UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Esperimenti con la PDC

Interferenza a singolo fotone

Simone Cialdi

Outline

Analisi delle prime misure sulla PDC

Fotoconteggio quantistico

Proprietà spaziali e spettrali della PDC

- Correlazioni spaziali
- Correlazioni temporali

Esperimenti con la PDC

- HOM (interferometro di Hong-Ou-Mandel)
- Interferenza a singolo fotone

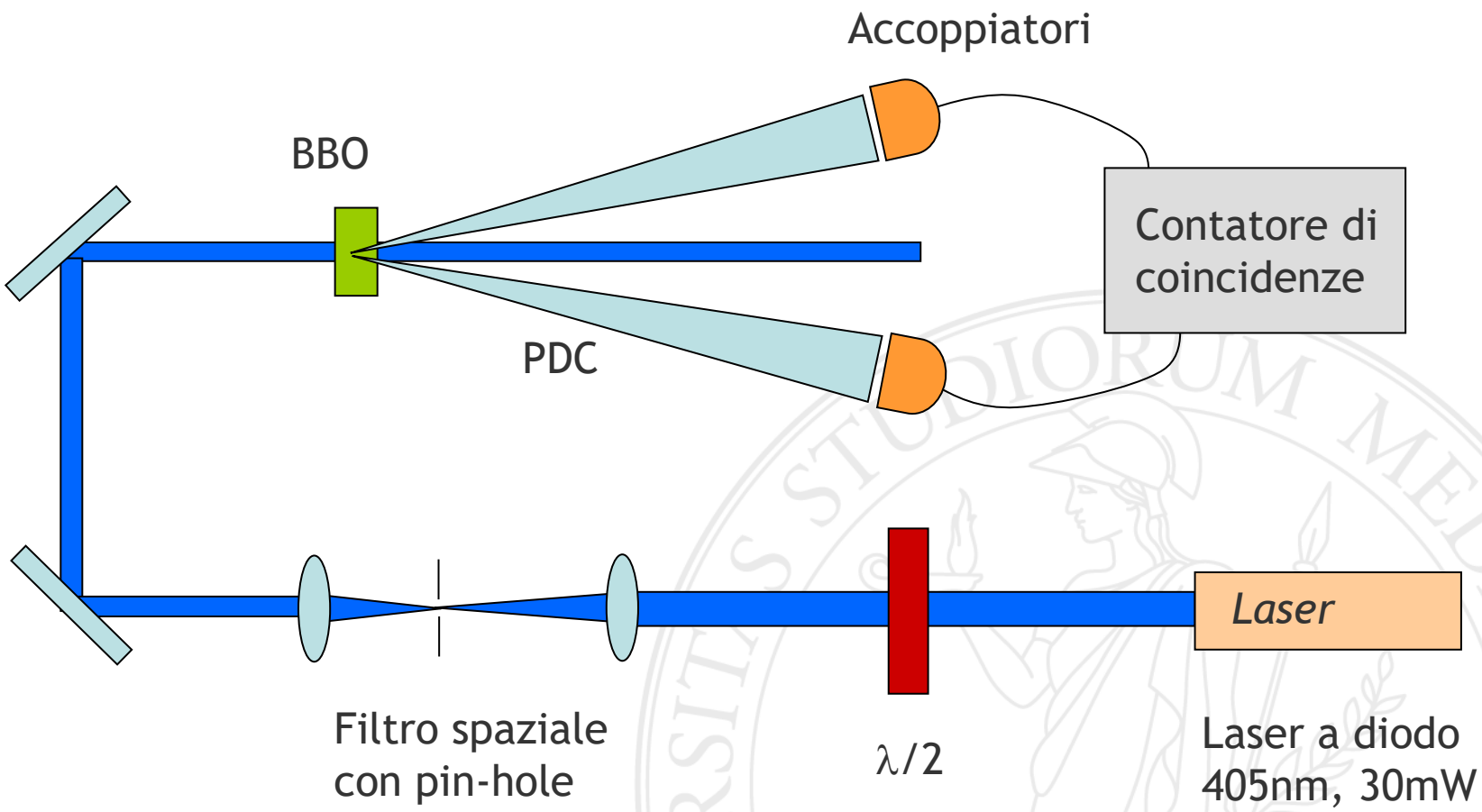
Appendice: propagazione in mezzi anisotropi

Analisi delle misure sulla PDC

Il fine che ci poniamo è quello di generare radiazione non classica (coppie di singoli fotoni) per Parametric Down Conversion. Per dimostrare che si tratta di radiazione non classica stimiamo il valore della $g^{(2)}$

1. *E' necessario conoscere lo schema del sistema ottico. In particolare il ruolo della lamina $\lambda/2$, la procedura per trovare il phase-matching e la procedura per l'allineamento a "freddo".*
2. *Si verifica che i conteggi in contemporanea sono caratterizzati da una componente lineare (conteggi «veri»: relativi alla stessa coppia) rispetto a Ng e una quadratica (conteggi accidentali: relativi a coppie diverse).*
3. *Usando 3 rivelatori si determina il valore della $g^{(2)}$ nel caso di coppie prodotte per PDC e nel caso di conteggi scorrelati (questo dopo aver verificato che nel caso di g2 a due rivelatori otteniamo 1)*

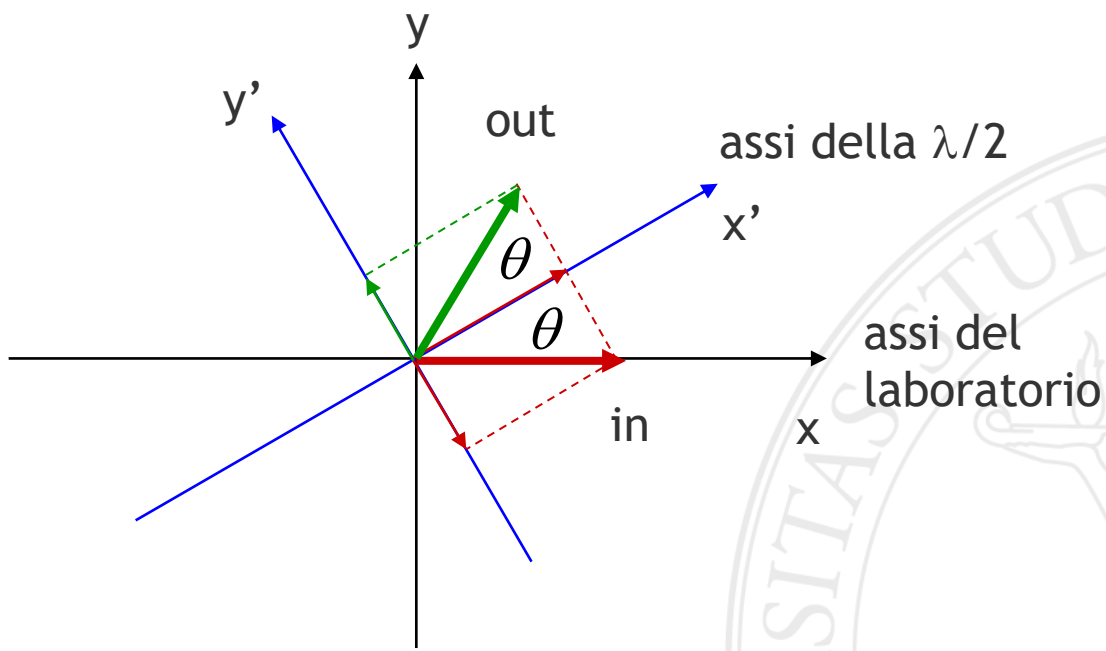
Schema del sistema per la generazione di coppie via PDC



Lamina $\lambda/2$

E' una lamina birifrangente di spessore tale da inserire uno sfasamento di π (alla lunghezza d'onda di lavoro) tra la componente x' e la componente y' (nel suo sistema di assi) del campo elettrico.

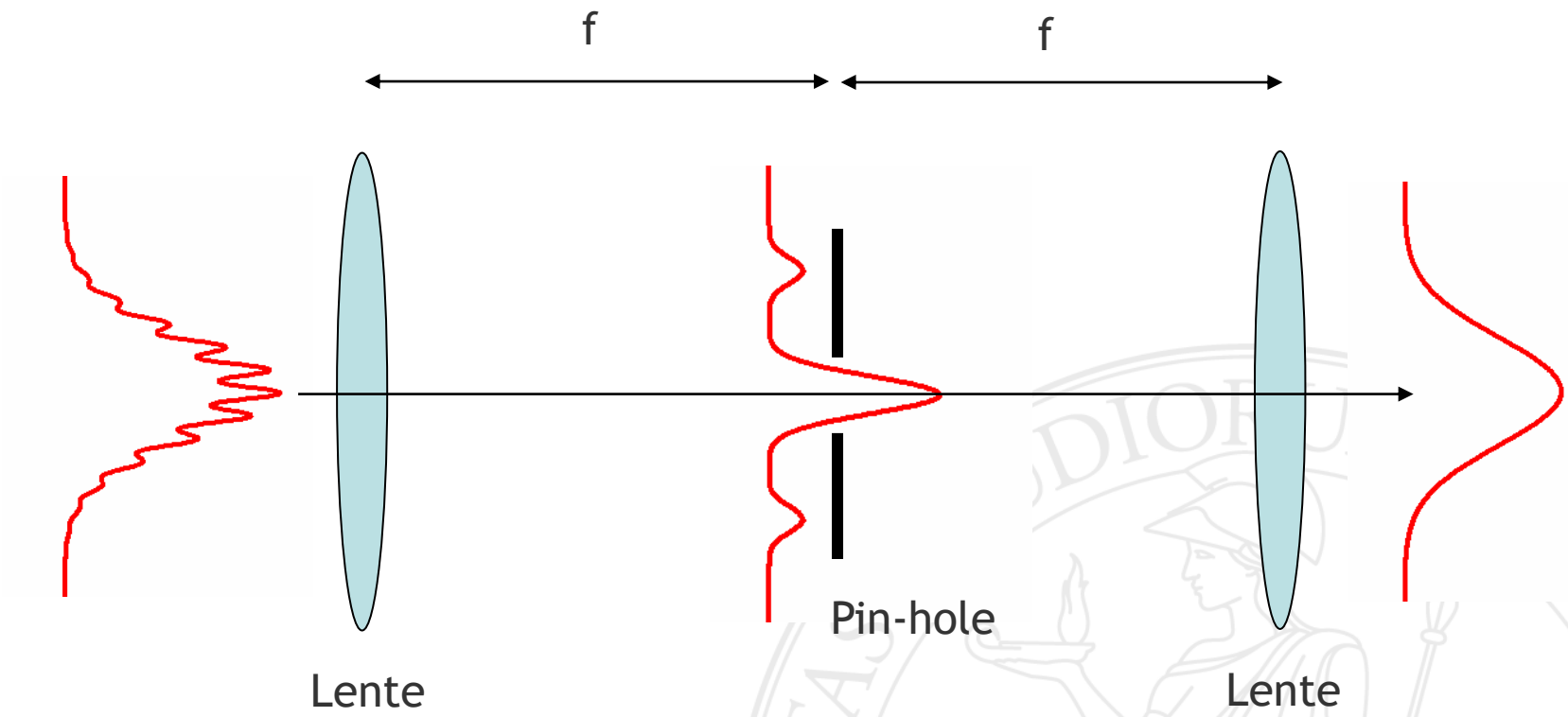
Questo elemento ottico permette di ruotare a piacere una polarizzazione lineare.



$$e^{i\pi} = -1$$

Il laser produce una polarizzazione lineare con una direzione "incognita". Per mezzo della $\lambda/2$ è possibile ruotare la polarizzazione nella direzione verticale (perpendicolare al tavolo) per poi ottenere la generazione della PDC

Filtro spaziale con pin-hole

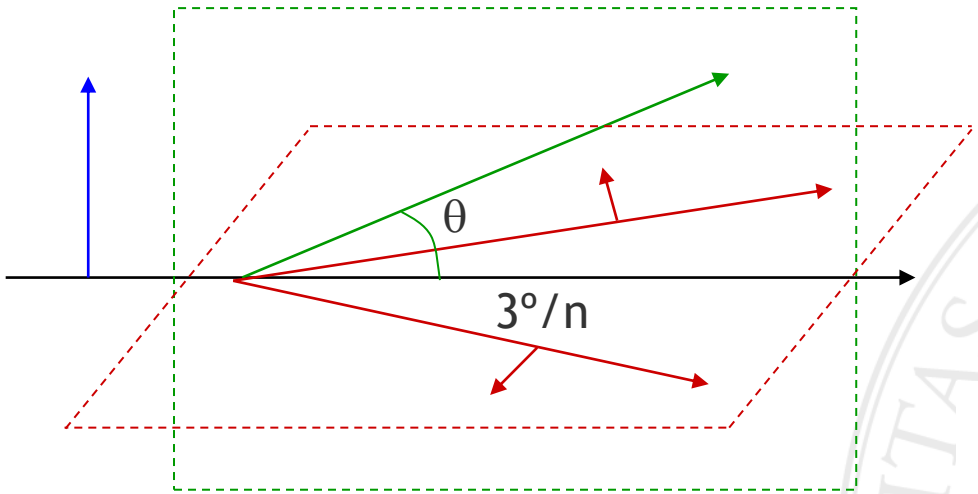


La prima lente produce alla sua distanza focale la trasformata di Fourier dell'ingresso. Le componenti di rumore ad alta frequenza vengono eliminate dal pin-hole. La seconda lente esegue l'anti-trasformata di Fourier. Si ottiene così un profilo gaussiano pulito.

Condizione di phase-matching

Voglio generare PDC con un angolo di 3° rispetto all'asse della pompa. Devo trovare l'angolo θ tra l'asse principale del BBO e il vettore d'onda della pompa in modo da ottenere la condizione di phase-matching (conservazione dell'impulso):

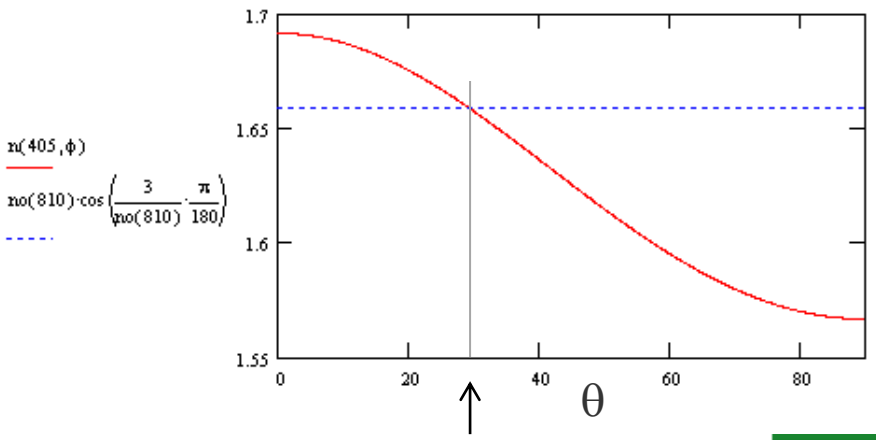
$$k_p^e(\lambda_p,\theta) = k_s^o(\lambda_{PDC})\cos\left(\frac{3°}{n_{PDC}^o}\right) + k_i^o(\lambda_{PDC})\cos\left(\frac{3°}{n_{PDC}^o}\right)$$



generazione degenere

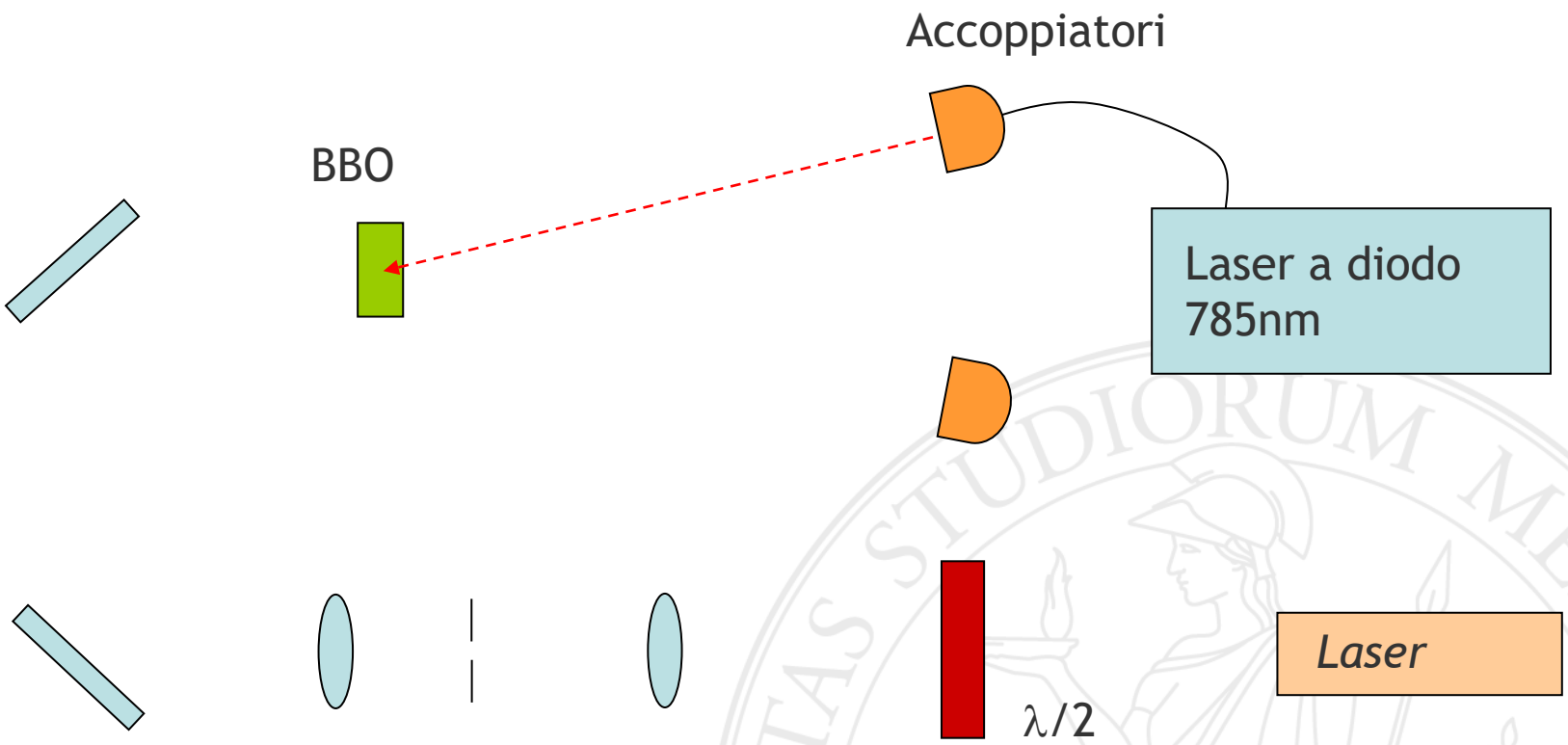
$$n^e\,(\lambda_p,\theta) = n^o\,(\lambda_{PDC})\cos\left(\frac{3°}{n_{PDC}^o}\right)$$

$$\frac{1}{n^e(\lambda,\theta)^2} = \frac{\sin(\theta)^2}{n^e(\lambda)^2} + \frac{\cos(\theta)^2}{n^o(\lambda)^2}$$



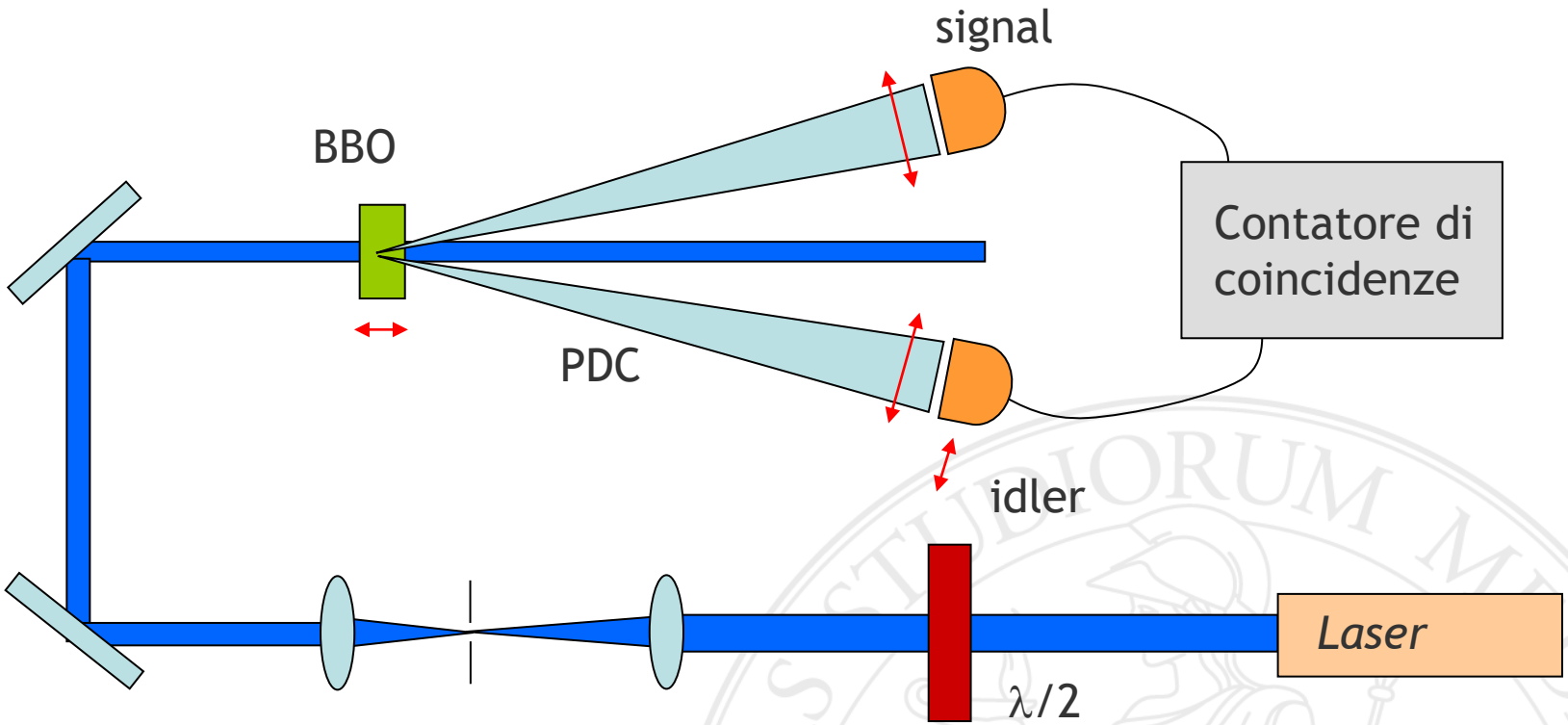
Angolo di phase-matching

Procedura di allineamento con il laser spento



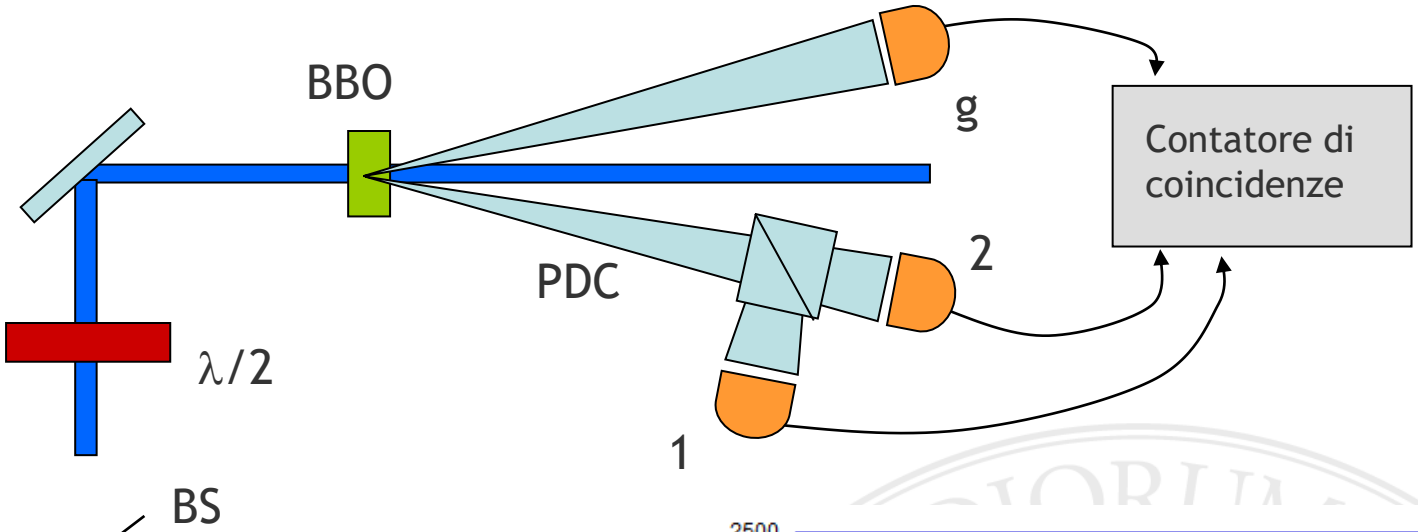
Si allineano gli accoppiatori con un laser a diodo 785nm. Per mezzo di un puntatore si fa in modo che il fascio si sovrapponga al percorso che dovrà compiere la PDC

Procedura di allineamento con il laser acceso



Per trovare il giusto orientamento del cristallo si ruota la vite micrometrica V del montaggio del cristallo fino a massimizzare i conteggi. Se i conteggi sul signal e sull'idler non raggiungono il massimo insieme allora si massimizza solo sul signal e poi si recupera l'idler spostando trasversalmente alla PDC l'accoppiatore dell'idler

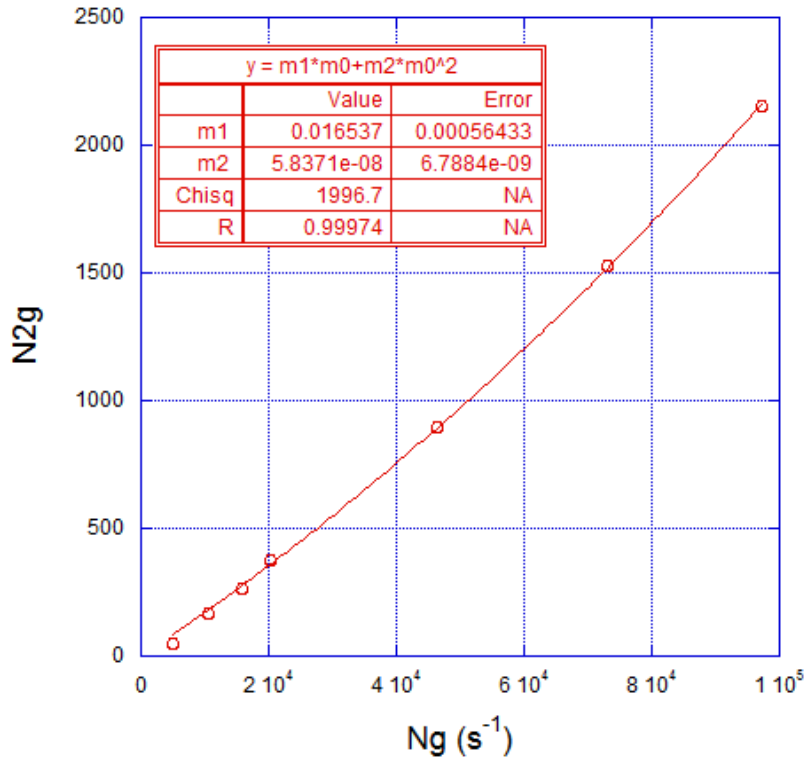
Conteggi in contemporanea vs conteggi diretti (Dati 2016)



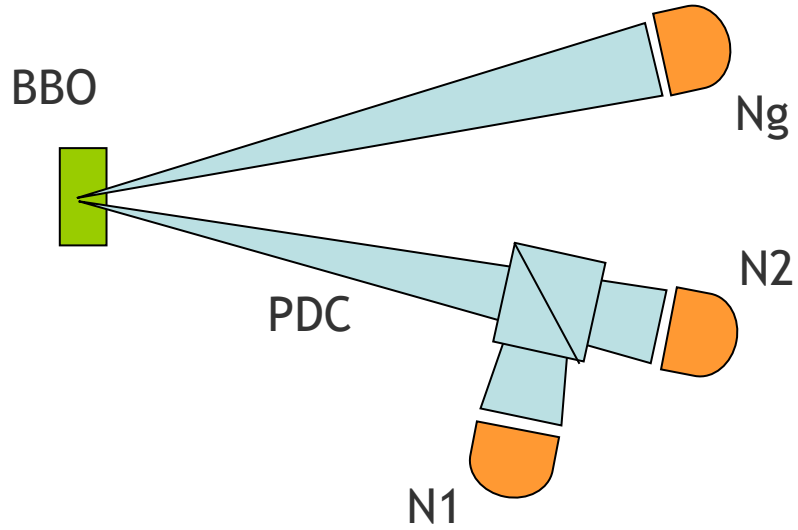
$$N_{2g} = \frac{1}{2} Q E_2 N_g + \Delta\tau_c N_2 N_g$$

$$N_2 = \alpha N_g$$

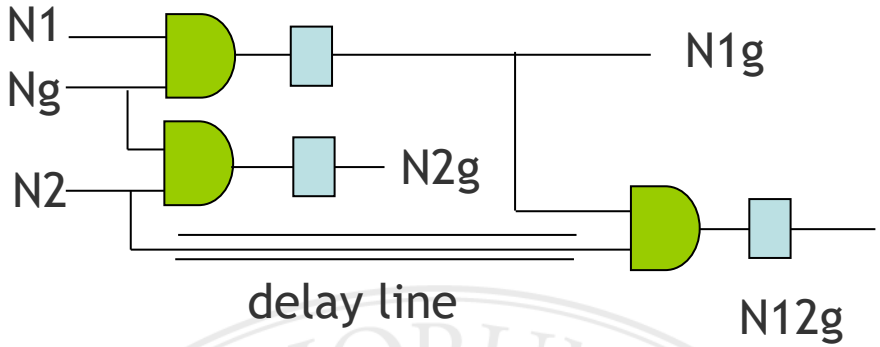
$$N_{2g} = \frac{1}{2} Q E_2 N_g + \Delta\tau_c \alpha N_g^2$$



Procedura per la determinazione della $g^{(2)}$ con 3 rivelatori



Schema del contatore



1) *Per mezzo della g2 a due rivelatori si verifica che i conteggi N1 e N2 sono scorrelati*

2) *Si invia il laser a diodo (scorrelato rispetto alla PDC) su g e si determina la g2 a tre rivelatori (in questo modo si ottiene il coefficiente di normalizzazione)*

$$g^{(2)} = \frac{N_{12g} N_g}{N_{1g} N_{2g}} = \frac{\Delta\tau_{12g} N_2 \Delta\tau_{1g} N_1 N_g N_g}{\Delta\tau_{1g} N_1 N_g \Delta\tau_{2g} N_2 N_g} = \frac{\Delta\tau_{12g}}{\Delta\tau_{2g}} = \frac{1}{\gamma}$$

3) *Si determina la g2 per la PDC e si confronta con il modello teorico:*

$$N_{1g} = \frac{1}{2} QE_1 N_g = QE_{1tot} N_g \qquad N_{2g} = \frac{1}{2} QE_2 N_g = QE_{2tot} N_g$$

$$N_{12g} = \left(Q_{1tot} N_g\right) \Delta\tau_{12g} N_2 + \left(Q_{2tot} N_g\right) \Delta\tau_{1g} N_1 = \gamma_1 N_g^2 + \gamma_2 N_g^2$$

Veri tra 1 e g ed accidentali sul 2

Veri tra 2 e g ed accidentali sul 1

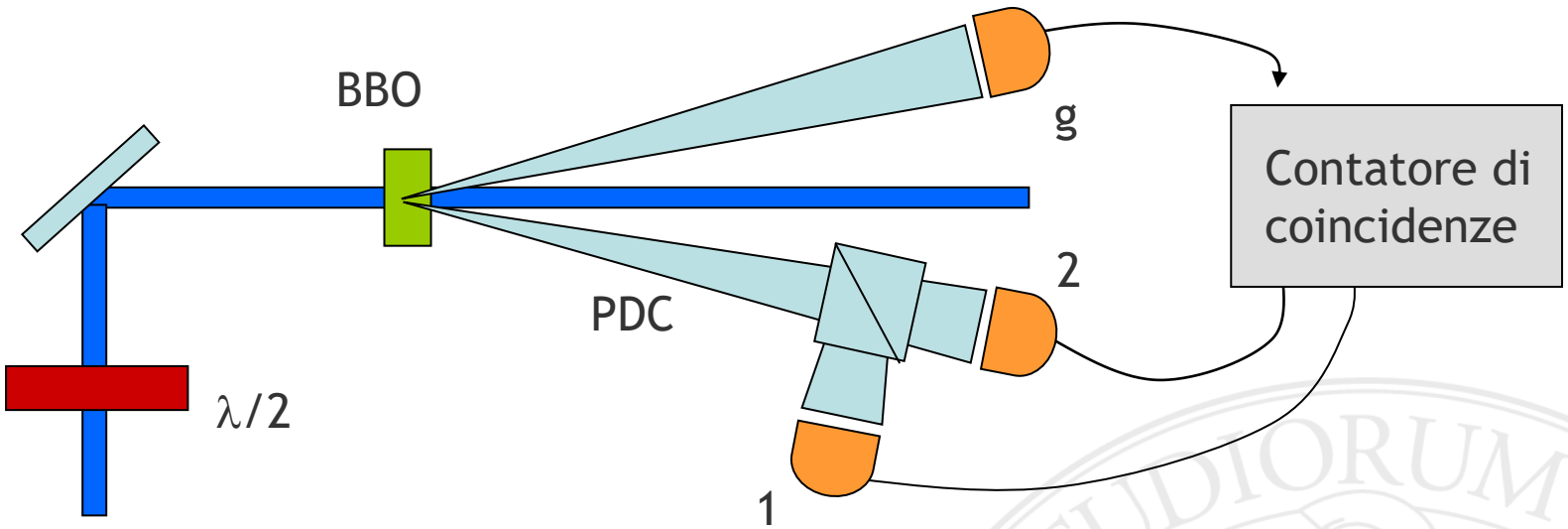
$$g^{(2)} = \gamma \frac{N_{12g} N_g}{N_{1g} N_{2g}} = \gamma \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{QE_{1tot} QE_{2tot}} N_g = \Gamma N_g$$

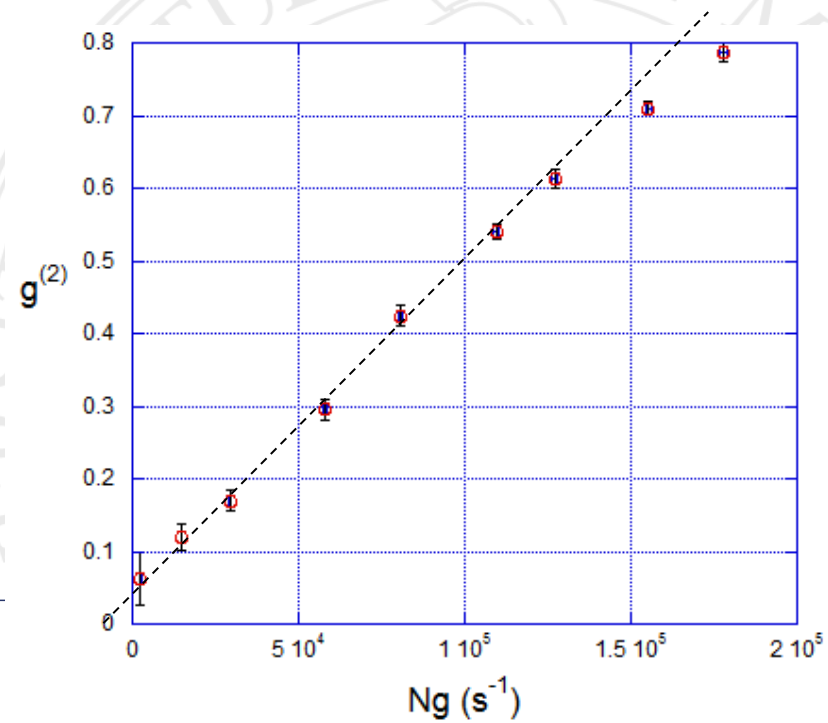
Lineare rispetto a Ng

Nota: per trovare $\gamma 1$ e $\gamma 2$ si invia il laser a diodo rispettivamente sul canale 2 e sul canale 1 (facendo attenzione che i conteggi siano quelli che si ottengono con la PDC).

Nota2: l'errore su Γ è dovuto principalmente all'errore su $\gamma 1$ e $\gamma 2$.

$g^{(2)}$ con 3 rivelatori





Simulazione g2 a tre rivelatori

g2 a tre rivelatori

$D1 := 700 \qquad D2 := 700 \qquad Dg := 700$

$\alpha := 0.3 \qquad \beta := 0.3$

$QE1 := 0.01 \qquad QE2 := 0.01 \qquad \Delta\tau := 90 \cdot 10^{-9} \qquad \Delta\tau 12g := 250 \cdot 10^{-9} \qquad \gamma := \frac{\Delta\tau 12g}{\Delta\tau} = 2.778$

$N1(Ngtot) := \alpha \cdot (Ngtot - Dg) \qquad N2(Ngtot) := \beta \cdot (Ngtot - Dg)$

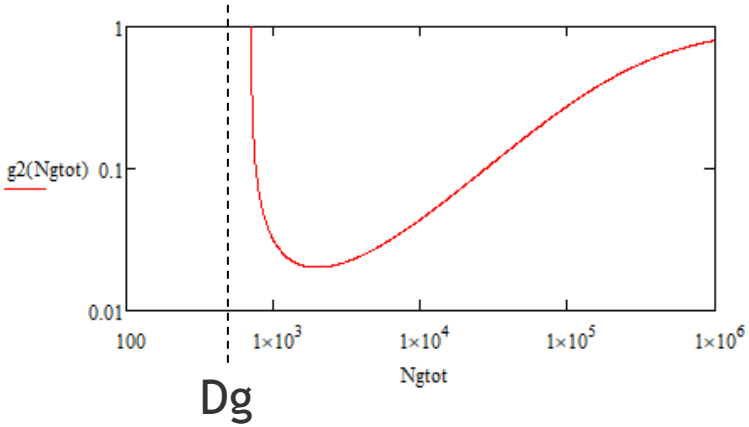
$N1tot(Ngtot) := D1 + N1(Ngtot) \qquad N2tot(Ngtot) := D2 + N2(Ngtot) \qquad Ng(Ngtot) := Ngtot - Dg$

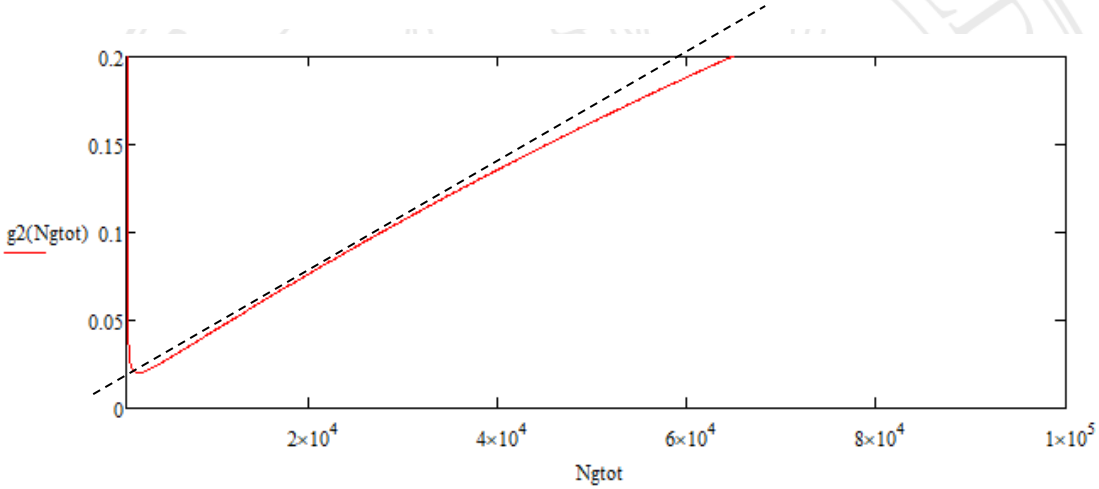
$N1g(Ngtot) := QE1 \cdot Ng(Ngtot) + \Delta\tau \cdot N1tot(Ngtot) \cdot Ngtot$

$N2g(Ngtot) := QE2 \cdot Ng(Ngtot) + \Delta\tau \cdot N2tot(Ngtot) \cdot Ngtot$

$N12g(Ngtot) := (QE1 \cdot Ng(Ngtot)) \cdot \Delta\tau 12g \cdot N2tot(Ngtot) + (QE2 \cdot Ng(Ngtot)) \cdot \Delta\tau \cdot N1tot(Ngtot) + \Delta\tau \cdot \Delta\tau 12g \cdot N1tot(Ngtot) \cdot N2tot(Ngtot) \cdot Ngtot$

$$g2(Ngtot) := \frac{N12g(Ngtot) \cdot Ngtot}{N1g(Ngtot) \cdot N2g(Ngtot)} \cdot \frac{1}{\gamma}$$





Fotoconteggio quantistico

Affrontiamo il problema relativo alla determinazione della probabilità di avere un fotoconteggio con un formalismo completamente quantistico (sarà utile nel seguito in particolare per studiare l'interferenza a singolo fotone)

Hamiltoniana di interazione:

$$H_I = -\mu \cdot E$$

Osservabile campo elettrico:

$$E(r,t) = i \sum_{k,s} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_o V}}\, \hat{e}_{k,s} \left[a_{k,s}(t) e^{ik\cdot r} - a^{+}_{k,s}(t) e^{-ik\cdot r} \right]$$

La probabilità di transizione deve essere valutata tra i seguenti stati quantistici:

Stato finale

$$|F\rangle = |f\rangle_{radiazione} |e\rangle_{rivelatore}$$

Stato iniziale

$$|I\rangle = |i\rangle_{radiazione} |g\rangle_{rivelatore}$$

Dunque la probabilità di transizione, considerando il caso in cui la radiazione viene assorbita dal rivelatore, è:

$$\frac{dP}{dt} \propto \left|\langle e|\mu|g\rangle\langle f|E^{(+)}|i\rangle\right|^2 \propto \left|\langle f|E^{(+)}|i\rangle\right|^2$$

dove: $$E^{(+)}(r,t) = i\sum_{k,s}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_o V}}\hat{e}_{k,s}a_{k,s}(t)e^{ik\cdot r}$$

Inoltre non mi interessa lo stato finale della radiazione. Posso sommare su tutti gli stati finali della radiazione (anche quelli non accessibili)

$$\frac{dP}{dt} \propto \sum_f \left|\langle f|E^{(+)}|i\rangle\right|^2 = \sum_f \langle i|E^{(-)}|f\rangle\langle f|E^{(+)}|i\rangle = \langle i|E^{(-)}E^{(+)}|i\rangle$$

Dove ho usato la proprietà da completezza

Abbiamo così ricavato lo stesso risultato che avevamo ottenuto con la teoria semiclassica:

Semiclassica: $$dP = \eta\, I\, dt$$

Quantistica: $$dP = \eta \left\langle \hat{I} \right\rangle dt \qquad \hat{I} = E^{(-)} E^{(+)}$$

Nel caso di uno stato non puro si deve scrivere:

$$\left\langle \hat{I} \right\rangle = Tr\left[\hat{\rho}\, E^{(-)} E^{(+)}\right]$$

Da notare inoltre che se considero due rivelatori e rifaccio il calcolo per determinare la probabilità di conteggi in contemporanea mi ritrovo automaticamente con con gli operatori di campo disposti in normal ordering:

$$\frac{dP}{dt} \propto \left\langle i_1 \middle| \left\langle i_2 \middle| E_1^{(-)} E_2^{(-)} E_2^{(+)} E_1^{(+)} \middle| i_1 \right\rangle \middle| i_2 \right\rangle$$

Proprietà spaziali e spettrali della PDC

Riscrivo la soluzione trovata per la PDC nella precedente lezione con l'approssimazione al primo ordine.

$$|\Psi(t)\rangle \approx -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_I|\Psi(0)\rangle dt = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt \int d^3r \frac{1}{2}\varepsilon_o \chi^{(2)}_{i,j,k} E_i E_j E_k |0\rangle_s |0\rangle_i$$

L'integrale spaziale è fatto all'interno del cristallo dove avviene l'interazione non lineare

Ogni componente E è data dalla somma di 3 contributi: signal, idler e pump

Per conservare l'energia e l'impulso so già che devo prendere i termini $E^{(+)}$ per la pompa (classica) e quelli $E^{(-)}$ per il signal e l'idler (quantistici).

$$\vec{E}_p^{(+)} = \underline{A_p(x,y)}\vec{e}_p e^{-i\omega_p t + i\vec{k}_p\vec{r}}$$

Al momento considero la pompa monocromatica. Però ne metto in evidenza l'ampiezza spaziale complessa

$$\begin{cases} \hat{E}_s^{(-)} \propto \vec{e}_s \int d^3k_s\, \hat{a}_s^+ e^{+i\omega(\vec{k}_s)t - i\vec{k}_s\vec{r}} \\ \hat{E}_i^{(-)} \propto \vec{e}_i \int d^3k_i\, \hat{a}_i^+ e^{+i\omega(\vec{k}_i)t - i\vec{k}_i\vec{r}} \end{cases}$$

Ho sostituito alla somma discreta quella continua e ho preso solo i termini con l'operatore di creazione

Quindi mi ritrovo con l'integrale in dt, quello in d^3r e gli integrali in d^3k su signal e idler.

Partiamo dall'integrale in dt: se consideriamo il laser di pompa monocromatico vuol dire che è caratterizzato da una potenza costante nel tempo. Quindi non abbiamo un riferimento temporale. Dunque il laser attraversa il cristallo per un tempo che è definito dal tempo di osservazione. Questo tempo sarà in generale molto più grande del tempo di attraversamento del cristallo (ps) e dunque possiamo sempre imporre la conservazione dell'energia (che si ottiene per un integrale su un tempo infinito):

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i$$

Passiamo all'integrale in d^3r: poiché i rivelatori sono messi sul piano xz trascuriamo la coordinata y (esercizio: non trascurare la parte in y). Inoltre consideriamo fattorizzabile l'ampiezza complessa della pompa (ad esempio pensiamo ad un profilo di pompa gaussiano). Se considero solo la parte con l'integrale spaziale ottengo:

$$\int dxdzA_p(x)e^{i\Delta k_\parallel z}e^{i\Delta k_\perp x} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dze^{i\Delta k_\parallel z}\int dxA_p(x)e^{i\Delta k_\perp x} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta k_\parallel L\right)}{\frac{1}{2}\Delta k_\parallel L} L\,\tilde{F}_{\Delta k_\perp}\left(A_p(x)\right)$$

Con queste definizioni:

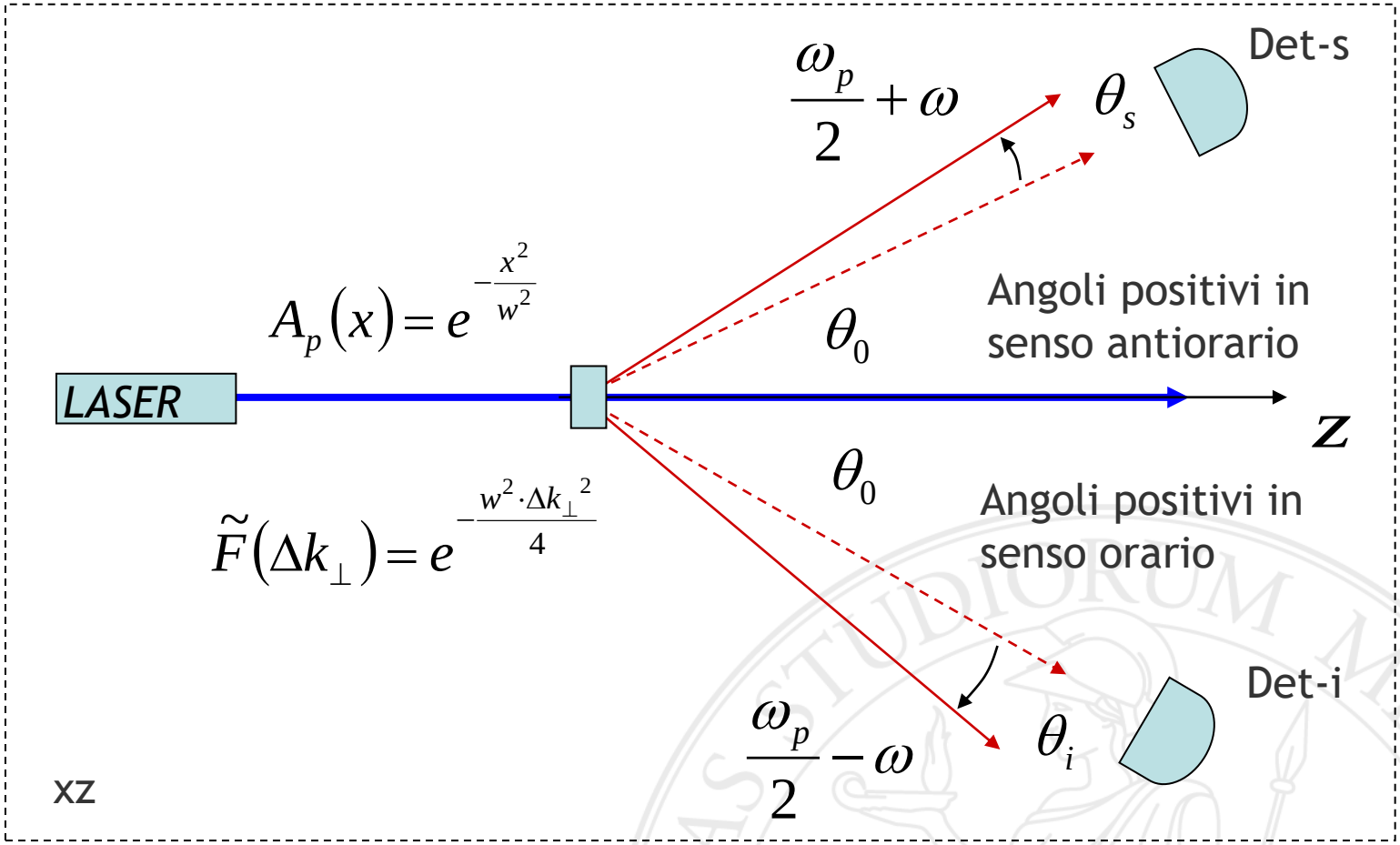
$$\Delta k_{||} = \Delta k_z = k_p - k_{s,z} - k_{i,z}$$

$$\Delta k_{\perp} = \Delta k_x = k_{s,x} + k_{i,x}$$

Le due funzioni trovate (la sinc e la trasformata dell'ampiezza della pompa esprimono la relazione di indeterminazione tra posizione e impulso). Ovvero, più il cristallo è lungo e più l'impulso longitudinale è definito, più la pompa è larga e più è definito l'impulso trasverso. In particolare se l'ampiezza della pompa è gaussiana troviamo:

$$A_p(x) = e^{-\frac{x^2}{w^2}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{F}(\Delta k_{\perp}) = e^{-\frac{w^2 \cdot \Delta k_{\perp}^2}{4}}$$

Una volta scritti gli integrali nel tempo e nello spazio conviene ridefinire le variabili rimaste nel seguente modo:



Dove quindi ω è lo shift in frequenza rispetto alla frequenza di phase matching e θ_s e θ_i sono gli shift angolari rispetto agli angoli di phase matching (θ_0). Quindi con queste nuove variabili lo stato diventa:

$$|\Psi\rangle_{PDC} \propto \int d\omega\, d\theta_s\, d\theta_i\, Sinc\left(\frac{1}{2}\Delta k_{||}L\right)\tilde{F}(\Delta k_\perp)|1,\omega,\theta_s\rangle_s|1,-\omega,\theta_i\rangle_i$$

Riscrivo i Δk con le nuove notazioni:

$$\begin{cases} \Delta k_{\parallel} = \dfrac{\omega_p}{c} n_e(\phi, \omega_p) - \dfrac{\frac{\omega_p}{2} + \omega}{c} n_o\left(\dfrac{\omega_p}{2} + \omega\right)\cos\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_s}{n_o}\right) - \dfrac{\frac{\omega_p}{2} - \omega}{c} n_o\left(\dfrac{\omega_p}{2} - \omega\right)\cos\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_i}{n_o}\right) \\ \Delta k_{\perp} = \dfrac{\frac{\omega_p}{2} + \omega}{c} n_o\left(\dfrac{\omega_p}{2} + \omega\right)\sin\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_s}{n_o}\right) - \dfrac{\frac{\omega_p}{2} - \omega}{c} n_o\left(\dfrac{\omega_p}{2} - \omega\right)\sin\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_i}{n_o}\right) \end{cases}$$

Dopo semplici passaggi matematici (esercizio), considerando la condizione di phase matching e approssimando al primo ordine si ottiene (trascurando anche la variazione di n con la frequenza)

$$\begin{cases} \Delta k_{\parallel} = -k\theta_0 \cdot (\theta_s + \theta_i) \overset{df}{=} -\dfrac{k\theta_0}{n_o} \cdot \underline{\theta_+} \\ \Delta k_{\perp} = k \cdot (\theta_s - \theta_i) + 2\dfrac{\theta_0}{c}\omega \overset{df}{=} k \cdot \underline{\theta_-} + 2\dfrac{\theta_0}{c}\omega \end{cases}$$

$$k \overset{df}{=} \frac{\omega_p}{2c}$$

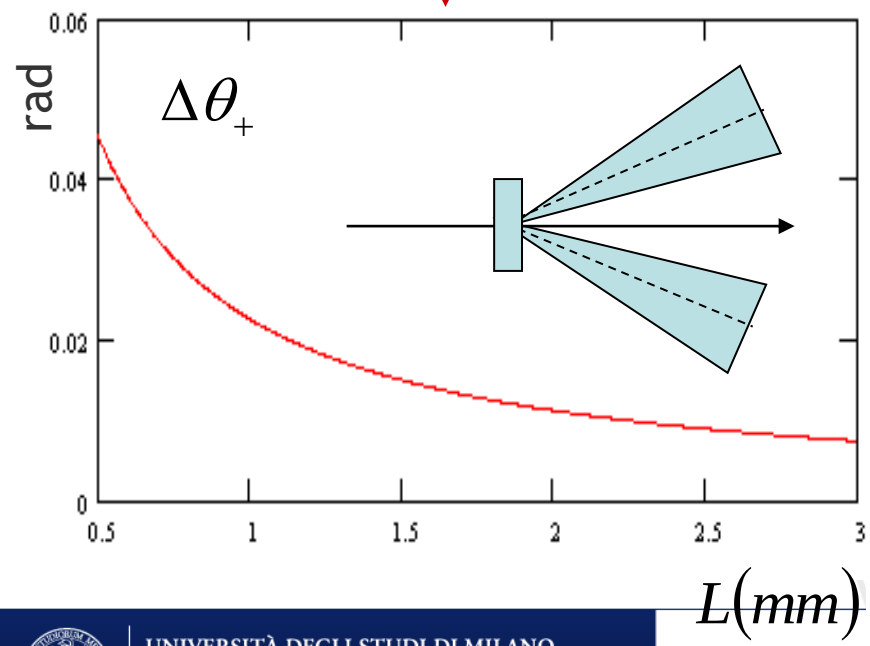
Caso ~monocromatico (con filtri interferenziali prima dei rivelatori)

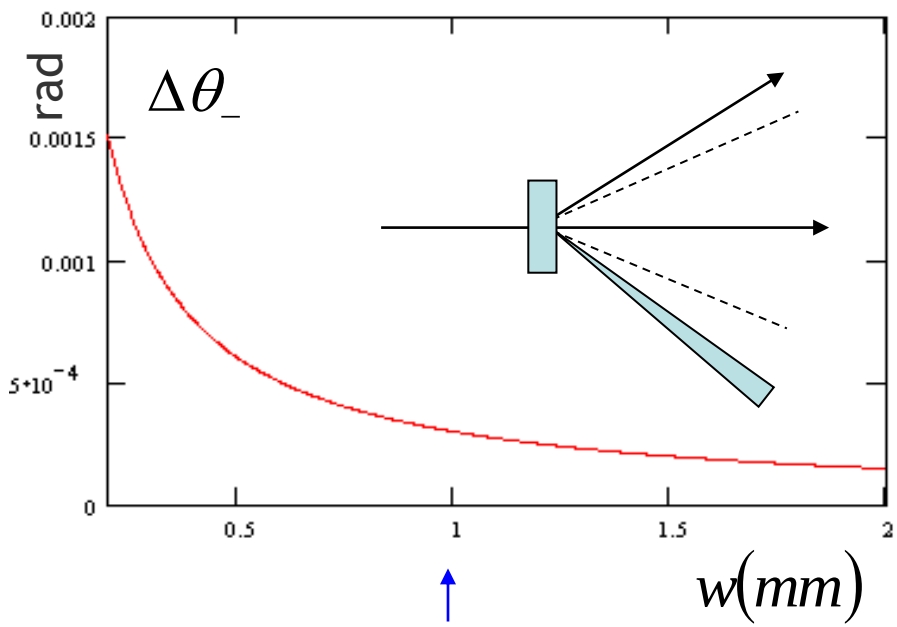
Probabilità di rivelare i 2 fotoni ad angoli θ_s e θ_i

$$P(\theta_s,\theta_i)=\left|\langle\theta_s,\theta_i|\Psi\rangle_{PDC}\right|^2=\left|Sinc\left(\frac{1}{2}\Delta k_{||}L\right)\tilde{F}(\Delta k_\perp)\right|^2=$$

$$=\left|Sinc\left(\frac{1}{2}\frac{k\theta_0}{n_o}\theta_+L\right)\tilde{F}(k\theta_-)\right|^2=\left|Sinc\left(\frac{1}{2}\frac{k\theta_0}{n_o}\theta_+L\right)e^{-\frac{w^2}{4}(k\theta_-)^2}\right|^2$$

Spessore del cono della PDC (legato alla sinc)





Correlazioni angolari (legate alla F)

Esempio: nel caso con L=1 e w=2mm si genera una PDC entangled nel grado di libertà angolare:

$$|\Psi\rangle_{PDC} \approx \int d\theta |1,\theta\rangle_s |1,\theta\rangle_i$$

Perché $\tilde{F}(k\theta_-) \approx \delta(\theta_-)$ inoltre la sinc è molto larga (~1cm alla distanza di 50cm)

Nel caso a largo spettro (senza filtri interferenziali) le correlazioni angolari sono annullate:

Traccio via lo spettro (non lo osservo)

$$P(\theta_s,\theta_i) = \left|\langle\theta_s,\theta_i|\Psi\rangle_{PDC}\right|^2 = \int d\omega \left| Sinc\left(\frac{1}{2}\Delta k_{||} L\right)\tilde{F}(\Delta k_\perp)\right|^2 =$$

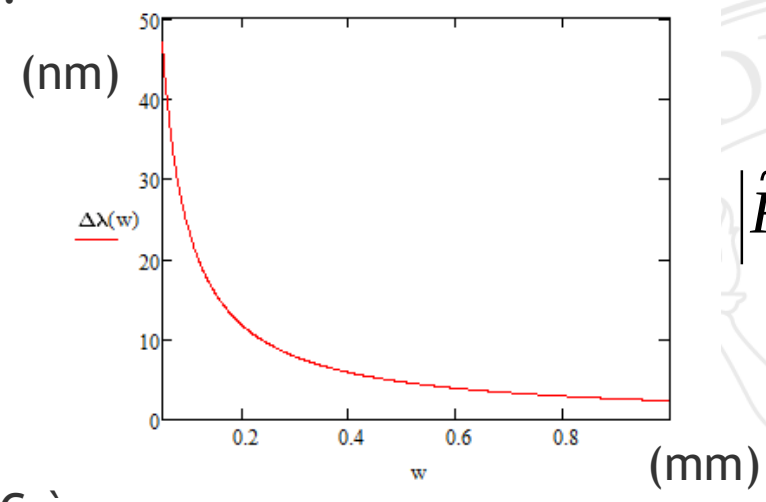
$$= \int d\omega \left| Sinc\left(\frac{1}{2}\frac{k\theta_0}{n_o}\theta_+ L\right) e^{-\frac{w^2}{4}\left(\underline{k\theta_- + 2\frac{\theta_0}{c}\omega}\right)^2} \right|^2$$

Per un dato θ_- esiste un ω che mi rende nullo l'argomento della gaussiana

Considero adesso il caso a singolo modo spaziale, ovvero raccolgo la PDC soltanto ad un angolo fissato ad esempio θs=θi=0 (per fare questo posso usare una fibra ottica singolo modo). In questo caso la larghezza spettrale della PDC è direttamente legata alla dimensione spaziale della pompa:

$$\Delta k_{\perp} = 2\frac{\theta_0}{c}\omega = 2\frac{\theta_0}{c}2\pi\frac{c}{\lambda_{PDC}^2}\lambda$$

E sostituendo nella gaussiana trovo la larghezza spettrale FWHM in funzione della spot w della pompa:



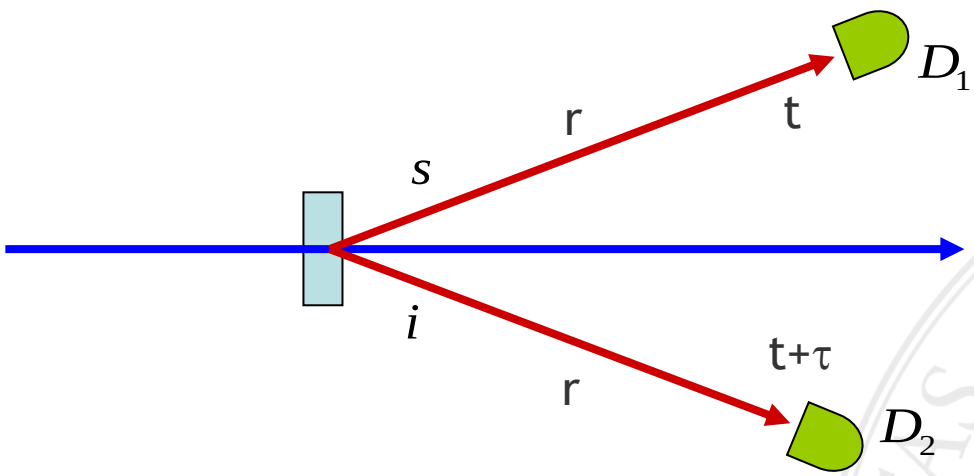
$$\left|\tilde{F}(\Delta k_{\perp})\right|^2 = e^{-\frac{w^2\cdot\Delta k_{\perp}^{\,2}}{2}}$$

E lo stato della PDC è:

$$|\Psi\rangle_{PDC} \propto \int d\omega\, f(\omega)|1,\omega\rangle_s|1,-\omega\rangle_i$$

Correlazioni temporali tra i due fotoni della PDC

Voglio sapere la probabilità di rivelare un fotone al tempo t e l'altro al tempo t+τ. Per fare questo si può calcolare quella che viene chiamata la «funzione d'onda della coppia di fotoni», ovvero la funzione di correlazione dell'intensità.



Normal ordering

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\left\langle :\hat{I}_1(t)\hat{I}_2(t+\tau):\right\rangle}{\left\langle \hat{I}_1(t)\right\rangle\left\langle \hat{I}_2(t)\right\rangle}$$

Dove:

$$\left\langle :\hat{I}_1(t)\hat{I}_2(t+\tau):\right\rangle=\left\langle Pdc\left|E_1^{(-)}(t)E_2^{(-)}(t+\tau)E_2^{(+)}(t+\tau)E_1^{(+)}(t)\right|Pdc\right\rangle$$

Mi ritrovo quindi con 6 integrali. Per rendere la notazione più compatta ridefinisco le frequenze:

$$\begin{cases} |Pdc\rangle = \int d\omega\, f(\omega)|\omega\rangle_s |\omega_p - \omega\rangle_i \\ E^{(+)}(t) \approx \int d\omega\, a(\omega) e^{-i\omega t + ikr} = \int d\omega\, a(\omega) e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \end{cases}$$

ω è la frequenza "vera" e non lo shift rispetto alla componente centrale

La direzione di k è fissata quindi rimane solo l'integrale sulla frequenza.

Per trovare la soluzione devo sostituire nella g2 i 6 integrali (4 per i campi e 2 per gli stati) assegnando ad ognuno una frequenza con indice diverso

Quindi sto facendo evolvere gli operatori di campo e (quindi) lascio invariato lo stato.

$$g^{(2)}(\tau) \propto \int d\omega_1 \ldots d\omega_6 \; f^*(\omega_1) f(\omega_6) \cdot$$

$$\cdot {}_s\langle \omega_1 |_i \langle \omega_p - \omega_1 | a_s^+(\omega_2) a_i^+(\omega_3) a_i(\omega_4) a_s(\omega_5) | \omega_6 \rangle_s | \omega_p - \omega_6 \rangle_i \cdot$$

$$\cdot e^{+i\omega_2\left(t-\frac{r}{c}\right)} e^{+i\omega_3\left(t+\tau-\frac{r}{c}\right)} e^{-i\omega_4\left(t+\tau-\frac{r}{c}\right)} e^{-i\omega_5\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

Ricordando che: $a|0\rangle = 0$ e $(a|n\rangle)^+ = \langle n|a^+$

Si ottiene subito che deve essere: $\omega_1 = \omega_2, \quad \omega_3 = \omega_p - \omega_1$

$$\omega_5 = \omega_6, \quad \omega_4 = \omega_p - \omega_6$$

$$g^{(2)}(\tau) \propto \int d\omega d\omega' \; f^*(\omega) f(\omega') \cdot$$

$$\cdot {}_s\langle \omega |_i \langle \omega_p - \omega | a_s^+(\omega) a_i^+(\omega_p - \omega) a_i(\omega_p - \omega') a_s(\omega') | \omega' \rangle_s | \omega_p - \omega' \rangle_i \cdot$$

$$\cdot e^{+i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} e^{+i(\omega_p-\omega)\left(t+\tau-\frac{r}{c}\right)} e^{-i(\omega_p-\omega')\left(t+\tau-\frac{r}{c}\right)} e^{-i\omega'\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$\omega = \omega_1$$
$$\omega' = \omega_6$$

Gli elementi di matrice rimanenti sono uguali a 1 e i termini con t ed r spariscono. Quindi rimangono solo i termini con τ.

Si ricava:

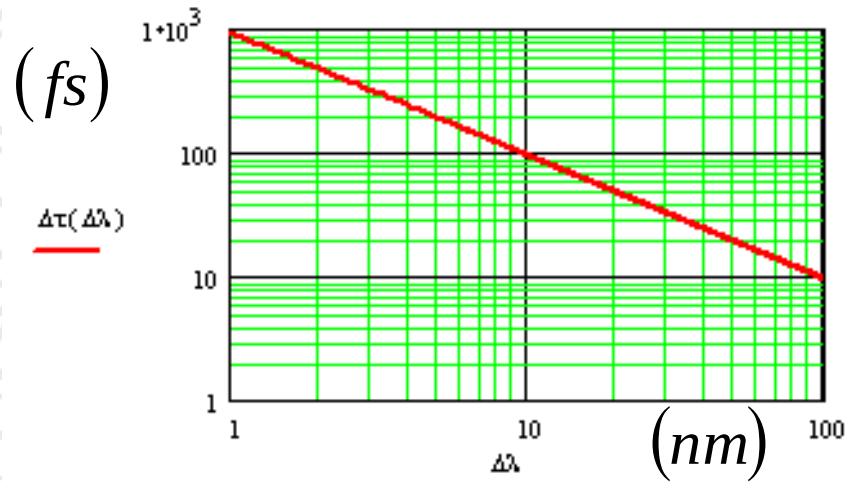
Trasformata di Fourier dell'ampiezza spettrale della PDC

$$g^{(2)}(\tau) \propto \int d\omega\, f^*(\omega) e^{-i\omega\tau} \int d\omega'\, f(\omega') e^{+i\omega'\tau} = \left| \int d\omega\, f(\omega) e^{-i\omega\tau} \right|^2$$

Il risultato è identico a quello che avremmo ottenuto sommando <u>coerentemente</u> tutti i contributi relativi alle proiezioni dello stato <u>evoluto fino ai rivelatori</u> sulle coppie ω, -ω.

Tipicamente si lavora con spettri di alcune decine di nm, dunque, i fotoni sono in contemporanea entro le decine di fs (con rivelatori reali devo aggiungere l'integrale sul tempo di risposta del rivelatore e quindi perdo l'informazione sulle correlazioni temporali)

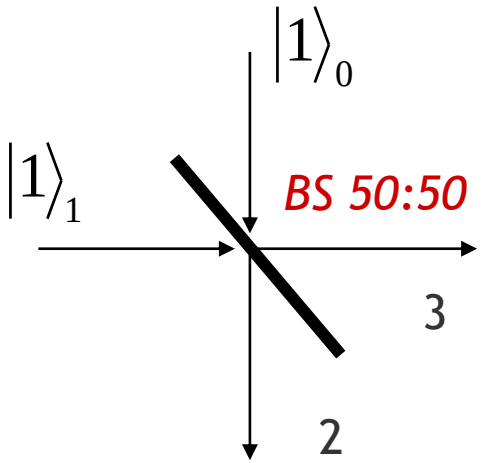
Larghezza della coincidenza



Posso risalire al «tempo di coerenza» dei fotoni per altra via….

Hong-Ou-Mandel effect

Cosa succede quando due fotoni arrivano contemporaneamente su un Beam-Splitter?



$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0^+ \\ \hat{a}_1^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_2^+ \\ \hat{a}_3^+ \end{pmatrix}$$

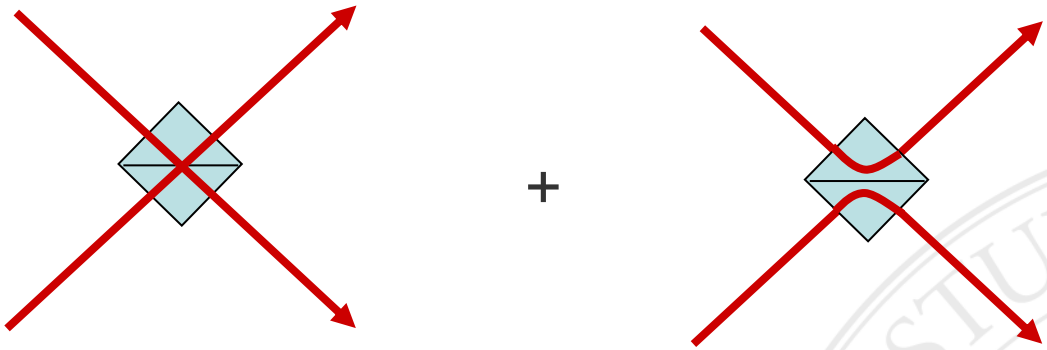
$$|1\rangle_0 |1\rangle_1 = \hat{a}_0^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle_0 |0\rangle_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_2^+ + i\hat{a}_3^+\right)\left(i\hat{a}_2^+ + \hat{a}_3^+\right)|0\rangle_2 |0\rangle_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(i\hat{a}_2^+ \hat{a}_2^+ + i\hat{a}_3^+ \hat{a}_3^+ + \cancel{\hat{a}_2^+ \hat{a}_3^+} - \cancel{\hat{a}_2^+ \hat{a}_3^+}\right)|0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{i}{2}\left(|2\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2\rangle_3\right)$$

I due fotoni possono essere rivelati entrambi sul modo 2 o sul modo 3.

Interpretazione intuitiva dell'effetto HOM:

Il caso in cui entrambi i fotoni vengono trasmessi e il caso in cui entrambi vengono riflessi fanno tra loro interferenza distruttiva



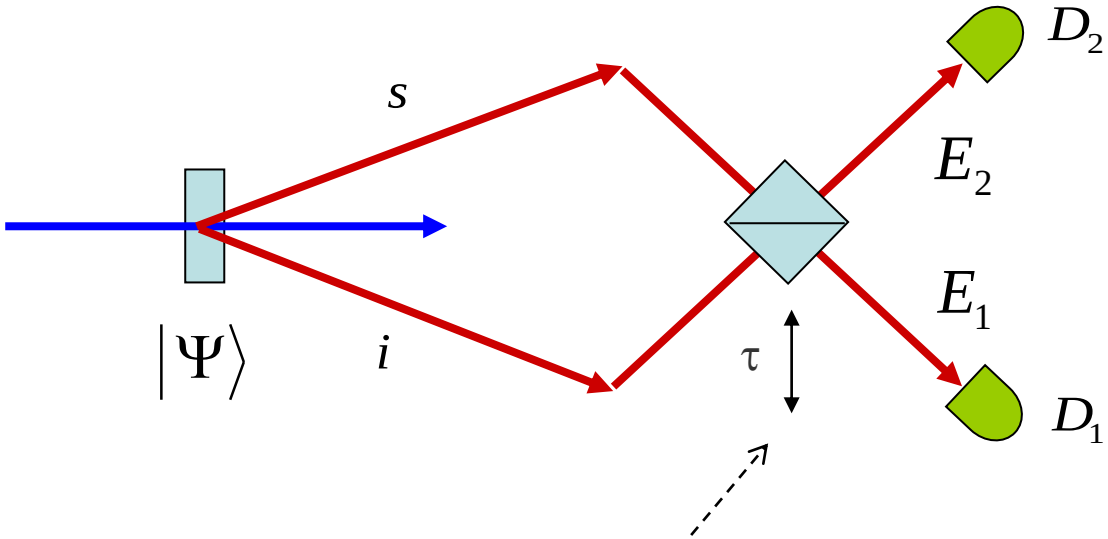
\+

=

Interferenza distruttiva

Ricordare che la riflessione intruduce uno sfasamento di $\pi/2$, quindi due riflessioni introducono un segno -

Adesso dobbiamo rifare il calcolo considerando lo stato generato per PDC.



Il tempo di risposta lungo del rivelatore rende possibile scrivere la probabilità di rivelarzione come una traccia sulla frequenza…

Traslando il BS introduco un delay time τ tra i due rami dell'interferometro.

Se volessi procedere con il metodo precedente (rappresentazione di Heisenberg) dovrei scrivere:

$$P(\tau) \propto \int \langle \Psi | : \hat{I}_{1,\tau}(t) \hat{I}_{2,\tau}(t+\tau') : | \Psi \rangle d\tau'$$

Dove τ' riguarda lo shift temporale di rivelazione e τ il delay time tra i due fotoni introdotto dalla traslazione del BS

Però dovrei scrivere E1 e E2 in funzione di Es e Ei con la regola del BS e mi ritroverei con 16 termini…possiamo però usare anche un altro metodo.

Sfrutto il fatto che il rivelatore non riesce a risolvere la differenza tra il tempo di arrivo dei due fotoni. Dal punto di vista spettrale questo vuol dire che il rivelatore fa una traccia sulle frequenze che arrivano (vedo un click ma non so che frequenza è stata rivelata).

Quindi faccio evolvere lo stato della PDC fino ai rivelatori e poi traccio via le frequenze, ovvero, faccio una somma incoerente tra tutte le proiezioni dello stato di arrivo sulle coppie di frequenze ω, $-\omega$:

$$P(\tau) = \int \left| \langle \omega | \langle -\omega | \underline{U} | \underline{\Psi} \rangle \right|^2 d\omega$$

Faccio una somma incoerente di tutti i contributi

Proietto su tutte le coppie di frequenze compatibili con la conservazione dell'energia

Faccio evolvere lo stato dal cristallo fino ai rivelatori

Per scrivere lo stato all'uscita del cristallo in questo caso mi è più comodo riscrivere ω come shift rispetto alla frequenza centrale

$$|\Psi\rangle = \int d\omega\, f(\omega)\,|\omega\rangle_s |-\omega\rangle_i = \int d\omega\, f(\omega) a_s^+(\omega) a_i^+(-\omega)|0\rangle_s |0\rangle_i$$

Nella propagazione fino al BS degli operatori a^+ mi rimane un esponenziale con il delay time τ:

$$|\Psi_\tau\rangle = \int d\omega\, f(\omega) a_s^+(\omega) a_i^+(-\omega) e^{-i\omega\tau} |0\rangle_s |0\rangle_i$$

Per scrivere lo stato dopo il BS applico la regola del BS:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_s^+ \\ \hat{a}_i^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^+ \\ \hat{a}_2^+ \end{pmatrix}$$

Stato dopo il BS

$$|\Psi_{BS}\rangle = \frac{1}{2} \int \begin{matrix} f(\omega)\big(\; i a_1^+(\omega) a_1^+(-\omega) + i a_2^+(\omega) a_2^+(-\omega) + \\ + \underline{a_1^+(\omega) a_2^+(-\omega) - a_1^+(-\omega) a_2^+(\omega)} \; \big) \end{matrix} e^{-i\omega\tau} |0\rangle_s |0\rangle_i \, d\omega$$

I due termini non si cancellano perché sono a frequenze diverse

Considero solo i conteggi su due diversi rivelatori 1,2 :

$$|\Psi\rangle_{ps} = \frac{1}{2}\int f(\omega)e^{-i\omega\tau}(|\omega\rangle_1|-\omega\rangle_2 - |-\omega\rangle_1|\omega\rangle_2)d\omega$$

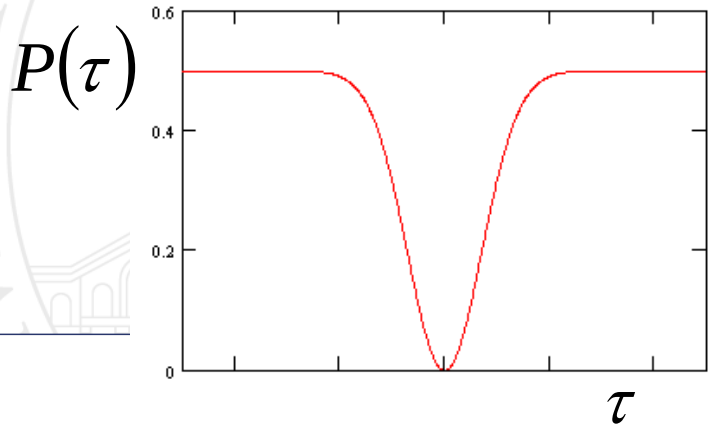
$$P(\tau) = \int d\omega' \left| {}_1\langle\omega'|{}_2\langle-\omega'\|\Psi\rangle_{ps} \right|^2$$

Probabilità di rivelare il conteggio in contemporanea

Se $f(\omega) = f(-\omega)$ *e pongo* $\int |f(\omega)|^2 d\omega = 1$ *ottengo:*

$$P(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int |f(\omega)|^2 e^{-i2\omega\tau} d\omega\right)$$

Entro la larghezza di "coerenza" della PDC i due fotoni risultano indistinguibili e non ho conteggi in contemporanea



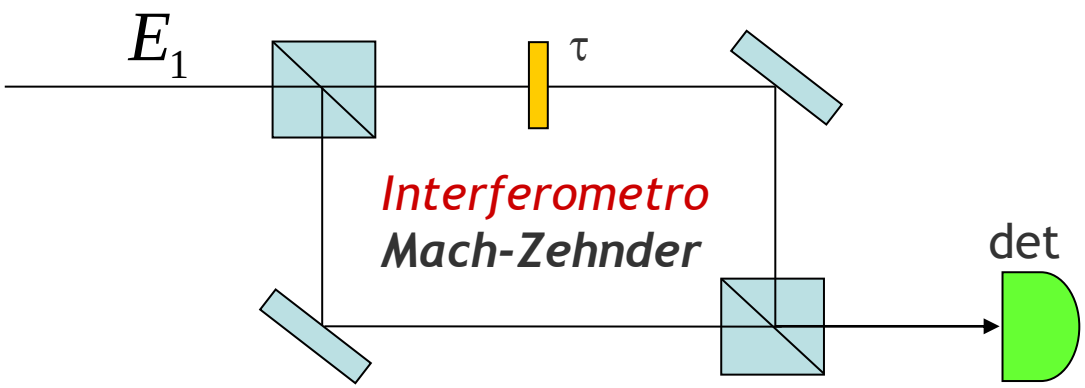
Interferenza a singolo fotone:

Come vedremo un esperimento di interferenza al primo ordine (funzione di correlazione dei campi) non riesce a distinguere tra radiazione classica e quantistica. Quindi per fare un esperimento di interferenza a singolo fotone bisogna prima dimostrare di aver generato il singolo fotone (non basta avere il singolo click sul rivelatore).

Quindi vedremo in successione:

- prima il caso di interferenza con radiazione classica multimodo (basso tempo di coerenza)
- poi il caso quantistico a singolo modo
- ed infine il caso quantistico (PDC) a basso tempo di coerenza.

Caso classico a basso tempo di coerenza:



Media temporale

$$I_{\text{det}} \propto \left\langle \left| E_1(t) + E_1(t-\tau) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| A_1(t) e^{-i\omega_0 t} + A_1(t-\tau) e^{-i\omega_0 (t-\tau)} \right|^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left| A_1(t) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| A_2(t) \right|^2 \right\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \left\langle A_1^*(t) A_1(t-\tau) \right\rangle e^{i\omega_0 \tau} \right\} =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{\left\langle A_1^*(t) A_1(t-\tau) \right\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \right\} \cos(\omega_0 \tau) =$$

$$= 2I_1 + 2I_1\,\mathrm{Re}\left\{ g^{(1)}(\tau) \right\} \cos(\omega_0 \tau)$$

Esercizio: questa è la soluzione se la fuzione di correlazione dei campi è reale

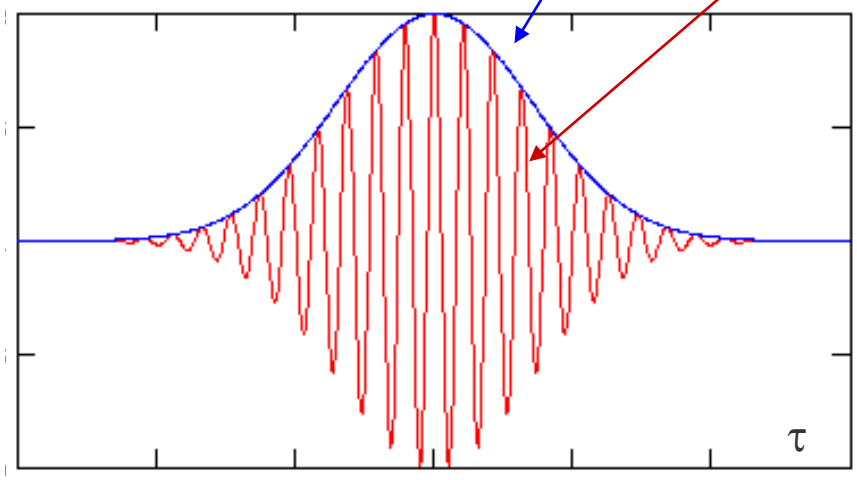
Funzione di correlazione dei campi

*In generale vale la seguente equazione (teorema di **Wiener-Khinchin**):*

Power spectrum

$$\boxed{\left\langle A_1^*(t)A_1(t-\tau)\right\rangle = \int \tilde{I}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega}$$

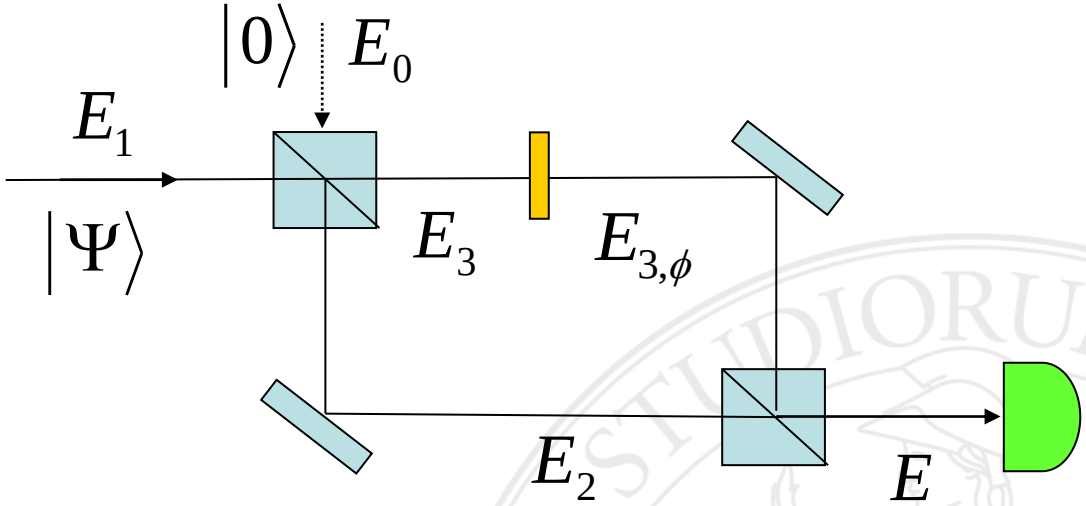
$$I_{\det} \propto 2I_1 + 2I_1 \operatorname{Re}\left\{\tilde{F}_{norm}\left(\tilde{I}_1(\omega)\right)\right\}\cos(\omega_0\tau)$$



La frequenza delle frange dipende dalla frequenza centrale della radiazione; la larghezza in cui è possibile vedere le frange dipende dalla lunghezza della coerenza temporale della radiazione.

Caso quantistico a singolo modo:

Con la regola quantistica del beam-splitter e della probabilità di conteggio si può affrontare il problema dell'interferenza. Mi metto nella rappresentazione di Heisenberg per far notare l'analogia con il caso classico.



$$\begin{cases} E^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_2^{(+)} + \frac{i}{\sqrt{2}} E_{3,\phi}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_2^{(+)} + \frac{i}{\sqrt{2}} E_3^{(+)} e^{i\phi} \\ E_2^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0^{(+)} + \frac{i}{\sqrt{2}} E_1^{(+)} \\ E_3^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2}} E_0^{(+)} + \frac{1}{\sqrt{2}} E_1^{(+)} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} \propto \langle \Psi | \langle 0 | E^{(-)} E^{(+)} | \Psi \rangle | 0 \rangle}$$

Notare che è formalmente identica al caso classico

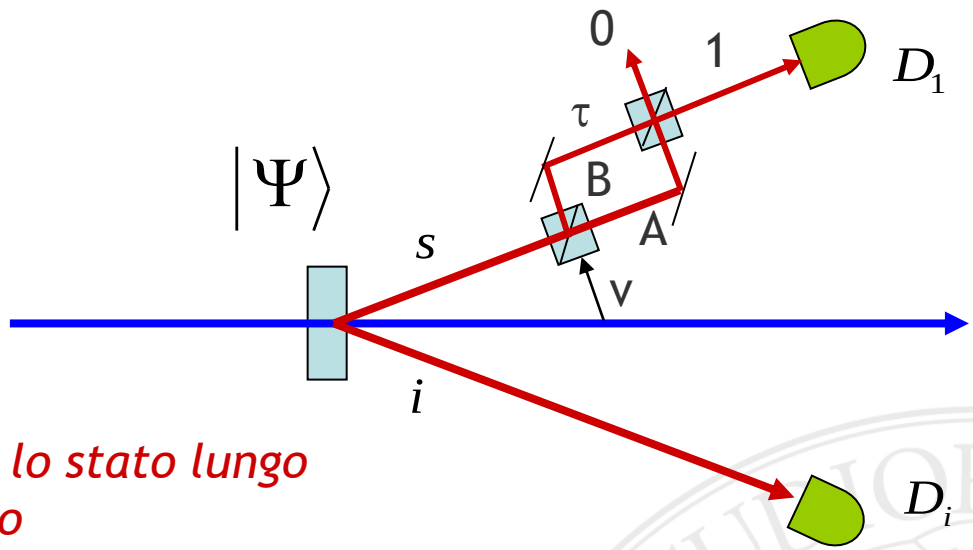
$$\frac{dP}{dt} \propto \left\langle \Psi \middle| \frac{1}{2} E_1^{(-)} E_1^{(+)} \left(1+\cos(\phi)\right) \middle| \Psi \right\rangle \propto \langle \hat{n} \rangle \left(1+\cos(\phi)\right)$$

Dove la parte con cos(φ) genera le frange di interferenza

Come si vede il risultato dipende dal valore medio dell'osservabile n e quindi ottengo lo stesso risultato con stati di Fock, con coerenti e con termici, ovvero la funzione di correlazione dei campi (al contrario della funzione di correlazione dell'intensità) non mi permette di distinguere tra radiazione classica e quantistica.

Quindi l'interferenza a singolo fotone non è un vero esperimento di ottica quantistica, perché il risultato è indistinguibile da quello che ottengo con stati classici.

Caso quantistico multimodo (PDC):



Faccio evolvere lo stato lungo l'interferometro

Nell'evoluzione devo considerare anche la portante e non solo lo shift in frequenza

frequenza tot

$$\begin{cases} |\Psi\rangle = \int d\omega f(\omega) a_s^+(\omega) a_i^+(\omega_p - \omega)|0\rangle_s|0\rangle_i \\ P(\tau) = \int d\omega' \left| {}_s\langle\omega'|_i\langle\omega_p - \omega'|U|\Psi\rangle \right|^2 \end{cases}$$

U fa evolvere lo stato fino al rivelatore

Non misuro la frequenza quindi devo sommare incoerentemente tutti i contributi (traccia)

$$a_s^+(\omega) \rightarrow \frac{1}{2}a_0^+(\omega)\left(1-e^{i\omega\tau}\right)+\frac{i}{2}a_1^+(\omega)\left(1+e^{i\omega\tau}\right)$$ esercizio

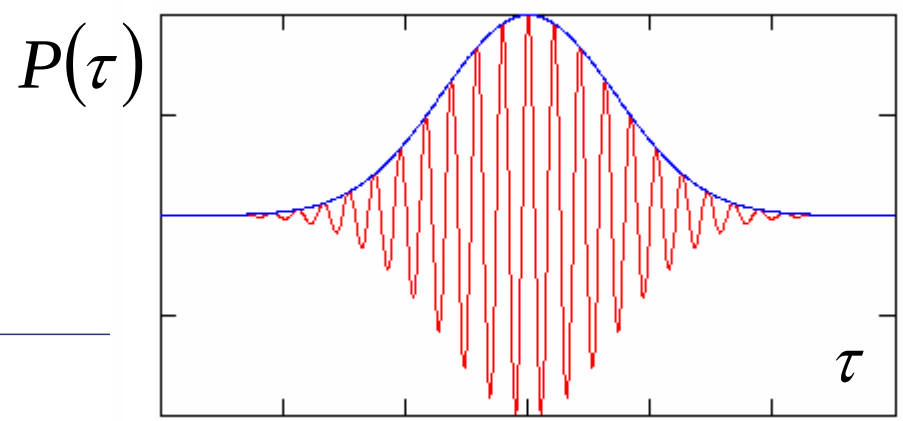
Poi scrivo lo stato selezionato dai conteggi in contemporanea tra il rivelatore 1 e il rivelatore i:

$$|\Psi\rangle_{ps} = \frac{i}{2}\int d\omega f(\omega)\left(1+e^{i\omega\tau}\right)|\omega\rangle_1|\omega_p-\omega\rangle_i$$

Ottengo le frange di interferenza entro la larghezza di coerenza della PDC, ovvero, esattamente il risultato classico:

$$P(\tau) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int d\omega|f(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau}\right)\cos\left(\frac{\omega_p}{2}\tau\right)$$

In questa ultima equazione ω è lo shift e f è centrata sulla frequenza $\omega_p/2$ (esercizio)



Appendice: propagazione in mezzi anisotropi

In un mezzo anistropo uniassico abbiamo:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & & \\ & n_o^2 & \\ & & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E$$

Dalle equazione di Maxwell nei mezzi abbiamo:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow i K \times E = i\omega \mu_0 H$$

regime ottico

$$\left[B = \mu_0 (1 + \chi_m) \simeq \mu_0 H \right]$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow i K \times H = -i\omega \varepsilon_0 (\varepsilon E)$$

Sostituisco e trovo:

$$K \times (K \times E) + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon E) = 0$$

Per approfondire: Yariv and Yeh, Optical wave in crystals

Vegliamo scrivere questa equazione come il prodotto di una matrice per il campo elettrico. Usando la notazione tensoriale per la componente i-esima si ottiene:

$$\left[k \times (k \times E)\right]_i + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} E_j = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_{ijk} k_j \varepsilon_{klm} k_l E_m + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} E_j = 0$$

dove e_{ijk} è il tensore totalmente antisimmetrico a tre indici

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}\right) k_j k_l E_m + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} E_j = 0$$

$$\Downarrow$$

$$k_i (kE) - E_i (k^2) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} E_j = 0$$

$$\begin{cases} kE = k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z \\ k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{cases}$$

Quindi in forma matriciale si scrive:

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_o^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} n_o^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Quindi per trovare la soluzione per E diverso da 0 dobbiamo imporre che il determinante della matrice sia nullo.

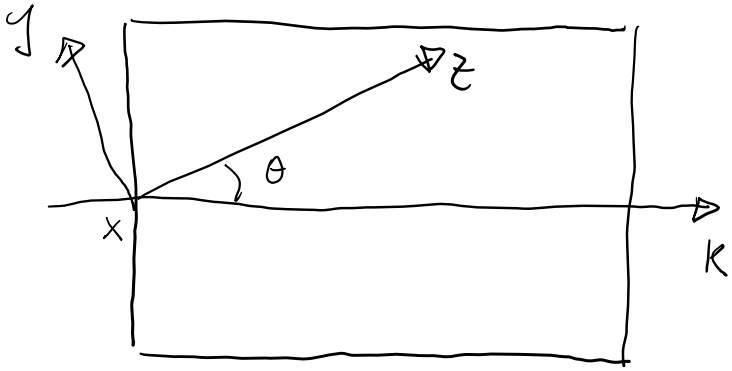
$$\det M = 0 \Rightarrow$$

L'equazione risultante può essere fattorizzata e rappresenta le due soluzioni (onda ordinaria e onda straordinaria):

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(\frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

Consideriamo adesso il nostro caso, ovvero, incidenza normale alla superficie del cristallo e prendiamo il caso dell'onda straordinaria:



$$K_z = K\cos\theta = \frac{\omega}{c} n \cos\theta$$

Dove n è quindi l'indice di rifrazione straordinario che vogliamo trovare

$$K_y^2 = K^2 - K_z^2 \; ; \; K_x = 0$$

Quindi sostituendo si trova:

$$\frac{K_x^2 + K_y^2}{n_e^2} + \frac{K_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \cos^2\theta}{n_e^2} + \frac{\frac{\omega^2}{c^2} n^2 \cos^2\theta}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}}$$