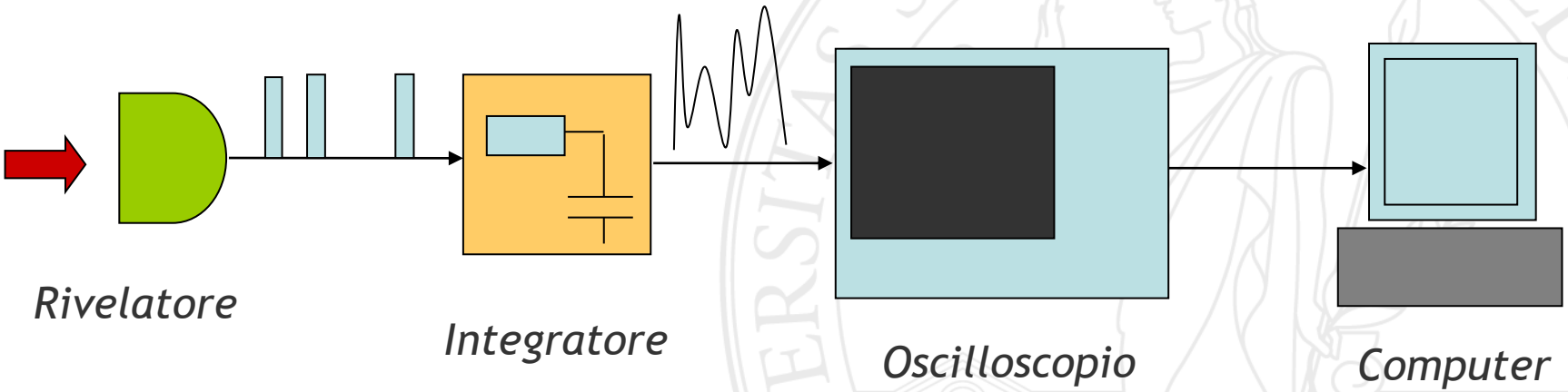


Misura del tempo di coerenza

Per ottenere il tempo di coerenza abbiamo determinato la funzione di autocorrelazione dell'intensità relativa all'area accoppiata (l'apertura usata ha un diametro di 0.2mm).

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t) I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

Per ottenere la I(t) abbiamo integrato i conteggi provenienti dal rivelatore di singoli fotoni:

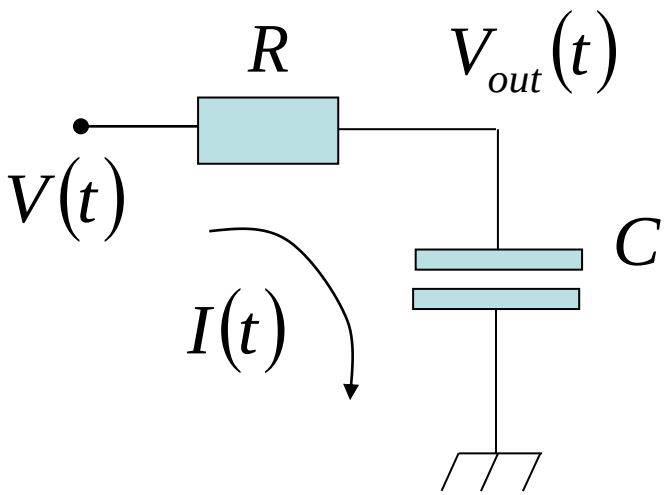


Integratore

Rispetto al power meter basato su fotodiodo il sistema rivelatore di singoli fotoni + integratore fornisce un migliore rapporto segnale rumore e un tempo di risposta più veloce.

Funzionamento dell'integratore:

$$\begin{cases} V_{out}(t) = \dfrac{Q(t)}{C} = \dfrac{1}{C}\int I(t)dt \\ V(t) = R\,I(t) + \dfrac{1}{C}\int I(t)dt \end{cases}$$



*Trasformata di Fourier **

$$\begin{cases} \tilde{V}_{out}(\omega) = \dfrac{1}{i\omega C}\tilde{I}(\omega) \\ \tilde{V}(\omega) = R\,\tilde{I}(\omega) + \dfrac{1}{i\omega C}\tilde{I}(\omega) \end{cases}$$

$$* \quad \tilde{f}(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t}dt$$

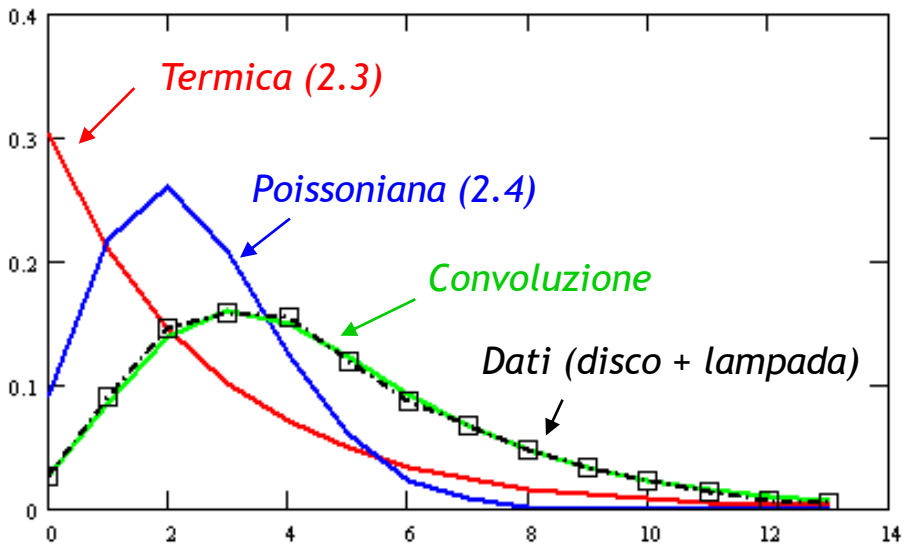
$$\tilde{V}_{out}(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{1 + i\omega RC}$$

$\omega RC >> 1$ *Integra*

$\omega RC << 1$ *Identità*

Misura con fondo Poissoniano alto

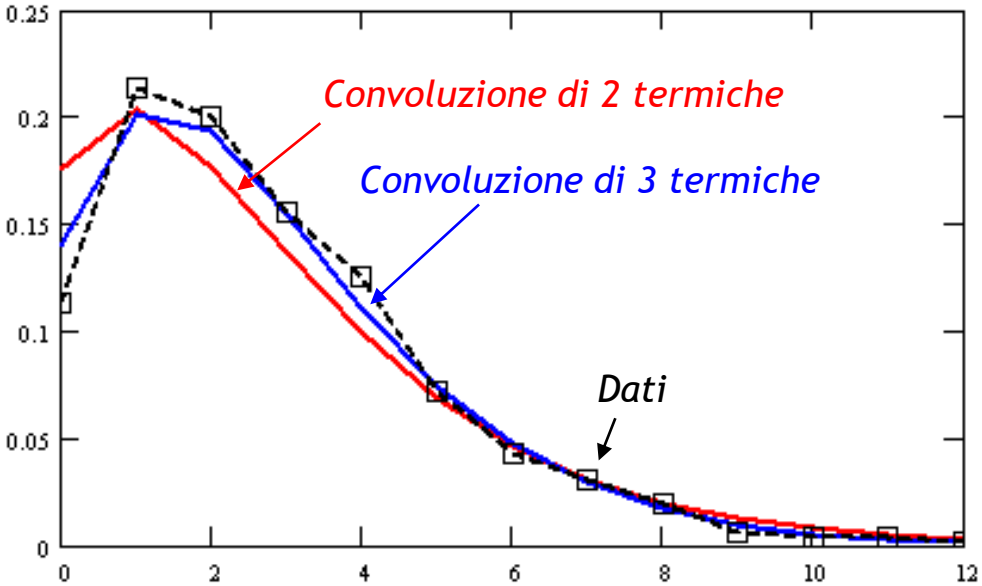
In questa misura abbiamo aggiunto alla termica (ΔT=100μs, τ_c=5ms) un fondo Poissoniano ottenuto con una lampadina accesa in laboratorio. Si ottiene che la funzione di distribuzione risultante è la convoluzione delle due come precedentemente dimostrato:



$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} P_T(i) P_P(n-i)$$

Misura con tempi di coerenza piccoli

In questa misura abbiamo diminuito il tempo di coerenza (τ_c=0.3ms) aumentando la velocità del disco e abbiamo aumentato il tempo di acquisizione (Δt=1ms). Il risultato è fittabile con la convouzione di 3 termiche ognuna con un numero medio pari alla media totale /3.



$\Delta t = 1$ ms

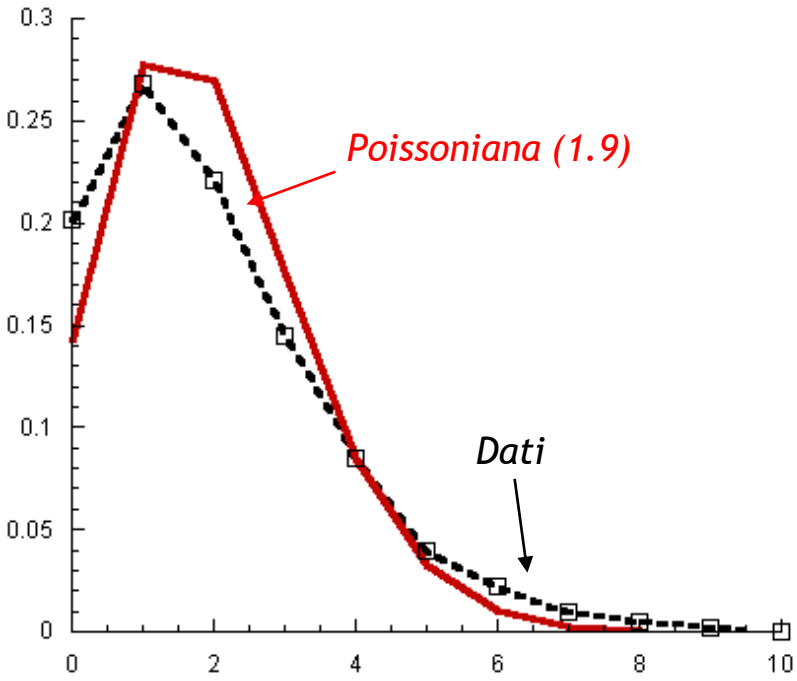
$\tau_c = 0.3$ms

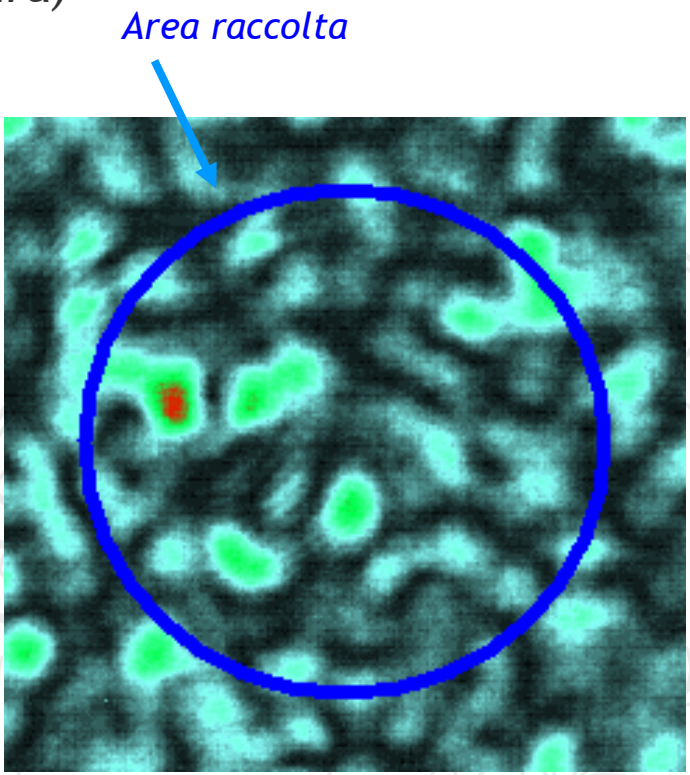
$$P_3(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} P_T(n-i-j) P_T(i) P_T(j)$$

In questo caso la potenza non è costante entro lunghezza della finestra temporale di acquisizione

Misura con Speckles molto piccole (area di coerenza piccola)

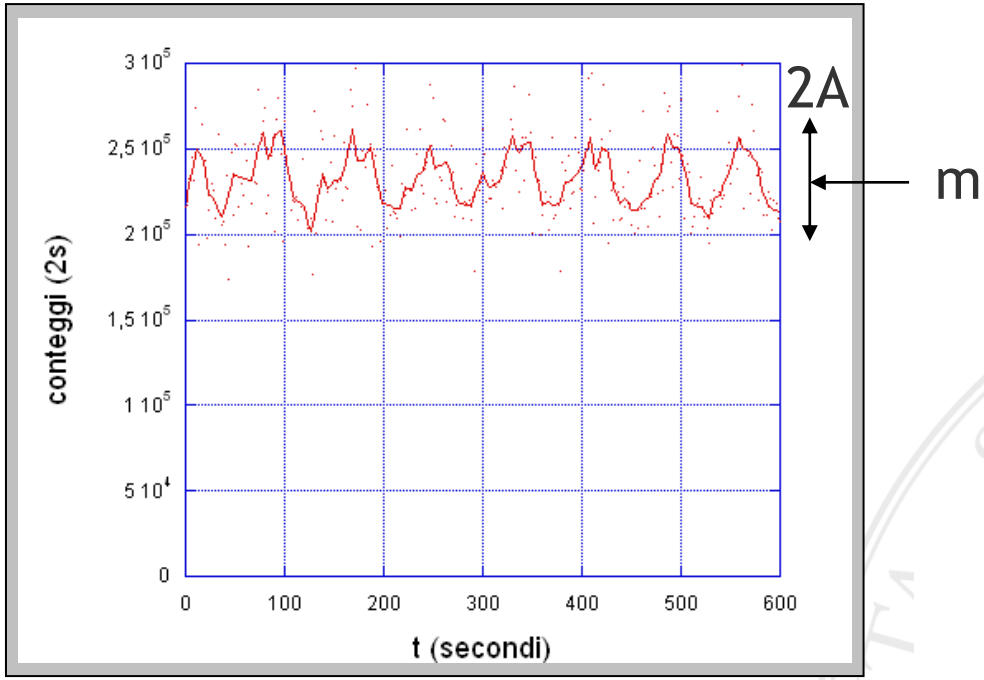
In questa misura il pinhole è da 1mm (invece che 0.2mm) ed il disco è stato spostato dal fuoco in modo da ottenere speckles molto piccole (più piccole dell'area di raccolta come si vede in figura)





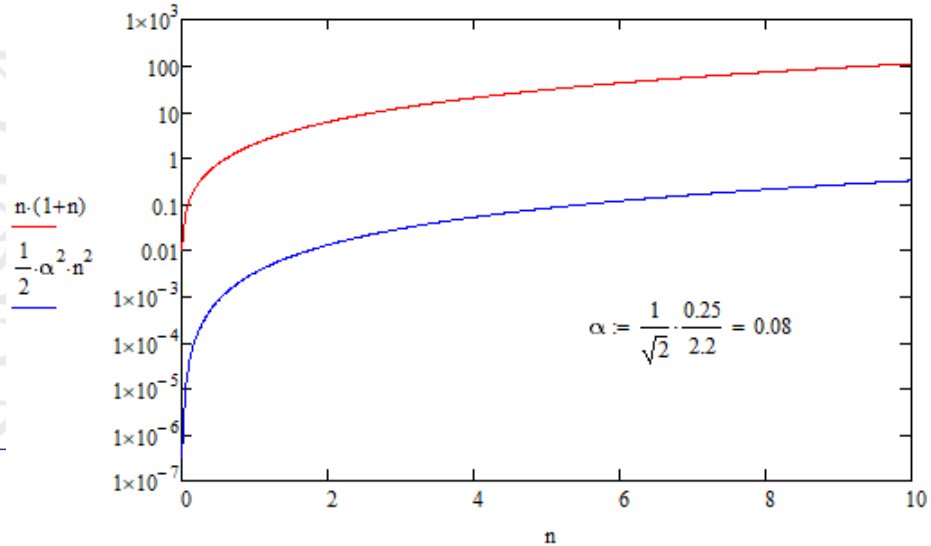
Omogeneità del disco su tempi lunghi

Per questa misura si acquisiscono i conteggi su tempi lunghi (1-2s) in modo da osservare solo l'intensità media (che idealmente dovrebbe essere costante).



Quindi la fluttuazione dell'intensità «media» intensa come σ/m è: $\alpha=A/[\mathrm{sqrt}(2)*m]$

Da questo valore possiamo stimare il numero medio di conteggi che ci permette di rendere trascurabile l'effetto dell'oscillazione sulla ricostruzione della funzione di distribuzione termica:

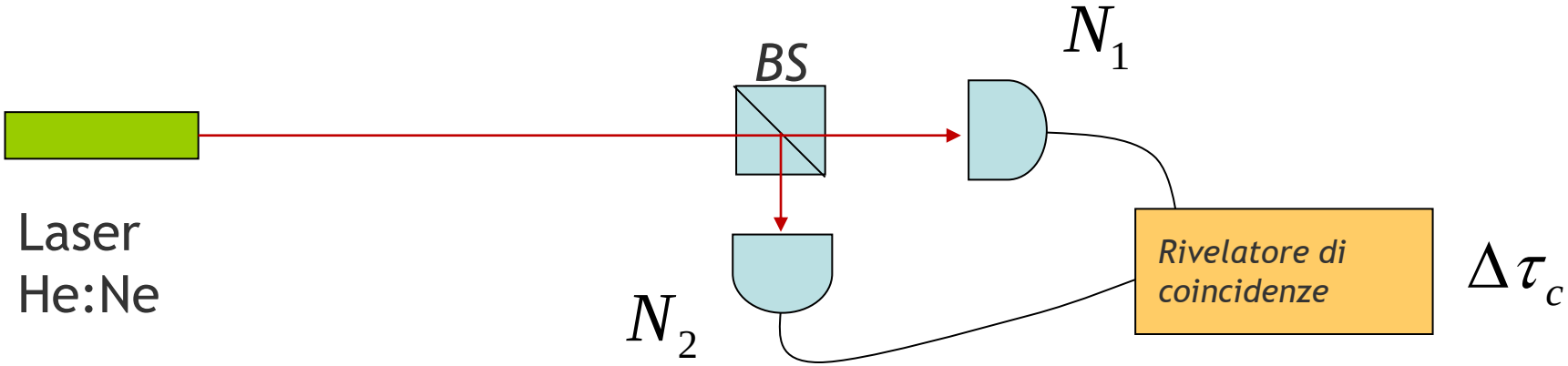


Coerenza spaziale

Si tratta di determinare la $g^{(2)}$ in funzione dello shift trasverso di uno dei due rivelatori (esperimento di Hanbury & Twiss del 1958 per la determinazione della coerenza spaziale).

1. *E' necessario sapere come vengono generati i click di coincidenza*
2. *La dimensione delle Speckles deve essere più piccola del beam-splitter ma più grande del pin-hole di raccolta*
3. *La finestra temporale dei conteggi deve essere molto più grande del tempo di coerenza della radiazione (l'integrale sul tempo deve essere fatto su tutti i valori accessibili dell'intensità, ovvero, l'integrale nel tempo deve essere uguale a quello fatto con la funzione di distribuzione dell'intensità)*

Procedura per ricavare $\Delta\tau_c$



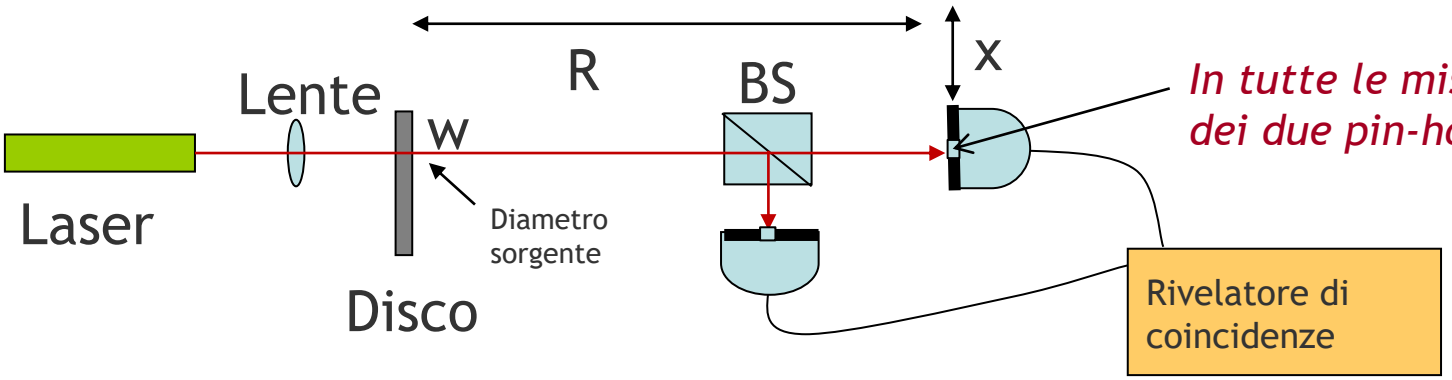
I conteggi N1 e N2 sono scorrelati, infatti, la sorgente è a potenza costante e dunque la probabilità di avere un conteggio non dipende dal tempo.
Se vedo un conteggio sul rivelatore 1 la probabilità di vedere un conteggio sul rivelatore 2 entro la finestra temporale (e quindi un conteggio in contemporanea) è:

$$\Delta\tau_c N_2$$

Quindi il numero di conteggi in contemporanea nell'unità di tempo è:

$$N_{12} = \Delta\tau_c N_1 N_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\tau_c = \frac{N_{12}}{N_1 N_2}}$$

$g^{(2)}$ vs spatial shift (Hunbury & Twis experiment)

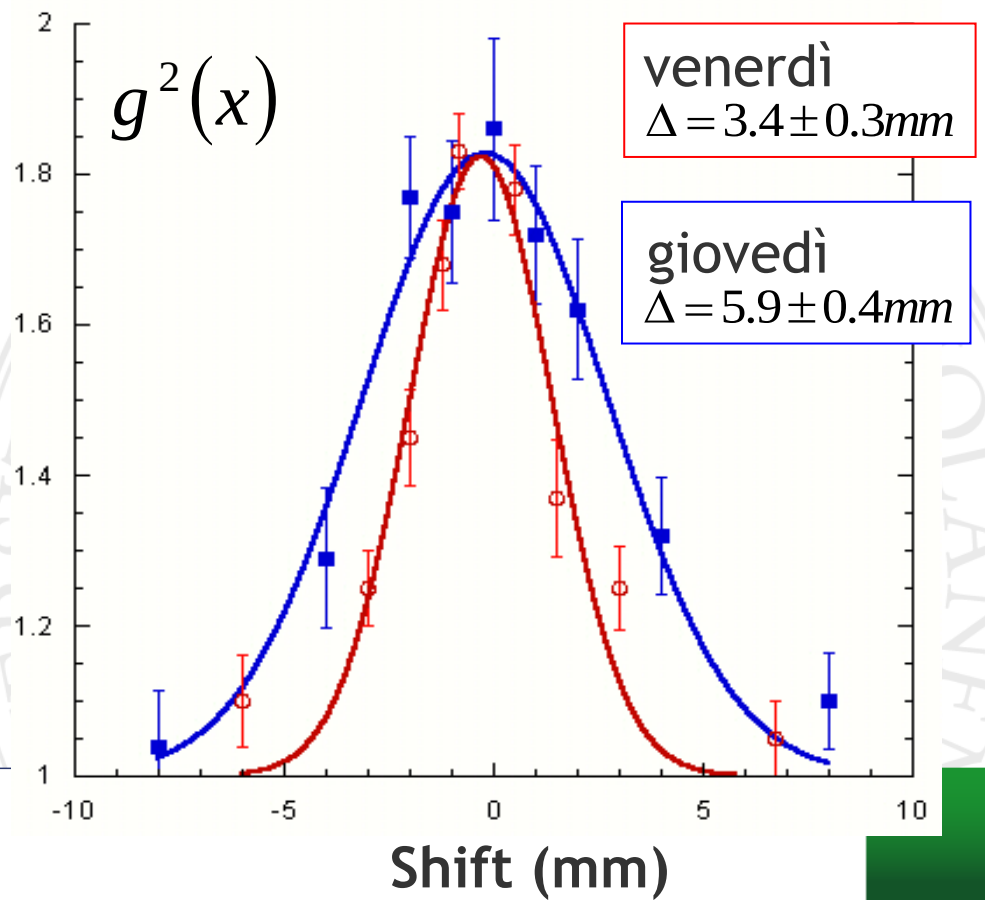


In tutte le misure il diametro dei due pin-hole è 0.2mm

$$g^{(2)}_{fit} = m1 + m2^{-\frac{2(x-\delta)^2}{\Delta^2}}$$

$$g^2(0) \geq 1$$
$$g^2(x) \leq g^2(0)$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\lambda R}{w}$$



Quantizzazione del campo elettromagnetico

Vogliamo costruire una teoria quanto-relativistica per particelle a massa nulla e spin 1:

Il modo più semplice può essere riassunto nei seguenti punti:

- *Dalle equazioni di Maxwell si ricava l'equazione per il potenziale vettore nella gauge di Coulomb*
- *Si scrive il potenziale vettore come sovrapposizione di onde piane*
- *Si introducono le variabili canoniche q e p e si scrive l'Hamiltoniana del campo come sovrapposizione di oscillatori armonici*
- *Si procede alla quantizzazione sostituendo alle parentesi di Poisson relative alla variabili canoniche i commutatori tra operatori quantistici*
- *Si riscrivono i campi e l'Hamiltoniana attraverso gli operatori che creano e distruggono i bosoni del campo*

Per quantizzare il campo ci mettiamo nella gauge di Coulomb. La gauge di Coulomb è scelta in modo che per il potenziale vettore valga la condizione di trasversalità. Con tale scelta abbiamo che il potenziale scalare è nullo

$$\nabla \vec{A} = 0$$

Ricordo che i campi E e B sono invarianti per le trasformazioni di gauge:

$$\phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t}\psi \quad , \quad A \to A' = A - \nabla\psi$$

Dove ϕ è il potenziale scalare e λ una funzione di t e x

Quindi dato il potenziale vettore i campi E e B si scrivono:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)$$

Sostituendo nelle equazioni di Maxwell si ottiene l'equazione per il potenziale vettore:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0$$

gauge di Coulomb:

eq. di Maxwell: $\nabla B = 0$, $\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$; $\nabla \times B = \mu_0 J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$

pongo $B = \nabla \times A$, $E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi$ le eq. omogenee sono ok.

sostituisco nelle 4ª: $\nabla \nabla A - \nabla^2 A = \mu_0 J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi\right)$

$\Rightarrow \Box A = \mu_0 J - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla A\right) = \mu_0 J - \nabla\left(\partial_\mu A^\mu\right)$

dove $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$, $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A\right)$

Posso porre $\partial_\mu A'^\mu = 0$ (gauge di Lorentz) dimostrazione:

gauge: $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \varphi$ dove $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

scelgo φ / $\partial_\mu A'^\mu = 0 = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \varphi$ ovvero: $\Box \varphi = -\partial_\mu A^\mu$

quindi con i nuovi ϕ' e A' scrivo:

$\Box A' = \mu_0 J$

e dalla 2ª equazione di Maxwell:

$$\nabla\left(-\frac{\partial A'}{\partial t} - \nabla\phi'\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ e poiché $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \nabla A' = 0$ ottengo:

$\Box\phi' = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

poiché $\rho = 0$ e quindi $J = 0$ e descrive un campo libero

$\Box A' = 0$, $\Box\phi' = 0$. Posso ulteriormente semplificare con una ricarica gauge: $A'^\mu \to A''^\mu = A'^\mu + \partial^\mu\Lambda$ e darò essere $\Box\Lambda = 0$

poiché $A''^0 = 0 = A'^0 + \partial^0\Lambda$ ovvero $\partial_\mu A''^\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla A'' = 0}$

quindi ho:

$$\begin{cases} \phi'' = 0 \\ \nabla A'' = 0 \\ \Box A'' = 0 \end{cases}$$

nota: $4D \xrightarrow{\text{Lorentz}} 3D \xrightarrow{\text{Coulomb}} 2D$

Si ricava dalla precedente che A può essere scritto come sovrapposizione di onde piane:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k},s}\hat{e}_{\vec{k},s}\left(A_{\vec{k},s}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t\right)}+A^{*}_{\vec{k},s}e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t\right)}\right)$$

I versori "e" data la condizione di trasversalità devono essere perpendicolari alla direzione del vettore d'onda k, quindi sto scrivendo una sovrapposizione di onde piane trasversali.

Note:

- *Il quadrivettore A^{μ} ha due componenti nulle: una è il potenziale scalare e l'altra è la componente di A parallela al vettore d'onda*

Introduco le variabili q e p:

$$\begin{cases} A_{\vec{k},s} \overset{df}{=} \dfrac{1}{2\omega_{\vec{k}}\sqrt{\varepsilon_o V}}\left(\omega_{\vec{k}} q_{\vec{k},s} + i p_{\vec{k},s}\right) \\ A^*_{\vec{k},s} \overset{df}{=} \dfrac{1}{2\omega_{\vec{k}}\sqrt{\varepsilon_o V}}\left(\omega_{\vec{k}} q_{\vec{k},s} - i p_{\vec{k},s}\right) \end{cases}$$

Adesso voglio dimostrare che q e p sono variabili canoniche. Quindi ho bisogno di scrivere l'Hamiltoniana del campo e verificare che sono soddisfatte le equazioni di Hamilton:

Scriviamo l'Hamiltoniana di un campo elettromagnetico contenuto in un volume V:

$$H = \int_V \rho \, dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_o \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2\mu_o} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) dV$$

Sostituendo A si ottiene (vedi Introductory Quantum Optics pg. 18-25):

$$H = 2\varepsilon_o V \sum_{\vec{k},s} \omega_{\vec{k}}^2 A_{\vec{k},s} A_{\vec{k},s}^*$$

Sostituendo le variabili q e p prima definite si ottiene:

$$H = \sum_{\vec{k},s} \frac{1}{2} \left(p_{\vec{k},s}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 q_{\vec{k},s}^2 \right)$$

Adesso possiamo dimostrare che le variabili q e p sono canonicamente coniugate e che il sistema è una sovrapposizione di oscillatori armonici. Per fare ciò confronto il risultato che ottengo dall'equazioni di Maxwell con quello che ottengo dalle equazioni di Hamilton (mi limito al singolo modo senza però perdere di generalità):

Equazioni di Maxwell

$$\omega = ck$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 A$$

$$A = \omega q + i\,p$$

$$\begin{cases} \ddot{q} = -\omega^2 q \\ \ddot{p} = -\omega^2 p \end{cases}$$

=

Equazioni di Hamilton

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q} = -\omega^2 q \\ \ddot{p} = -\omega^2 p \end{cases}$$

Adesso possiamo passare dalla meccanica classica alla meccanica quantistica.
Se q e p sono variabili canoniche la corretta descrizione quantistica si ottiene semplicemente sostituendo alla parentesi di Poisson la relazione di commutazione tra gli operatori q e p (quindi scriveremo le eq. di Heisenberg partendo da quelle di Hamilton scritte con le parentesi di Poisson):

$$\left\{q_{\vec{k},s}, p_{\vec{k}',s'}\right\} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'}$$

$$\left[\hat{q}_{\vec{k},s}, \hat{p}_{\vec{k}',s'}\right] = i\hbar\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'}$$

$$\{a,b\} \overset{df}{=} \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q}$$

$$\left[\hat{a},\hat{b}\right] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$$

E quindi l'Hamiltoniana quantistica è la somma di oscillatori armonici quantistici:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},s} \frac{1}{2}\left(\hat{p}^2_{\vec{k},s} + \omega^2_{\vec{k}}\hat{q}_{\vec{k},s}\right)$$

A questo punto il problema diventa quello dell'oscillatore armonico quantistico e dunque si procede definendo gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{cases} \hat{a}_{\vec{k},s} \overset{df}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}}\left(\omega_{\vec{k}}\hat{q}_{\vec{k},s} + i\hat{p}_{\vec{k},s}\right) \\ \hat{a}^{+}_{\vec{k},s} \overset{df}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}}\left(\omega_{\vec{k}}\hat{q}_{\vec{k},s} - i\hat{p}_{\vec{k},s}\right) \end{cases}$$

Dalla regola di commutazione per q e p si ricava subito quella per a e a+:

$$\boxed{\left[\hat{a}_{\vec{k},s}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}',s'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'}}$$

Se scriviamo l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico con questi nuovi operatori otteniamo:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}^{+}_{\vec{k},s} \hat{a}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{n}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right)$$

L'Hamiltoniana è data dalla somma di oscillatori indipendenti. Ad ogni oscillatore può essere associato un set completo di autostati dell'operatore numero (stati di Fock):

$$\begin{cases} \hat{n}_{\vec{k},s} \left| n_{\vec{k},s} \right\rangle = n_{\vec{k},s} \left| n_{\vec{k},s} \right\rangle \\ \hat{a}_{\vec{k},s} \left| n_{\vec{k},s} \right\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},s}} \left| n_{\vec{k},s} - 1 \right\rangle \\ \hat{a}^{+}_{\vec{k},s} \left| n_{\vec{k},s} \right\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},s} + 1} \left| n_{\vec{k},s} + 1 \right\rangle \end{cases}$$

dimostrazione: $[a, a^+] = 1 \Rightarrow a a^+ - a^+ a = 1$

$$a^+ \hat{n} |n\rangle = a^+ a^+ a |n\rangle = a^+ (a a^+ - 1) |n\rangle = \hat{n} a^+ |n\rangle - a^+ |n\rangle$$

$$\hat{n} a^+ |n\rangle = (n+1) a^+ |n\rangle \Rightarrow a^+ |n\rangle = k |n+1\rangle$$

trovo k: $\langle n | a a^+ | n\rangle = |k|^2 \Rightarrow \langle n | 1 + a^+ a | n\rangle = |k|^2$

$|k|^2 = 1 + n$, $k \in R$ $\quad k = \sqrt{1+n} \Rightarrow a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$

$$a \hat{n} |n\rangle = a a^+ a |n\rangle = (1 + a^+ a) a |n\rangle = a |n\rangle + \hat{n} a |n\rangle$$

$$\hat{n} a |n\rangle = (n-1) a |n\rangle \Rightarrow a |n\rangle = k |n-1\rangle$$

trovo k: $\langle n | a^+ a | n\rangle = n = |k|^2$, $k \in R \Rightarrow k = \sqrt{n}$

$a |n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle \Rightarrow a |0\rangle = 0 \Rightarrow n \in \mathbb{N}$

Notazione relativa al numero di occupazione

$$|n\rangle = \frac{1}{n!} a^{+n} |0\rangle \Rightarrow |\underset{\substack{\uparrow \\ k_1}}{n_1} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ k_n}}{n_m}\rangle = \frac{a^{+n_1}_{k_1}}{n_1!} \cdots \frac{a^{+n_m}_{k_m}}{n_m!} |0\rangle$$

Implicitamente stiamo usando la rappresentazione di Heisenberg dal momento che siamo partiti da campi classici dipendenti dal tempo.

In questa rappresentazione gli operatori a e a+ soddisfano le equazioni:

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, a] = -i\omega a \quad \Rightarrow \quad a(t) = e^{-i\omega t} a(0)$$

$$\frac{da^+}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, a^+] = +i\omega a^+ \quad \Rightarrow \quad a^+(t) = e^{+i\omega t} a^+(0)$$

Dimostrazione:

$$[H, a] = [\hbar\omega(a^+a + \tfrac{1}{2}), a] = \hbar\omega[a^+a, a] = -\hbar\omega a$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

Dalle definizioni di pg.18 e pg.22 si ottiene:

$$\hat{A}_{\vec{k},s} = \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}\varepsilon_o V}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\vec{k},s}$$

$$\hat{A}(t,\vec{r}) = \sum_{k,s} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_o V}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{k,s} \left(a_{ks}\, e^{-i\omega_k t + ikr} + a^{+}_{ks}\, e^{+i\omega_k t - ikr} \right)$$

Usando la definizione di E e B attraverso il potenziale vettore si ottiene::

$$\begin{cases} \hat{E}(\vec{r},t) = i\sum_{\vec{k},s}\left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_o V}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{\vec{k},s}\left(\hat{a}_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} - \hat{a}^{+}_{\vec{k},s} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)}\right) \\ \hat{B}(\vec{r},t) = \frac{i}{c}\sum_{\vec{k},s}\left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_o V}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\times\vec{e}_{\vec{k},s}\right)\left(\hat{a}_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} - \hat{a}^{+}_{\vec{k},s} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)}\right) \end{cases}$$

I campi elettrico e magnetico sono operatori hermitiani ovvero degli osservabili.

La quantizzazione del campo ha prodotto operatori hermitiani che soddisfano la condizione di causalità: le teoria è locale, ovvero, non sono previsti effetti superluminali

Dimostrazione: verifico che il commutatore di A per eventi space-like è nullo. Posso prendere due eventi space-like con lo stesso t perchè attraverso una trasformazione di Lorentz partendo da due eventi space-like qualisasi posso sempre ricondurmi a questa situazione

$$\left[\hat{A}(t,\vec{r}_1),\hat{A}(t,\vec{r}_2)\right] = \sum_{k,s}\left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0 V}\right)\left\{\left[a_{ks},a^+_{ks}\right]e^{ik(r_1-r_2)} + \left[a^+_{ks},a_{ks}\right]e^{+ik(r_1-r_2)}\right\} = 0$$

Da notare che: $\omega_k \geq 0 \quad \forall k$ *mentre k è orientato*

Quindi non ci può essere una relazione causale tra due azioni dell'operatore A per eventi space-like. Esercizio: dimostrare che invece per eventi time-like il commutatore non è nullo

Trovo lo stesso risultato anche con gli operatori E e B. Di particolare importanza è il commutatore tra A ed E perchè nella trattazione Lagrangiana della quantizzazione si dimostra che E è il momento coniugato di A (e dove A si chiama operatore di campo):

$$\left[\hat{A}(t,\vec{r}_1),\hat{E}(t,r_2)\right] = \sum_{ks} i\hbar \frac{1}{2\varepsilon_0 V}\left\{-\left[a_{ks},a^+_{ks}\right]e^{ik(r_1-r_2)} + \left[a^+_{ks},a_{ks}\right]e^{-ik(r_1-r_s)}\right\}$$

Che è zero per r1≠r2 mentre ricorda il commutatore tra q e p per r1=r2.

Quindi abbiamo costruito una teoria che, al contrario della meccanica quantistica basata sulla funzione d'onda, è locale. Questo punto andrà ripreso quando tratteremo gli stati entangled...

Quindi le equazioni di Maxwell non sono equazioni per una funzione d'onda ma per operatori di campo.

In una teoria quanto-relativistica la funzione d'onda definita nello spazio delle coordinate non esiste ed è importante capire perché.

Per capire bene questo punto dobbiamo evidenziare che:

- *In una teoria quanto-relativistica la posizione non è un osservabile*
- *La definizione dell'impulso come osservabile ha bisogno di particolare cura*

•*In una teoria quanto-relativistica la posizione non è un osservabile ma è solo un parametro che comprare all'interno di operatori di campo.*

Nella meccanica quantistica non relativistica l'indeterminazione sulla posizione di una particella può essere ridotta a piacere senza creare problemi. Ciò vuol dire poter definire l'osservabile posizione con i suoi autovalori.

Ma individuare la posizione con indeterminazione piccola a piacere vuol dire fare una misura in un intervallo Δt piccolo a piacere. L'indeterminazione tempo-energia (da non confondere con il principio di indeterminazione relativo a operatori che non commutano) ci dice però che se facciamo una misura in un intervallo Δt piccolo l'indeterminazione dell'energia aumenta:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dunque per un Δt abbastanza piccolo si raggiungerà un'indeterminazione sull'energia pari all'energia necessaria per formare una coppia particella-antiparticella e dunque non abbiamo più il sistema fisico iniziale

$$\Delta t_{coppia} = \frac{\hbar}{4mc^2}$$

•*In una teoria quanto-relativistica l'impulso può essere considerato un osservabile solo se consideriamo tempi di misura "infiniti"*

Procedendo in modo un pò disinvolto (Landau, Fisica Teorica 4, pg 16) si può riscrivere la relazione di indeterminazione posizione-impulso (in un contesto non relativistico) come:

$$V\Delta t \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Si vede che se vogliamo ottenere Δp piccolo a piacere in un intervallo di tempo Δt finito si dovrebbe avere V>c. Dunque in una teoria relativistica si può definire l'impulso come osservabile solo se permettiamo a Δt di andare all'infinito, ovvero:

Ad esempio se stiamo studiando una particella libera che può essere misurata per lungo tempo per ricavarne l'impulso trovando la curvatura della traiettoria all'interno di un campo magnetico classico (la teoria diventa semi-classica e l'impulso è un buon osservabile)

Se invece Δt è piccolo, come accade durante un'interazione, p non è definibile e tutto quello che si può fare è calcolare le probabilità di ottenere certe particelle alla fine dell'interazione.

Adesso, con le premesse fatte, possiamo definire l'impulso quantistico nel caso del campo elettromagnetico (libero)

Impulso del campo elettromagnetico

Dall'elettromagnetismo classico ottengo:

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{E}\times\vec{B}\, d^3r$$

Scrivendo E e B in funzione prima di A e poi di q e di p trovo che anche l'impulso può essere scritto come una somma di oscillatori armonici.

$$\hat{P} = \sum_{\vec{k},s} \hbar\vec{k}\left(\hat{n}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2}\right)$$

Il Fotone

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{n}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right) \qquad \hat{P} = \sum_{\vec{k},s} \hbar\vec{k} \left(\hat{n}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right)$$

Posso considerare il campo elettromagnetico come composto da particelle con energia $\hbar\omega$ *ed impulso* $\hbar\vec{k}$

L'energia delle stato di vuoto però non è zero dal momento che gli operatori q e p non commutano e quindi i loro quadrati daranno sempre un contributo ad H anche nel caso del vuoto.

…Si ottiene così un'energia infinita che nel caso della relatività generale non può essere trascurata (in quel caso non interessano solo le differenze di energia). Inoltre, questa energia è totalmente incompatibile con quella relativa all'energia oscura che genera l'accelerazione dell'espansione dell'universo…?

Il Fotone (2)

posso considerare il campo elettromagnetico come composto da particelle con energia $\hbar\omega$ *ed impulso* $\hbar\vec{k}$ *inoltre dall'equazione:* $\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ *trovo che:* $\left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}$ *e quindi:* $E_{fotone} = p_{fotone} c$

Ma poichè in generale risulta: $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ *ricavo che il fotone ha* *massa nulla*.

Inoltre, poichè non esiste un limite al numero di fotoni che possono stare in uno stesso modo di oscillazione i *fotoni sono Bosoni*.

Ripasso:

Quadrimpulso *Invariante*

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

Il Fotone (3)

Per rappresentare una particella di spin s serve una "funzione d'onda" o meglio un operatore di campo a 2s+1 componenti.

Nel nostro caso il potenziale vettore ha tre componenti e quindi sembra logico attribuire al fotone spin=1.

E' però importante notare che:

•A causa delle condizione di trasversalità le tre componenti non sono indipendenti, infatti è sempre possibile definire le coordinate in modo che una sia 0. Per questo motivo delle tre proiezioni dello spin solo due sono accessibili.

Stati numero o di Fock

Autostati dell'operatore a^+a

$$|n\rangle \qquad \begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

Osservabile numero:

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n$$

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n|\hat{n}^2|n\rangle - \langle n|\hat{n}|n\rangle^2 = 0$$

Osservabile campo E:

$$\hat{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}}e\left(\hat{a}e^{i(kr-\omega t)} - \hat{a}^+e^{-i(kr-\omega t)}\right)$$

$$\langle \hat{E} \rangle = \langle n|\hat{E}|n\rangle = 0$$

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \langle \hat{E}^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2 = \langle n|\hat{E}^2|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_o V}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Osservazioni sugli stati di Fock

In fisica classica siamo abituati a pensare al campo elettromagnetico monocromatico come un'onda. In questo caso invece il campo elettrico è mediamente nullo per ogni fase.

In fisica classica le fluttuazioni del campo monocromatico sono nulle. In questo caso invece abbiamo una fluttuazione anche quando n=0

Gli stati di Fock sono un set completo quindi deve essere possibile scrivere una combinazione lineare di questi tale da ottenere uno stato che si comporta in modo quasi classico

Non è vero che uno stato caratterizzato da molti fotoni è uno stato quasi classico

Notare che anche l'osservabile energia non ha fluttuazioni nel caso di stati di Fock.

Stati Coerenti

Autostati dell'operatore a

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad \begin{cases} \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|\hat{a}^+ = \alpha^* \langle\alpha| \end{cases}$$

Osservabile numero:

$$\langle\hat{n}\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}$$

$$\langle\Delta n^2\rangle = \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

Osservabile campo E:

$$\langle\hat{E}\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}} e\langle\alpha|\hat{a}e^{i(kr-\omega t)} - \hat{a}^+ e^{-i(kr-\omega t)}|\alpha\rangle = 2|\alpha| e\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}} \sin(\omega t - kr - \theta)$$

$$\langle\Delta E^2\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}$$

Fluttuazione del vuoto

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$$

R. J. Glauber, Phys. Rev. 131, 6 (1963) 2766-2788

Osservazioni sugli stati Coerenti

Il campo elettrico oscilla nel tempo come nel caso classico (andamento sinusoidale in funzione della fase)

L'unica fluttuazione del campo è quella di vuoto

La fluttuazione sul numero dei fotoni diventa piccolissima nel caso di stati con alto numero medio (comportamento classico per n_{medio} molto alto)

Non è vero che attenuando uno stato coerente (laser) si ottengono singoli fotoni (stati di Fock con n=1)

Stati Termici

Mistura statistica di stati numero

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) |n\rangle\langle n| \qquad P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}$$

Osservabile numero:

$$\langle n \rangle = Tr[n\,\rho] = \bar{n}$$

$$\langle \Delta n^2 \rangle = Tr[n^2\,\rho] - \bar{n}^2 = \bar{n} + \bar{n}^2$$

Osservabile campo E:

$$\langle \hat{E} \rangle = Tr[\hat{E}\,\rho] = 0$$

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V} Tr[(2\hat{n}+1)\rho] = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_o V}\left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right)$$

Da fare per esercizio

Osservazioni sugli stati Termici

Lo stato termico è una mistura statistica e non uno stato puro come nel caso dello stato di Fock o del Coerente (non viene generato da una sovrapposizione quantistica tra i vari stati numero che lo compongono)

Il campo elettrico è mediamente nullo per ogni fase

La fluttuazione del campo aumenta all'aumentare del numero medio dei fotoni come nel caso dello stato di Fock

Fotoconteggio quantistico

Nel caso di QE=100%

$$\begin{cases} P(m) & \text{Funzione di distrib. dei fotoni} \\ P_c(m) & \text{Funzione di distrib. dei conteggi} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\rho} \boxed{\hat{n}}$$

In questo caso il rivelatore è l'osservabile numero

Stato di Fock:

$$P_c(m) = P(m) = \left|\langle m|n\rangle\right|^2 = \delta_{n,m}$$

Stato coerente:

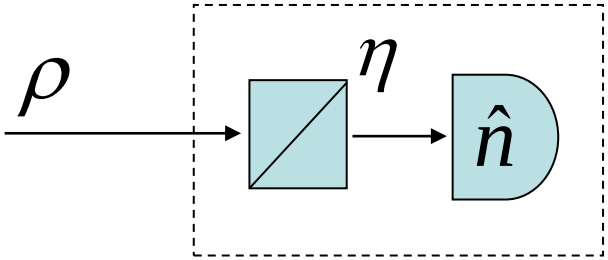
$$P_c(m) = P(m) = \left|\langle m|\alpha\rangle\right|^2 = \left|\langle m|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^m}{m!}$$

Stato termico:

$$P_c(m) = P(m) = \langle m|\rho|m\rangle = \frac{\bar{n}^m}{(1+\bar{n})^{1+m}}$$

Fotoconteggio quantistico

Nel caso di QE = η < 100%



Il rivelatore può essere schematizzato come un osservabile numero preceduto da un beam splitter con trasmittività η

Stato di Fock:

$$|n\rangle \Rightarrow P_c(m) = \binom{n}{m} \eta^m (1-\eta)^{n-m} \neq P(m)$$

Stato coerente:

Stato termico:

$$P_c(m) = \sum_{n=m}^{\infty} P(n) \binom{n}{m} \eta^m (1-\eta)^{n-m}$$

$$P_{c(coerente)}(m) = e^{-\eta\bar{n}} \frac{(\eta\bar{n})^m}{m!}$$

$$P_{c(termico)}(m) = \frac{(\eta\bar{n})^m}{(1+\eta\bar{n})^{1+m}}$$

Nel caso di radiazione "classica" l'efficienza quantica va solo a ridurre il numero medio

Fotoconteggio quantistico

Spiegazione dell'equazione usata nella slide precedente:

$$P_c(m) = \sum_{n=m}^{\infty} P(n) \binom{n}{m} \eta^m (1-\eta)^{n-m}$$

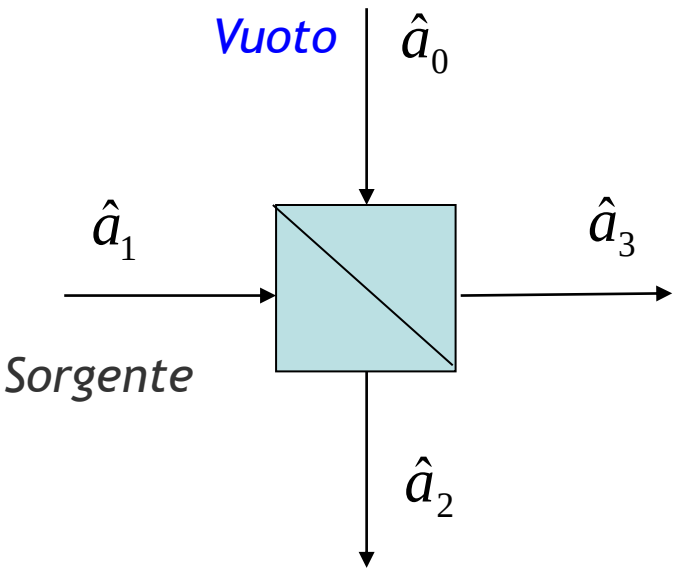
$$P(n) = \langle n | \rho | n \rangle$$

Il contributo ad un numero m di conteggi viene dato da tutti i casi in cui parto con un numero di fotoni maggiori o uguali a m pesato sulla probabilità di avere tale numero di fotoni.

Nota: nel caso dello stato di Fock (stato tipicamente quantistico) la distribuzione dei conteggi è formalmente diversa da quella dei fotoni, mentre nel caso del coerente e del termico le distribuzioni sono le stesse e cambia solo il numero medio attraverso la QE del rivelatore.

Il beam splitter quantistico

Il punto fondamentale è che devo includere nel formalismo anche l'ingresso del BS attraverso il quale entra il vuoto



$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}$$

$$R + T = 1$$

$$\left[\hat{a}_0, \hat{a}_0^+\right] = 1$$
$$\left[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+\right] = 1$$
$$\left[\hat{a}_0, \hat{a}_1^+\right] = 0$$

Relazioni di commutazione fondamentali tra i campi entranti

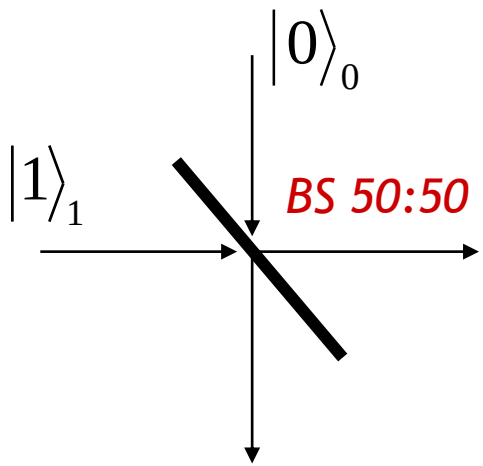
$$\left[\hat{a}_2, \hat{a}_2^+\right] = 1$$
$$\left[\hat{a}_3, \hat{a}_3^+\right] = 1$$
$$\left[\hat{a}_2, \hat{a}_3\right] = 0$$

Il BS deve conservare le relazioni di commutazione relative ai campi uscenti

Vedi "Introductory Quantum Optics" paragrafo 6.2 oppure "A guide to experiments in quantum optics" paragrafo 5.1

Il beam splitter quantistico (2)

Stato di Fock:



$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

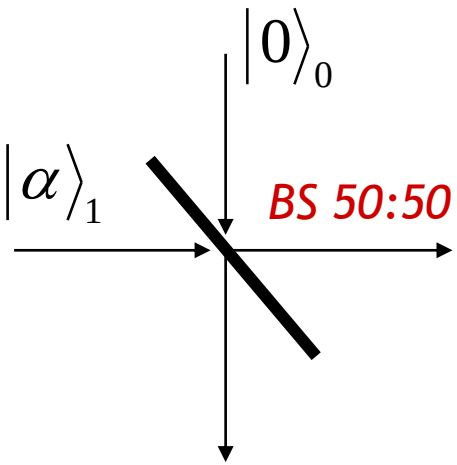
$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0^+ \\ \hat{a}_1^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_2^+ \\ \hat{a}_3^+ \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 = \hat{a}_1^+ |0\rangle_0 |0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{a}_2^+ + \hat{a}_3^+ \right) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i|1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3 \right)$$

Quindi ottengo una sovrapposizione quantistica delle due uscite, ovvero, uno stato entangled tra i due modi di uscita del BS

Il beam splitter quantistico (3)

Stato Coerente:



Lo stato corente si può scrivere come l'operatore di displacement applicato al vuoto:

$$|\alpha\rangle_i = \hat{D}_i(\alpha)|0\rangle_i$$

$$\hat{D}_i(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}_i^+ - \alpha^* \hat{a}_i}$$

$$|0\rangle_0|\alpha\rangle_1 = \hat{D}_1(\alpha)|0\rangle_0|0\rangle_1 = \hat{D}_2\left(\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right)\hat{D}_3\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle_2|0\rangle_3 = \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3$$

In questo caso non ho uno stato entangled. Lo stato si fattorizza nei due modi e ottengo metà energia su un modo e metà sull'altro (caso classico con BS 50:50)

Dimostrazione

$$\hat{D}_1(\alpha) = \hat{D}_2\left(\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right)\hat{D}_3\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\hat{D}_1(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}_1^+ - \alpha^*\hat{a}_1} = e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(i\hat{a}_2^+ + \hat{a}_3^+\right) - \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}\left(-i\hat{a}_2 + \hat{a}_3\right)} =$$

$$= e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\hat{a}_2^+ - \frac{-i\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{a}_2} e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\hat{a}_3^+ - \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{a}_3} = \hat{D}_2\left(\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right)\hat{D}_3\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

Ho usato il Disentangling theorem e il fatto che modi diversi commutano:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}$$

Per completare la dimostrazione dimostriamo che lo stato coerente è autostato dell'operatore di distruzione e che l'operatore di displacement applicato al vuoto genera lo stato coerente:

1

$$a|\alpha\rangle = a\, e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\, |n-1\rangle = \quad m \overset{df}{=} n-1$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{m!}} |m\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

2

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}|0\rangle = e^{\alpha a^+} e^{-\alpha a} e^{-\frac{1}{2}[\alpha a^+, -\alpha^* a]}|0\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^+} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha a)^n}{n!}|0\rangle}_{|0\rangle} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle =$$

$$a^{+n}|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha\rangle$$

Funzione di correlazione dell'intensità quantistica

$$g_q^{(2)}(\tau) = \frac{\left\langle \hat{I}_1(t)\hat{I}_2(t+\tau)\right\rangle}{\left\langle \hat{I}_1(t)\right\rangle\left\langle \hat{I}_2(t+\tau)\right\rangle}$$

La media si calcola sullo stato quantistico

L'intensità è un operatore

$$I(t) \propto |E(t)|^2 = E^*(t)E(t) \longrightarrow \hat{I}(t) \propto \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t)$$

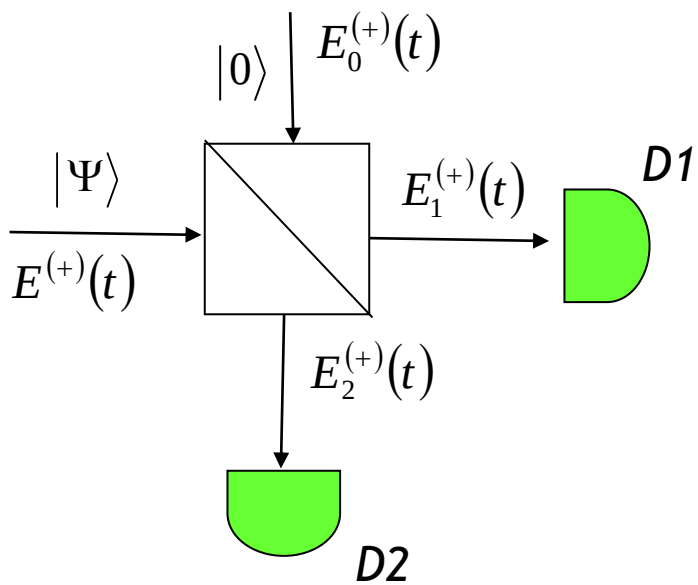
Intensità classica — *Intensità quantistica*

$$\hat{E}(\vec{r},t) = i\sum_{\vec{k},s}\left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_o V}\right)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_{\vec{k},s}\left(\hat{a}_{\vec{k},s}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} - \hat{a}^+_{\vec{k},s}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)}\right) = \hat{E}^{(+)} + \hat{E}^{(-)}$$

uso la Rappresentazione di Heisenberg (evolve l'osservabile ma non lo stato)

$$g_q^{(2)}(\tau)=\frac{\left\langle \hat{E}_1^{(-)}(t)\hat{E}_1^{(+)}(t)\hat{E}_2^{(-)}(t+\tau)\hat{E}_2^{(+)}(t+\tau)\right\rangle}{\left\langle \hat{E}_1^{(-)}(t)\hat{E}_1^{(+)}(t)\right\rangle\left\langle \hat{E}_2^{(-)}(t+\tau)\hat{E}_2^{(+)}(t+\tau)\right\rangle}$$

uso la regola del BS quantistico per determinare i campi E_1 E_2 in funzione dei campi all'ingresso



$$\begin{cases}\hat{E}_1^{(+)}(t)=ir\,\hat{E}_o^{(+)}(t)+t\,\hat{E}^{(+)}(t)\\ \hat{E}_2^{(+)}(t)=t\,\hat{E}_o^{(+)}(t)+ir\,\hat{E}^{(+)}(t)\end{cases}$$

Poichè: $\left[a_1, a_2\right] = 0 \qquad \left[a_1, a_2^+\right] = 0 \qquad \left[a_1^+, a_2^+\right] = 0$

(normal ordering)

Posso scrivere:

$$g_q^{(2)}(\tau) = \frac{\left\langle \hat{E}_1^{(-)}(t)\hat{E}_2^{(-)}(t+\tau)\hat{E}_2^{(+)}(t+\tau)\hat{E}_1^{(+)}(t)\right\rangle}{\left\langle \hat{E}_1^{(-)}(t)\hat{E}_1^{(+)}(t)\right\rangle\left\langle \hat{E}_2^{(-)}(t+\tau)\hat{E}_2^{(+)}(t+\tau)\right\rangle}$$

$$\rangle = |\Psi\rangle_1 |0\rangle_0$$

sostituisco

$$\begin{cases} E_1^{(+)}(t) = ir\,E_o^{(+)}(t) + t\,E^{(+)}(t) \\ E_2^{(+)}(t) = t\,E_o^{(+)}(t) + ir\,E^{(+)}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{g_q^{(2)}(\tau) = \frac{\langle\Psi|\hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t)|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t)|\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t+\tau)|\Psi\rangle}}$$

Grazie al fatto che sul modo 0 ho il vuoto delle 16 componenti che ho a numeratore sopravvive solo l'ultima, ovvero l'unica che non contiene termini con E_0

Il caso a singolo modo temporale

$$\hat{E}(\vec{r},t) = i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}\right)^{\frac{1}{2}} \vec{e}\left(\hat{a}\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t\right)} - \hat{a}^{+} e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\, t\right)}\right) = \hat{E}^{(+)} + \hat{E}^{(-)}$$

$$g_q^{(2)}(\tau) = \frac{\langle\Psi|a^{+}a^{+}a\,a|\Psi\rangle}{\langle\Psi|a^{+}a|\Psi\rangle\langle\Psi|a^{+}a|\Psi\rangle} = \frac{\langle\Psi|a^{+}\left(aa^{+}-1\right)a|\Psi\rangle}{\langle\Psi|a^{+}a|\Psi\rangle\langle\Psi|a^{+}a|\Psi\rangle} = \frac{\langle\Psi|\hat{n}^2-\hat{n}|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle} =$$

$$= \frac{\langle\Psi|\hat{n}^2-\hat{n}|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle^2 + \langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle^2}{\langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle^2} = 1 + \frac{\langle\Psi|\hat{\Delta}n^2|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\hat{n}|\Psi\rangle^2}$$

Stato Coerente

$$g_q^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{\langle \alpha | \hat{\Delta} n^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle^2}$$

$$\langle \alpha | \hat{\Delta} n^2 | \alpha \rangle = \bar{n}$$

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \bar{n}$$

$$\Rightarrow \quad g_q^{(2)}(\tau) = 1$$

In accordo con il caso classico

Nota: poiché sto considerando un caso a singolo modo non ci può essere alcuna dipendenza da τ

Stato Termico

$$g_q^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{Tr\left[\rho\,\hat{\Delta}n^2\right] - Tr\left[\rho\, n\right]}{\left(Tr\left[\rho\, n\right]\right)^2}$$

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\,|n\rangle\langle n|$$

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}$$

$$Tr\left[\rho\,\hat{\Delta}n^2\right] = \bar{n}^2 + \bar{n}$$

$$Tr\left[\rho\, n\right] = \bar{n}$$

$$g_q^{(2)}(\tau) = 2$$

In accordo con il caso classico

Stato di Fock

$$g_q^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{\langle n|\hat{\Delta}n^2|n\rangle - \langle n|\hat{n}|n\rangle}{\langle n|\hat{n}|n\rangle^2}$$

$$\langle n|\hat{\Delta}n|n\rangle = 0$$

$$\langle n|\hat{n}|n\rangle = n$$

$$g_q^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall \quad \tau$$

Statistica Sub-Poissoniana

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad g_q^{(2)}(0) = 0$$

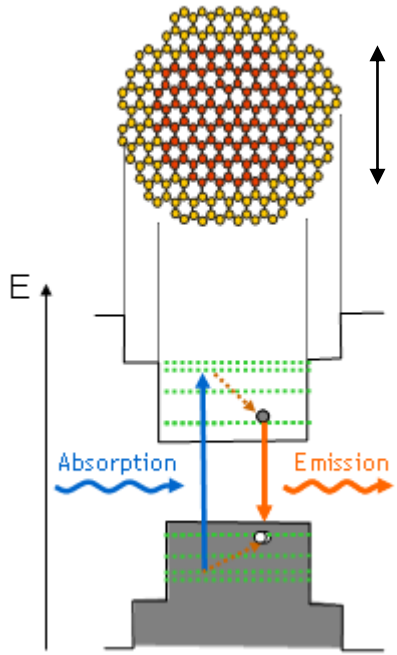
Questo viola la disuguaglianza classica

Sorgente di singoli fotoni a Nanocristalli

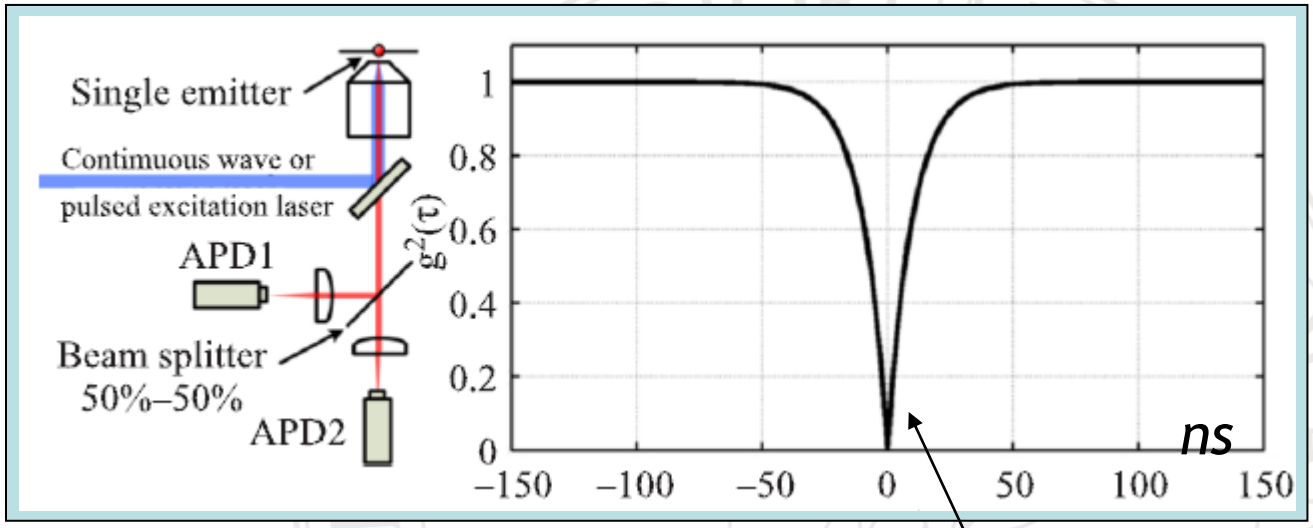
La λ del fotone emesso dipende dalla dimensione del NC

L'impulso di pompa genera N eccitoni che decadono tutti non-radiativamente (effetto Auger) meno l'ultimo che decade emettondo un fotone

CdS/CdSe



core CdSe
2R = 3,5 nm (~ 100 atoms)



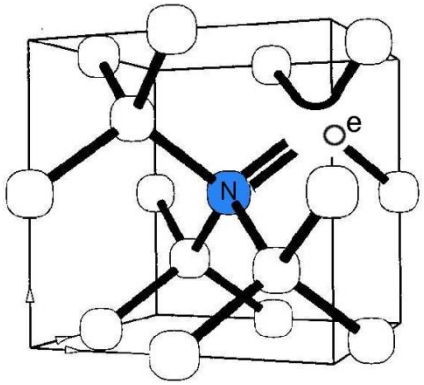
Emettono a singolo fotone a T ambiente ma hanno il problema del blinking e vivono poco

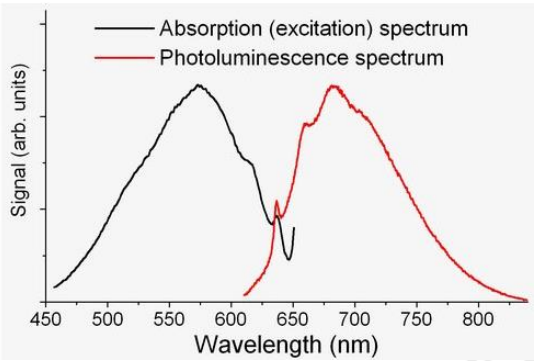
Verifica dell'emissione a singolo fotone

M. De. Vittorio et al,
Opto Electron. Rev., **18**, no. 1, 2010

Nitrogen-vacancy center in Diamond

Come nel caso precedente si tratta di poter sfruttare l'emissione spontanea di un sistema a livelli discreti fermo nello spazio.





In questo caso il sistema a livelli discreti è formato dall'azoto e dalla vacanza vicina (non è possibile cambiare le dimensioni)

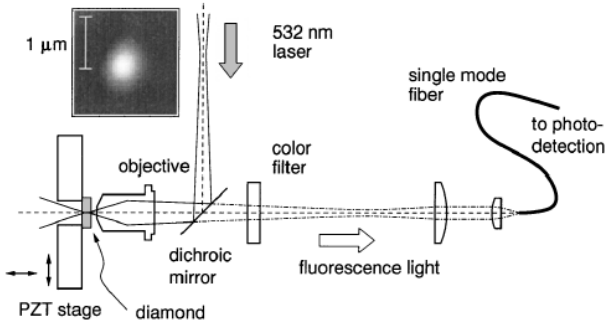
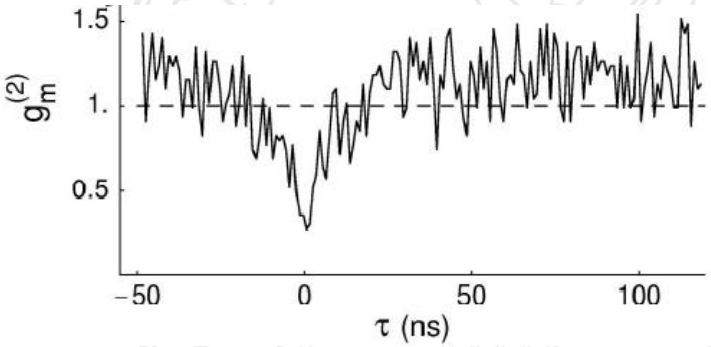
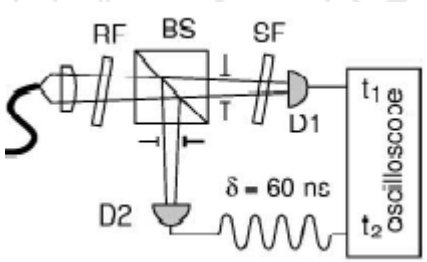


FIG. 1. Experimental setup: A frequency doubled diode pumped solid-state laser (532 nm) is focused into a type Ib diamond crystal. Fluorescence light is collected with a confocal microscope into a single mode optical fiber, and detected with silicon APDs. The inset shows the fluorescence image of a single NV center.

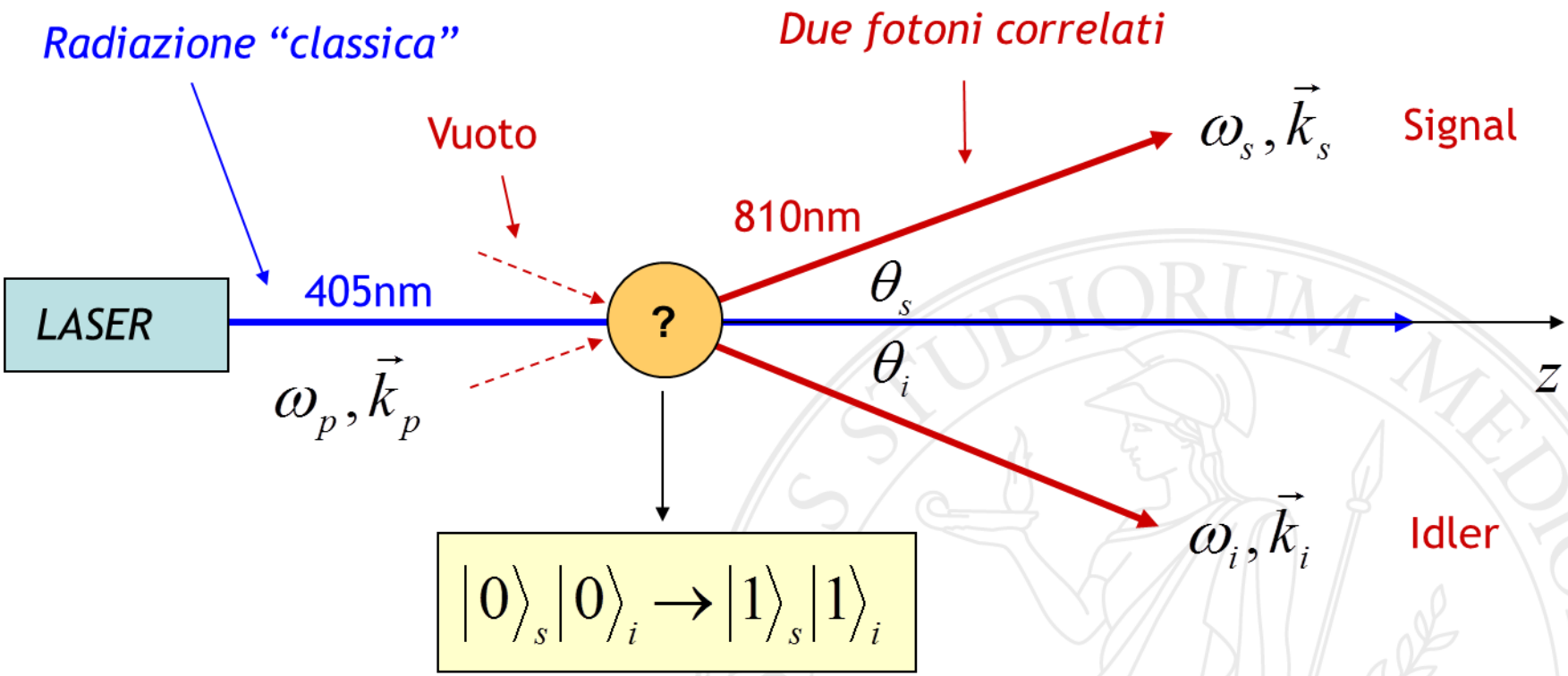
Verifica dell'emissione a singolo fotone per mezzo della g(2)





C. Kurtsiefer et al,
Phys. Rev. Lett. 85, 290 (2000)

Generazione di coppie di fotoni Via Parametric Down-Conversion (PDC)



Vogliamo convertire un fotone della pompa in due fotoni rispettando la conservazione dell'energia e dell'impulso

Conservazione

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i$$ *Energia*

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$$ *Impulso*

Hamiltoniana di interazione

Considerazioni generali

Ho bisogno di creare due fotoni partendo dal vuoto (sui relativi modi), quindi ho bisogno di un'Hamiltoniana di interazione di questo tipo:

$$\hat{H}_I = \eta\, \hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ + h.c. \qquad \hat{a}^+ |0\rangle = |1\rangle$$

Scrivo l'equazione di Schrodinger nella rappresentazione di interazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_I |\Psi(t)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_I t} |\Psi(0)\rangle \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_I t\right) |0\rangle_s |0\rangle_i = |0\rangle_s |0\rangle_i - \frac{i}{\hbar}\eta\, t \underline{|1\rangle_s |1\rangle_i}$$

Se seleziono i casi in cui ho un click sull'idler allora sul signal otterrò lo stato di Fock con n=1 (fotone)

Interazione non lineare laser-cristallo

Un modo per ottenere l'Hamiltoniana cercata

Suscetività dielettrica

$$P_i = \varepsilon_o \chi^{(1)}_{i,j} E_j + \varepsilon_o \chi^{(2)}_{i,j,k} E_j E_k + \ldots$$

Polarizzazione non lineare

Densità di energia per la parte di interazione non lineare

$$\rho_{NL} = \frac{1}{2} P_i E_i = \frac{1}{2} \varepsilon_o \chi^{(2)}_{i,j,k} E_i E_j E_k \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_I = \int \rho_{NL} \underline{d^3 r}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_I |\Psi(t)\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle \approx |\Psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I |\Psi(0)\rangle dt$$

$$|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i$$

Adesso dobbiamo introdurre i campi Elettrici nella precedente equazione

Polarizzazione

$$\vec{E}_p = A_p \vec{e}_p e^{-i\omega_p t + i\vec{k}_p \vec{r}} + c.c.$$

Radiazione di pompa classica

Ampiezza complessa in generale dipendente da t e da r

$$\begin{cases} \hat{E}_s = i\vec{e}_s \sqrt{\dfrac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_o V}}\, \hat{a}_s e^{-i\omega_s t + i\vec{k}_s \vec{r}} - i\vec{e}_s \sqrt{\dfrac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_o V}}\, \hat{a}_s^+ e^{+i\omega_s t - i\vec{k}_s \vec{r}} \\ \hat{E}_i = i\vec{e}_i \sqrt{\dfrac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_o V}}\, \hat{a}_i e^{-i\omega_i t + i\vec{k}_i \vec{r}} - i\vec{e}_i \sqrt{\dfrac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_o V}}\, \hat{a}_i^+ e^{+i\omega_i t - i\vec{k}_i \vec{r}} \end{cases}$$

Campi quantizzati per il signal e l'idler

Per non appesantire la notazione ho scritto i campi quantistici a singolo modo ma in realtà dobbiamo sommare su tutti i modi.

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_I|\Psi(0)\rangle dt = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\int d^3r\,\frac{1}{2}\varepsilon_o\chi^{(2)}_{i,j,l}E_iE_jE_k|0\rangle_s|0\rangle_i \approx$$

$$\approx\left(-\frac{i}{\hbar}\eta\; a^+_{\vec{k}_s}a^+_{\vec{k}_i} + h.c.\right)|0\rangle_s|0\rangle_i = -\frac{i}{\hbar}\eta|1\rangle_s|1\rangle_i$$

Ogni E è la somma di 3 campi (E_p, E_s, E_i) e per ogni scelta di una terna di k otteniamo un termine esponenziale del tipo:

$$e^{i\left(\pm\omega_\alpha\pm\omega_\beta\pm\omega_\gamma\right)t}\,e^{i\left(\mp\vec{k}_\alpha\mp\vec{k}_\beta\mp\vec{k}_\gamma\right)\vec{r}}$$

L'integrale sul tempo cancella tutti i casi in cui non si conserva l'energia.

L'integrale sullo spazio cancella tutti i casi in cui non si conserva l'impulso

$$\begin{cases}\omega_i+\omega_s=\omega_p\\ \vec{k}_s+\vec{k}_i=\vec{k}_p\end{cases}$$

Quindi ci siamo convinti che un cristallo non-lineare può fare al caso nostro

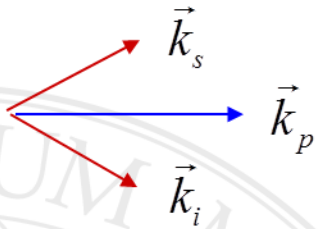
Conservazione dell'impulso

Phase matching

Conservazione impulso parallelo (alla pompa)

$$\vec{k}_s + \vec{k}_i = \vec{k}_p \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k_{i\parallel} + k_{s\parallel} = k_p \\ k_{s\perp} + k_{i\perp} = 0 \end{cases} \qquad \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c} n$$

Conservazione impulso trasverso



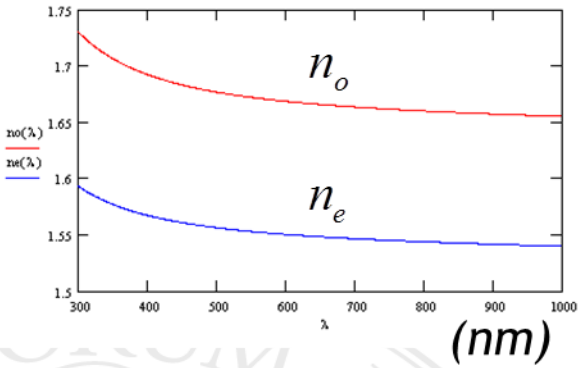
Esempio: consideriamo un caso degenere (signal ed idler con la stessa energia). Risulta ovviamente $\theta_s = \theta_i$ e otteniamo:

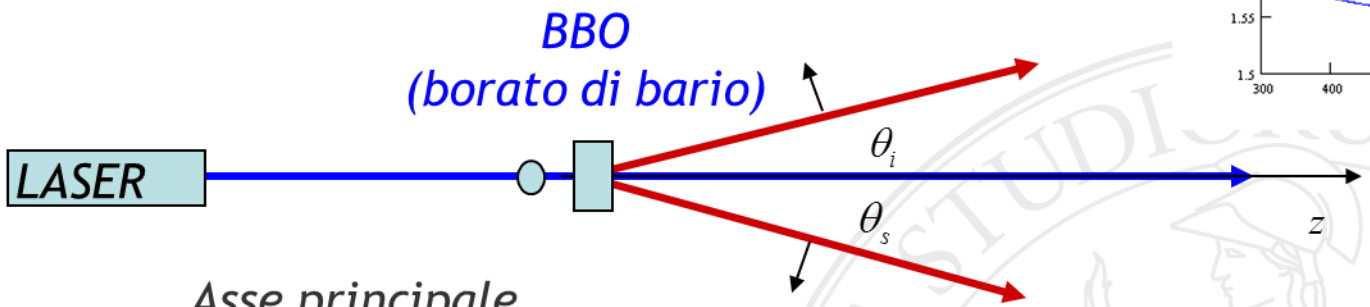
$$n(\lambda_p) = n(\lambda_s) \cdot \cos(\theta_s)$$

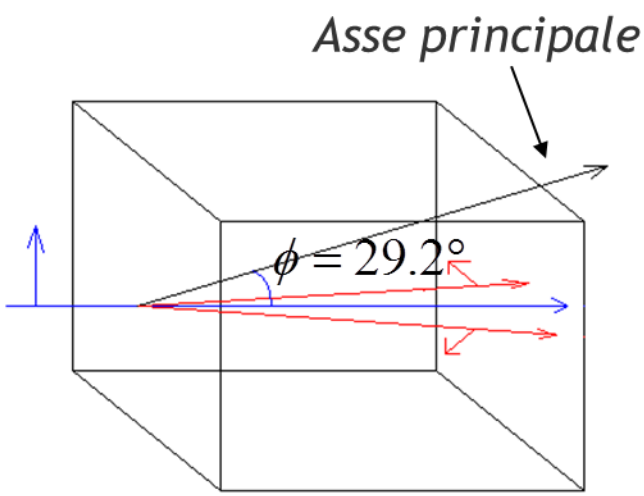
Se il mezzo usato per generare i due fotoni è isotropo la condizione di phase matching non può essere mai verificata perchè l'indice di rifrazione diminuisce all'aumentare di λ

Phase-matching con cristalli birifrangenti

$$\begin{cases} \Delta k_{\parallel} = \dfrac{\omega_p}{c} n_e(\phi, \omega_p) - \dfrac{\omega_s}{c} n_o(\omega_s)\cos(\theta_s) - \dfrac{\omega_i}{c} n_o(\omega_i)\cos(\theta_i) = 0 \\ \Delta k_{\perp} = \dfrac{\omega_s}{c} n_o(\omega_s)\sin(\theta_s) - \dfrac{\omega_i}{c} n_o(\omega_i)\sin(\theta_i) = 0 \end{cases}$$



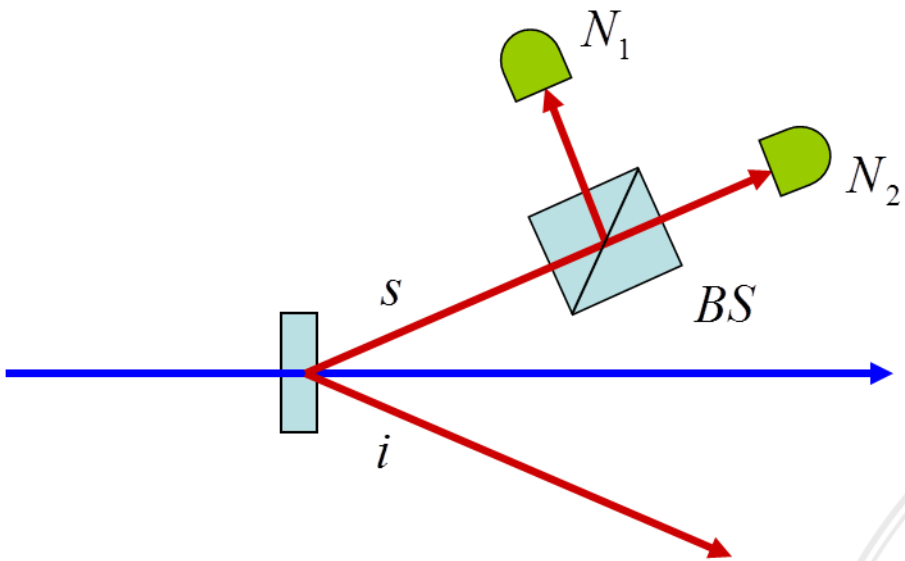




$$\frac{1}{n_e(\phi, \omega_p)^2} = \frac{\sin(\phi)^2}{n_e^2(\omega_p)} + \frac{\cos(\phi)^2}{n_o^2(\omega_p)}$$

Se la pompa è straordinaria e il signal e l'idler ordinari è possibile (con un cristallo opportuno) trovare un angolo ϕ che soddisfa la condizione di phase matching

$g^{(2)}$ nel caso di 2 soli rivelatori



La probabilità di generazione di una coppia non dipende dal tempo = se vado a vedere la funzione di distribuzione dei conteggi di un solo ramo ottengo una Poissoniana

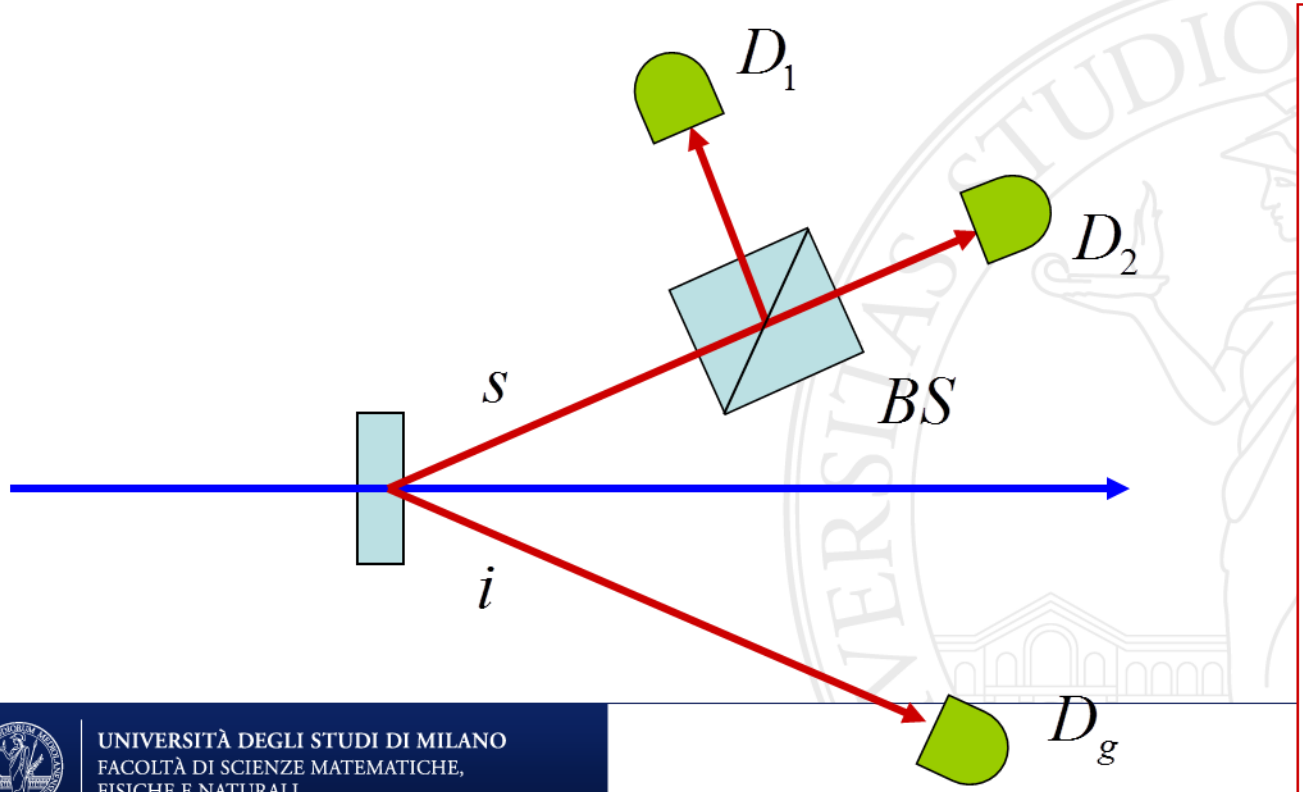
$$g^{(2)}(0) = \frac{N_{12}}{\Delta\tau_c N_1 N_2}$$

I conteggi N1 e N2 sono scorrelati quindi:

$$N_{12} = \Delta\tau_c N_1 N_2$$

Determinazione della $g^{(2)}$ nel caso di coppie di fotoni generati via PDC

$$g^{(2)}(0) \overset{df}{=} \frac{\Delta p_c}{\Delta p_1 \Delta p_2} \longrightarrow g^{(2)}(0) \overset{PDC}{=} \frac{P_{12g}}{P_{1g} P_{2g}} = \frac{N_{12g} N_g}{N_{1g} N_{2g}}$$



$$P_{1g} = \frac{N_{1g}}{N_g}$$

$$P_{2g} = \frac{N_{2g}}{N_g}$$

$$P_{12g} = \frac{N_{12g}}{N_g}$$

Condizione per ottenere la $g^{(2)}<1$

I conteggi tripli saranno solo di tipo accidentale:

$$N_{12g} = N_{1g}P_2^{'} + N_{2g}P_1^{'} = N_{1g}\left(\Delta\tau_c N_2\right) + N_{2g}\left(\Delta\tau_c N_1\right)$$

$$N_{1g} = N_{veri} + N_{accidentali} = QE_g N_1 + \Delta\tau_c N_1 N_g$$

Mi devo mettere nella condizione in cui:

$$QE_1 N_g >> \Delta\tau_c N_1 N_g \quad \Rightarrow \quad N_1 << \frac{QE_1}{\Delta\tau_c}$$

Stesso discorso per gli N_{2g}

Perché voglio selezionare le coppie generate per PDC

$$g^{(2)}(0)=\frac{N_{12g}N_g}{N_{1g}N_{2g}}=\frac{\{QE_1N_g(\Delta\tau_c N_2)+QE_2N_g(\Delta\tau_c N_1)\}N_g}{QE_1N_g\cdot QE_2N_g}=$$

$$=\Delta\tau_c\left(\frac{N_1}{QE_1}+\frac{N_2}{QE_2}\right)$$

Verificata la precedente disuguaglianza otteniamo una $g^{(2)}<1$

Appendice: generazione di stati coerenti attraverso una corrente oscillante

Dobbiamo considerare il pezzo di Lagrangiana di interazione tra elettorni e fotoni, quindi:

$$\mathcal{L}_{int} = -q\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi = -J^{\mu}A_{\mu} \quad \text{dove} \quad J^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

che rappresenta una corrente oscillante ad una frequenza ω

Quindi l'Hamiltoniana di interazione è: $H_{int} = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x\, J^{\mu}A_{\mu}$

Nella gauge di Coulomb la parte temporale di A è nulla e quindi scrivo:

$$H_{int} = -\int d^3x\, \vec{J}(t,x)\vec{A}(t,x)$$

E per piccole evoluzioni temporali nella rappresentazione di interazione posso scrivere:

$$U(t+\delta t, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{int}(t)\delta t}$$

Adesso dobbiamo dimostrare che nel caso di una corrente oscillante questo operatore si può scrivere come un operatore di displacement. E poi andremo a fare una produttoria di operatori di displacement messi in normal ordering per trovare l'operatore su tempi lunghi.

Quindi dobbiamo scrivere la densità di corrente e il potenziale vettore. Mi limito al singolo modo a frequenza ω

$$\vec{A} = \hat{e}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a(t)e^{ikx} + a^{+}e^{-ikx}\right) \quad \text{dove} \quad k = \omega/c \quad (\text{fotone})$$

$$\vec{J} = \vec{J}_0\, e^{-i\omega t + ik_e x} + \vec{J}_0^{*}\, e^{+i\omega t - ik_e x} \quad \text{dove} \quad k_e \left[p^2 = m^2\right] \quad (\text{elettrone})$$

Quindi i pezzi che rimangono (dopo l'intergrazione) sono quelli con gli esponenziali più piccoli:

$$\vec{J}(t,x)\vec{A}(t,x) \simeq \mu^{*}(t)\, a(t)\, e^{i(k-k_e)x} + \mu(t)\, a^{+}(t)\, e^{-i(k-k_e)x}$$

$$\text{dove} \quad \mu(t) = \vec{J}_0 \cdot \hat{e}\, e^{-i\omega t}\left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Adesso integro e trovo l'Hamiltoniana di interazione:

$$H_{int} = \int d^3x \; \mu^* a \, e^{i(k-k_e)x} + \mu a^\dagger e^{-i(k-k_e)x} =$$

$$= -i\hbar \tilde{\mu}^* a + i\hbar \tilde{\mu} a^\dagger$$

dove ho inglobato il risultato dell'integrale in u tilde.

Che ovviamente deve essere un operatore Hermitiano

Quindi per tempi piccoli si ottiene il seguente operatore di evoluzione temporale:

$$U(t+\delta t, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(-i\hbar\tilde{\mu}^* a + i\hbar\tilde{\mu} a^\dagger\right)\delta t} = e^{+\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$

dove $\alpha \overset{df}{=} \tilde{\mu}\delta t$

Per evoluzioni temporali generiche:

$$U(\Delta t, 0) = T \prod_{i=0}^{N} U(t_i + \delta t, t_i) = T \prod_{i=0}^{+\infty} e^{\alpha(t_i) a^\dagger - \alpha^*(t_i) a} =$$

$t_i \overset{df}{=} i\,\delta t$ time ordering

Consideriamo due termini successivi della produttoria:

$$e^{\alpha(t_{i+1})a^{+} - \alpha^{*}(t_{i+1})a} \; e^{\alpha(t_i)a^{+} - \alpha^{*}(t_i)a} = \hat{D}(\alpha(t_{i+1}))\hat{D}(\alpha(t_i))$$

Usando il teorema di disentangling si ottiene subito:

$$= \hat{D}\left(\alpha(t_{i+1}) + \alpha(t_i)\right) e^{+i\,\mathrm{Im}\left(\alpha^{*}(t_{i+1})\alpha(t_i)\right)}$$

Applicando iterativamente questa regola si ottiene:

$$\boxed{U(t,0) = \hat{D}\left(\sum \alpha\right) e^{i\Omega}}$$

Dove D è l'operatore di displacement e Omega rappresenta un fattore di fase complessivo irrilevante