UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Generazione di stati entangled in polarizzazione di due fotoni

Disuguaglianza di Bell

Simone Cialdi

Outline

Analisi su interferenza a singolo fotone

Stati entangled in polarizzazione

- La «non località»
- Confronto con una miscela statistica

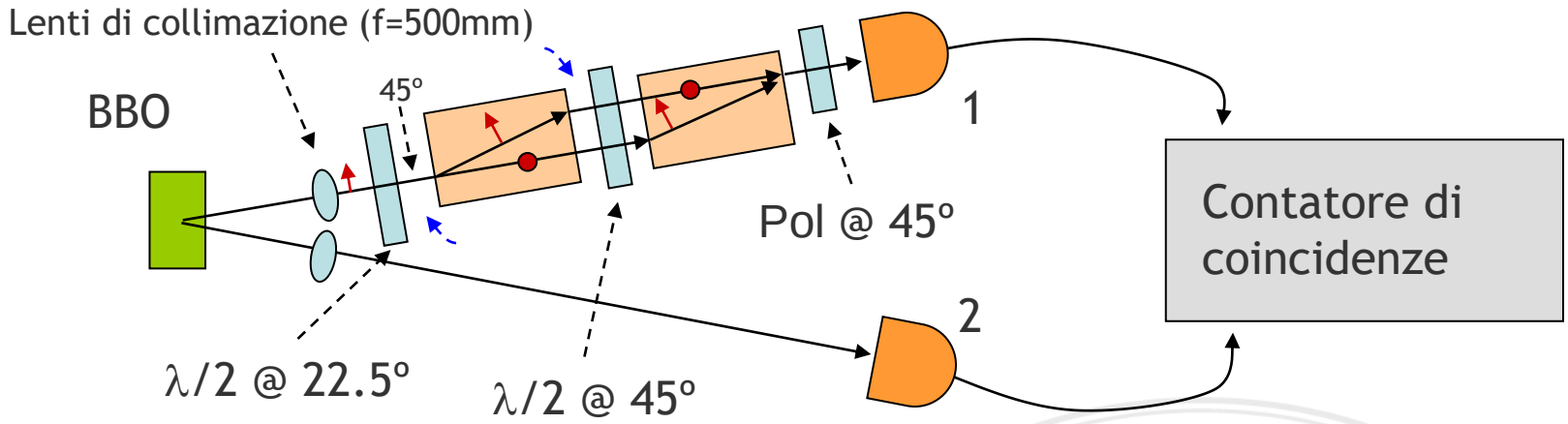
Generazione di stati entangled in polarizzazione

- Metodo dei due cristalli (Kwiat)
- Procedura di allineamento

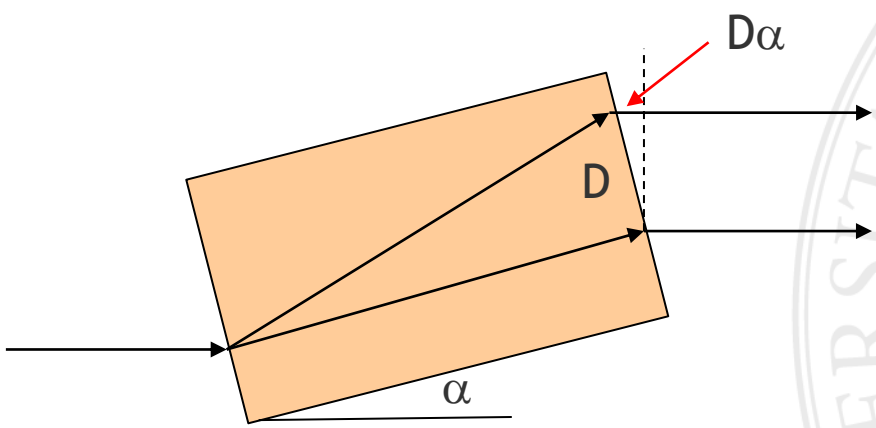
Disuguaglianza di Bell

- Confronto tra una teoria locale e una teoria «non locale»
- Disuguaglianza di Bell nella versione CHSH

Interferenza a singolo fotone



Il delay time introdotto ruotando uno dei cristalli rispetto all'asse verticale è dovuto solo al percorso in più fatto fuori dal cristallo:



Quindi il cammino ottico aggiuntivo è:

$$\frac{\omega_0 + \omega}{c} D\alpha$$

Considerando che la lunghezza d'onda centrale è 810nm e che D=4mm, si ottiene che è necessario un angolo α di 0.05mrad per fare un periodo

Nota: la variazione del percorso dovuta alla legge di Snell e la variazione dell'indice di rifrazione straordinario sono trascurabili

Lo stato all'uscita del cristallo è:

$$|\psi\rangle = \int d\omega\, f(\omega)\, |H,\omega\rangle_1 |H,-\omega\rangle_2$$

dove w è lo shift rispetto alla portante

Propago fino a dopo il polarizzatore:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int d\omega\, f(\omega)\left(1 + e^{i\tau(\omega_0+\omega)}\right)|45°,\omega\rangle_1 |H,-\omega\rangle_2$$

Dove: $\tau = D\alpha/c$

Per trovare la probabilità di rivelazione in funzione del delay time faccio la traccia (somma incoerente) su tutte le frequenze:

$$p(\tau) = \int d\omega' \,{}_1\langle 45,\omega'|\,{}_2\langle H,-\omega'|\psi\rangle|^2 = \int d\omega\, |f(\omega)|^2 \left|1 + e^{i\tau(\omega_0+\omega)}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\int d\omega\, |f(\omega)|^2 e^{+i\omega\tau}\right]\cos\omega_0\tau$$

Nell'ipotesi che: $|f(\omega)|^2 = |f(-\omega)|^2$

$$\Rightarrow \int d\omega\, |f(\omega)|\, e^{i\omega\tau} \in \mathbb{R}e$$

Relazione tra numero di frange e larghezza spettrale nell'ipotesi di spettro gaussiano:

$$|f(\omega)|^2 = e^{-\frac{2\omega^2}{\Delta\omega^2}} \xrightarrow{\tilde{F}} e^{-\frac{\Delta^2}{8}\tau^2} \overset{df}{=} e^{-2\frac{\tau^2}{\Delta\tau^2}} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{4}{\Delta\tau}$$

Così definiti $\Delta\omega$ e $\Delta\tau$ non sono esattamente la larghezza a metà altezza:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\omega_{FWHM}}{1{,}177} \qquad \Delta\tau = \frac{\Delta\tau_{FWHM}}{1{,}177} \qquad \sqrt{2\ln 2} \simeq 1{,}177$$

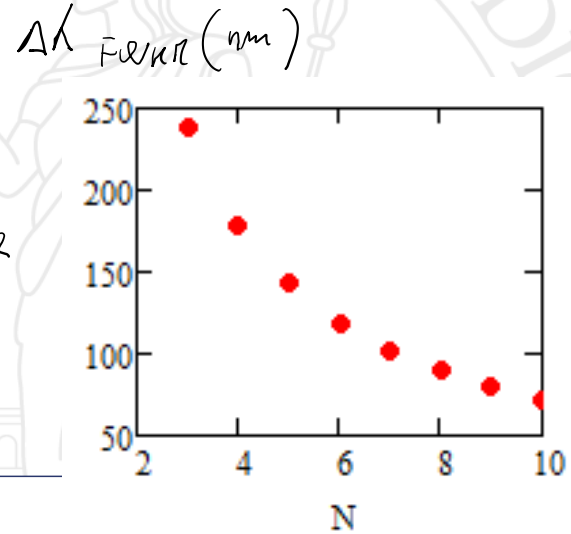
Quindi detto N il numero di frange entro la larghezza a metà altezza abbiamo:

$$\Delta\tau \cdot \omega_0 \, 1{,}177 = N \cdot 2\pi \Rightarrow \Delta\tau = \frac{N}{1{,}177}\frac{\lambda_0}{c}$$

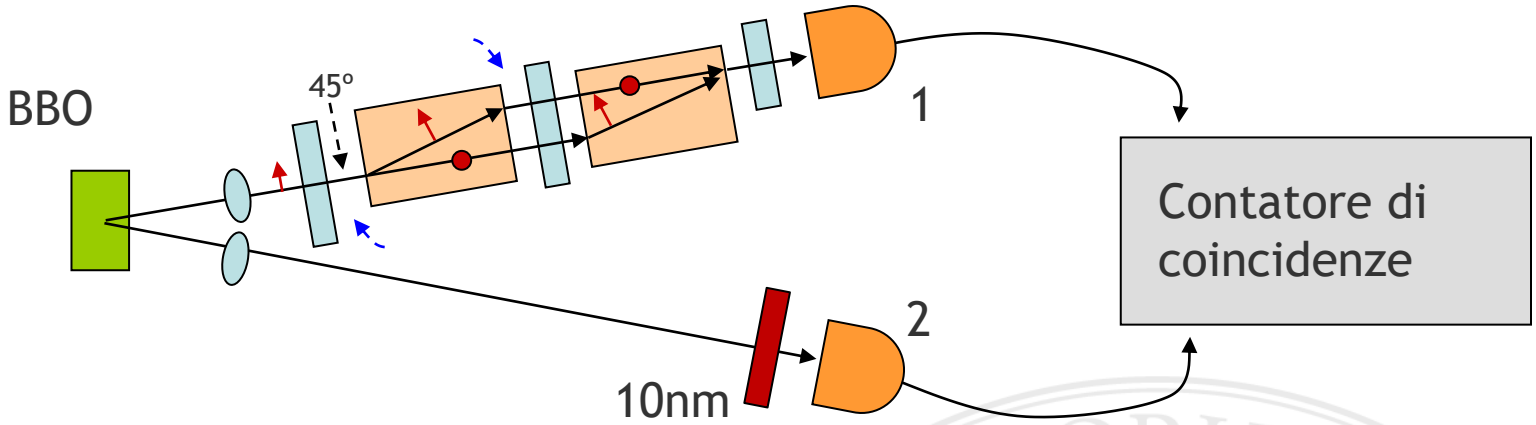
$$\Rightarrow \Delta\omega = 4 \cdot 1{,}177 \frac{c}{N\lambda_0}$$

Esprimo la larghezza spettrale in nm:

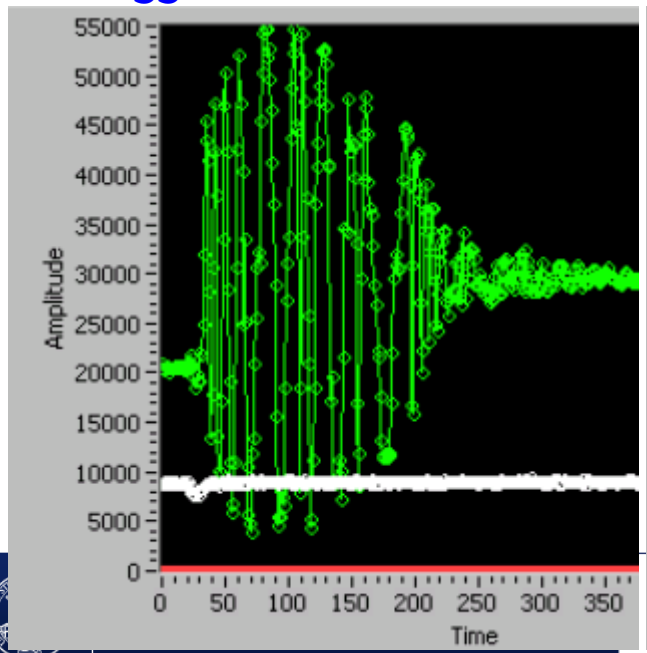
$$\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{\pi N}(1{,}177)^2$$



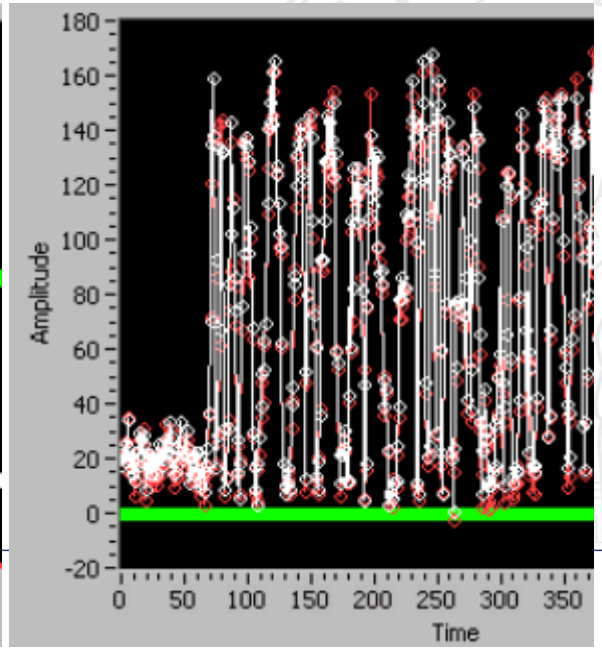
Confronto tra conteggi diretti e in contemporanea *(con l'aggiunta di un filtro interferenziale sul percorso 2)*



Conteggi diretti



Conteggi in contemporanea



I due fotoni sono correlati in energia quindi quando metto il filtro interferenziale sul percorso 2 automaticamente riduco lo spettro dei fotoni rivelati in contemporanea sul rivelatore 1

Conteggi in contemporanea

Per trovare la probabilità del conteggio in contemporanea sommo incoerentemente tutte le coppie di frequenza rivelabili (quindi devo inserire il filtro sul canale 2):

$$P(\tau) = \int d\omega A(-\omega)|_1\langle\omega|_2\langle-\omega||\psi\rangle \quad |^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int d\omega |F(\omega)|^2 e^{i\omega\tau}\right)\cos(\omega_0\tau)$$

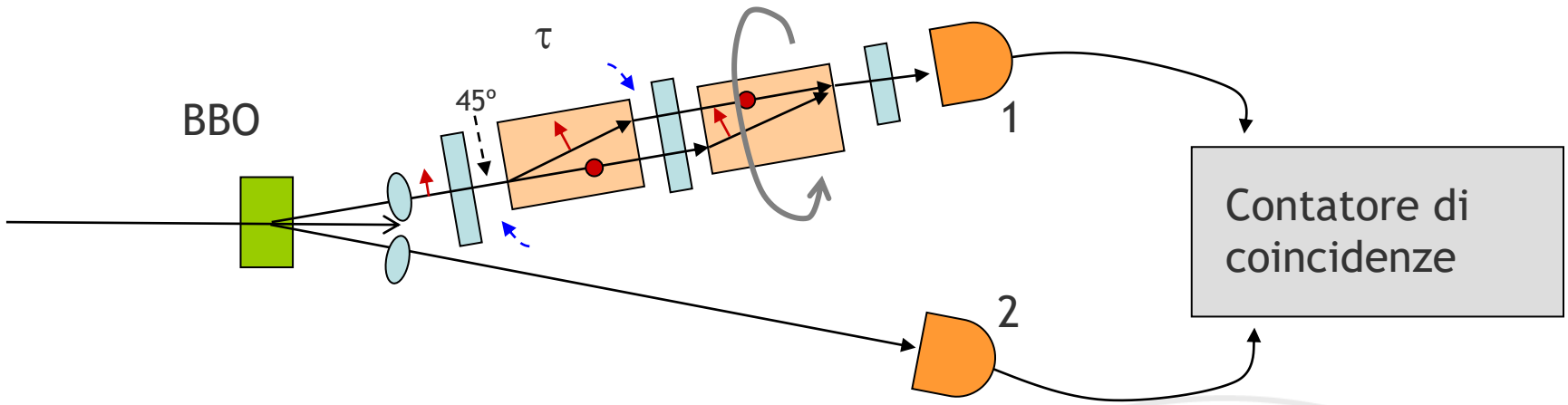
Dove: $|F(\omega)|^2 = A(-\omega)|f(\omega)|^2$

La funzione A rappresenta il filtro interferenziale

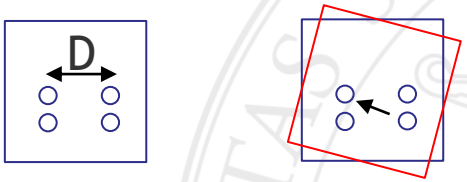
Il filtro interferenziale riduce la larghezza spettrale e quindi aumenta il tempo di coerenza.

Nota: anche senza filtro interferenziale ci aspettiamo che il tempo di coerenza nel caso dei conteggi in contemporanea sia maggiore rispetto a quello dei diretti. Infatti, nel caso dei conteggi in contemporanea dobbiamo integrare solo sulle frequenze che riusciamo ad accoppiare (quindi lo spettro sarà più piccolo)

Coerenza spaziale della PDC



Ruotando il secondo cristallo di calcite rispetto all'asse longitudinale introduciamo uno shift spaziale verticale tra i due percorsi. Se questo shift è maggiore della dimensione di coerenza spaziale mi aspetto una riduzione della visibilità delle frange.



1° cristallo 2° cristallo

$\Delta y = D\beta$

dove β è l'angolo di cui ho ruotato il cristallo

Le correlazioni spaziali della PDC lungo la direzione verticale sono date dalla trasformata di Fourier dell'ampiezza complessa della pompa nella direzione verticale. Considerando un profilo gaussiano della pompa con spot w si ottiene:

$$\tilde{F}(\Delta k_y) \propto e^{-\frac{w^2}{4}(\Delta k_y)^2}$$

$$\Delta k_y = k_{1y} + k_{2y} = \frac{\omega_0+\omega}{c}\cancel{n_0}\frac{\phi_1}{\cancel{n_0}} - \frac{\omega_0-\omega}{c}\cancel{n_0}\frac{\phi_2}{\cancel{n_0}} \approx \frac{\omega_0}{c}(\phi_1-\phi_2) =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0}(\phi_1-\phi_2)$$

dove ho scelto come convenzione quella di considerare positivi gli angoli presi in senso antiorario per il forone 1 e orario per il fotone 2

ddesso considero che alla distanza f ho una lente con focale f che quindi converte l'angolo in una posizione lungo y

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{y_1-y_2}{f}$$

sostituendo nella trasformata ottengo:

$$\tilde{F}(\Delta k_y) = \tilde{F}(y_1-y_2) = e^{-\frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2\frac{(y_1-y_2)^2}{f^2}} = e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{\delta^2}}$$

$$\delta = \frac{\lambda_0 f}{\pi\sigma}$$

Questa è la dimensione di coerenza spaziale della PDC alla distanza f. Uguale a quella delle speckles del disco di Arecchi.

Adesso riscrivo lo stato dopo il polarizzatore considerando che i due percorsi sono shiftati nella direzione verticale di Δy

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int d\omega\, dy_1\, dy_2\, f(\omega)\left[\tilde{F}(y_1-y_2) + \tilde{F}(y_1-y_2-\Delta y)\, e^{+i\tau(\omega_0+\omega)}\right]|45^\circ, y_1, \omega\rangle_1 |H, y_2, -\omega\rangle$$

Nota: la traformata in x non ha effetto perchè i due percorsi non sono shiftati lungo x.
Al tempo stesso la traformata lungo y non contiene ω (al primo ordine) e quindi il suo effetto può essere fattorizzato rispetto alla funzione f

Per trovare la probabilità di rivelazione in funzione di τ e Δy faccio la traccia (e considero normalizzati a 1 gli integrali dei moduli quadri delle funzioni f e F:

$$P(\tau, \Delta y) = \int d\omega' dy_1' dy_2' \left| {}_1\langle 45\, y_1' \omega' |\, {}_2\langle H\, y_2' -\omega' | \psi\rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int d\omega\, |f(\omega)|^2 e^{i\tau\omega} \cdot \int dy_1 dy_2\, \tilde{F}(y_1-y_2)\tilde{F}(y_2-y_1-\Delta y) \cdot \cos\omega_0\tau$$

Nell'ipotesi che f è simmetrica e F reale

La parte che contiene le correlazioni spaziali dipende solo dalla differenza delle coordinate quindi posso fare un cambio di coordinate:

$$g(y_-) = \int dy_- \, \tilde{F}(y_-) \, \tilde{F}(y_- - \Delta y) \qquad y_- \overset{df}{=} y_1 - y_2$$

Quindi la visibilità delle frange è:

$$Vis(\Delta y) = \frac{max - min}{max + min} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} V_{max} \cdot g - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} V_{max} \cdot g}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} V_{max} \cdot g + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} V_{max} \cdot g} = V_{max} \cdot g$$

Dove Vmax è la visibilità massima che ottengo nel cado con Δy e τ nulli

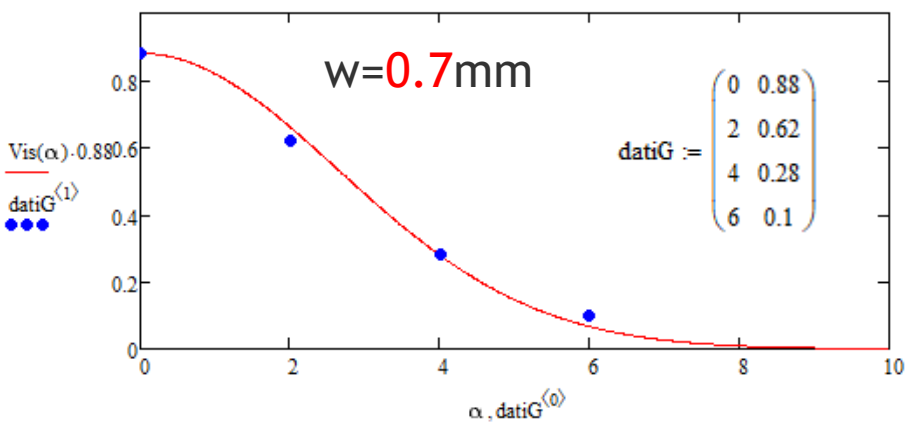
Nota: la coerenza spaziale dipende da w, λ_0 e f. Mentre λ_0 e f sono stabili w può cambiare se il pin-hole del filtro spaziale della pompa si posta nel corso delle misure

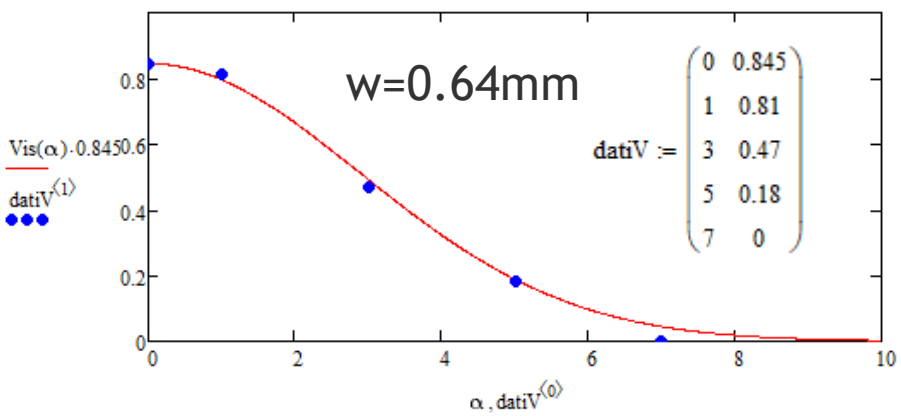
$$\delta = \frac{\lambda_0 f}{\pi w}$$

Risultati:

$$\delta := \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda\cdot f}{w} \qquad \Delta(\alpha) := 4\cdot\alpha\cdot\frac{\pi}{180} \qquad g(y) := e^{\frac{-y^2}{\delta^2}}$$

$$Vis(\alpha) := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\cdot g(y-\Delta(\alpha))\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)^2\,dy}$$

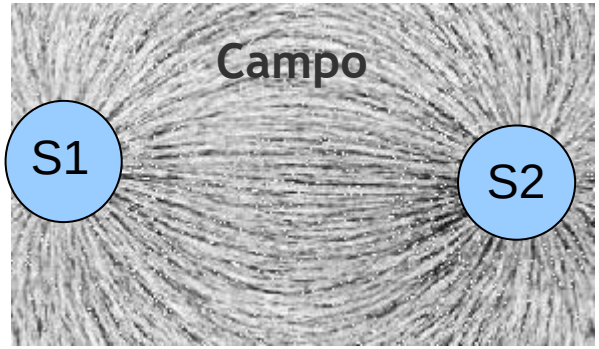




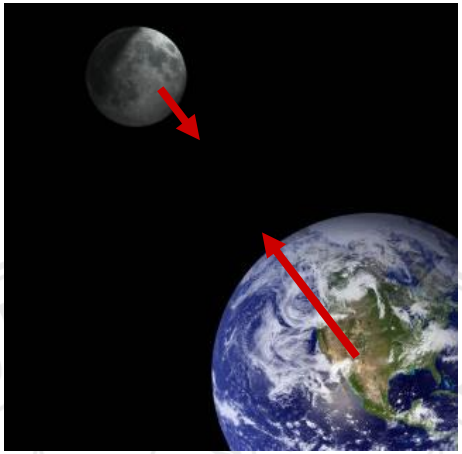
Località e realismo

Località:

***caso classico (secondo Einstein)**: i sistemi 1 e 2 interagiscono per mezzo di un campo che propaga al massimo alla velocità della luce. Inoltre il campo è definito localmente*



La teoria di Newton non è locale: Terra e Luna interagiscono istantaneamente (ho una propagazione superluminale dell'informazione)



***caso quantistico e relativistico (QFT)**: il fatto che il commutatore tra gli operatori di campo allo stesso tempo sia nullo assicura che eventi space-like non possono interagire. Ma (sul fronte dello stato) esiste lo stato entangled:*

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle_1|q\rangle_2 + |q\rangle_1|p\rangle_2)$$

Le particelle negli stati p e q sono correlate non localmente

Realismo:

***caso classico (realismo alla Einstein)**: il sistema possiede "elementi di realtà", caratteristiche ben definite a priori indipendentemente dall'operazione di misura*

Anche se non misuro affermo che la mela possiede una ben definita velocità

***caso quantistico**: prima della misura il sistema è in una sovrapposizione di stati, la misura lo fa precipitare in uno degli autostati dell'osservabile.*

***nota**: l'evoluzione temporale dello stato è deterministica e legata ad un certo operatore unitario. Il collasso della funzione d'onda è casuale e la sua avvenuta non è spiegabile tramite la parte deterministica della teoria…*

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{☺}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{☹}\rangle$$

Prima della misura il gatto è in una sovrapposizione di stati

Il principio base della QFT è: $[a_k, a^+_{k'}] = \delta(k-k')$

Questo principio assicura da un lato che non siano permessi eventi superluminali e dall'altro è responsabile dell'esistenza degli stati entangled. Le due cose non sono in contraddizione se dimostriamo che per mezzo di uno stato entangled non è possibile propagare informazione in modo superluminale.

$$[a_k, a^+_{k'}] = \delta(k-k')$$

$$[A(t,r), A(t,r')] = 0$$

osservabile

$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pq\rangle + |qp\rangle\right)$$

stato

Dimostrazione: $\omega_k = |k| c$ nota il valore assoluto

$$[A_x(t,z), A_x(t,z')] = \left[\sum_k \left(\frac{\hbar}{2|k|c\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k e^{-i|k|ct+ikz} + a_k^+ e^{+i|k|ct-ikz}\right), \sum_{k'} \left(\frac{\hbar}{2|k'|c\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{k'} e^{-i|k'|ct+ik'z'} + a_{k'}^+ e^{+i|k'|ct-ik'z'}\right)\right] =$$

$$= \sum_k \frac{\hbar}{2|k|c\varepsilon_0 V} \left(\underbrace{[a_k, a_k^+]}_{+1} e^{ik(z-z')} + \underbrace{[a_k^+, a_k]}_{-1} e^{-ik(z-z')}\right) = 0$$

perché k va da $-\infty$ a $+\infty$ (è simmetrica per valori $\pm$)

Esercizio: provare a fare il caso $[A_x(t,z), A_x(t',z)]$

$[a, a^+] = 1$ implica $|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pq\rangle + |qp\rangle\right)$

$$|\underset{p}{1}\,\underset{q}{1}\rangle = a_p^+ a_q^+ |0\rangle$$

$|11\rangle$ Notazione relativa al numero di occupazione

$$|p, q\rangle = a^{2\,+}_q \, a^{1\,+}_p |0\rangle$$

$|p, q\rangle$ Notazione standard

2° particelle

1° particelle

Voglio dimostrare che :

$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pq\rangle + |qp\rangle\right)$$

Dimostrazione:

le particelle sono identiche

$$\langle q', p' | 11 \rangle = \langle 0 | a^1_{q'} a^2_{p'} a^+_q a^+_p | 0 \rangle = \langle 0 | a_{q'} a_{p'} a^+_q a^+_p | 0 \rangle =$$

$$[a_{p'}, a^+_q] = \delta(p' - q) \Rightarrow a_{p'} a^+_q = a^+_q a_{p'} + \delta(p' - q)$$

$$= \langle 0 | a_{q'} a^+_q a_{p'} a^+_p + \delta(p' - q) a_{q'} a^+_p | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | a_{q'} a^+_q a_{p'} a^+_p | 0 \rangle + \delta(p' - q) \langle 0 | \underbrace{a^+_p a_{q'}}_{0} + \delta(q' - p) | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | a_{q'} a^+_q a_{p'} a^+_p | 0 \rangle + \delta(p' - q) \delta(q' - p) =$$

$$= \langle 0 | \left(a_q^+ a_{q'} + \delta(q'-q) \right) \left(a_p^+ a_{p'} + \delta(p'-p) \right) | 0 \rangle + \delta(p'-q)\,\delta(q'-p) =$$

$$= \delta(q'-q)\,\delta(p'-p) + \delta(p'-q)\,\delta(q'-p)$$

Ovvero: $$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|pq\rangle + |qp\rangle \right)$$

Ho una particella con impulso p e una con impulso q poichè le particelle sono identiche posso avere che la prima particella ha impulso p e la seconda q o anche la prima q e la seconda p. Queste due ampiezze di probabilità sono sovrapposte.

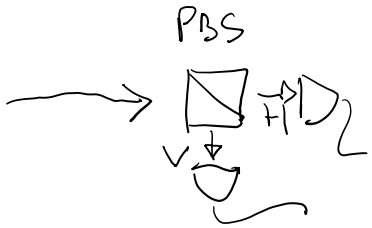
Ad esempio prendo lo stato $$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|HH\rangle + |VV\rangle \right)$$

E dimostro che non è possibile trasmettere informazione in modo superluminale.

Le due particelle potrebbero essere molti distanti, una sulla Terra e l'altra sulla Luna, ma si trovano in uno stato entangled come quello scritto sopra.

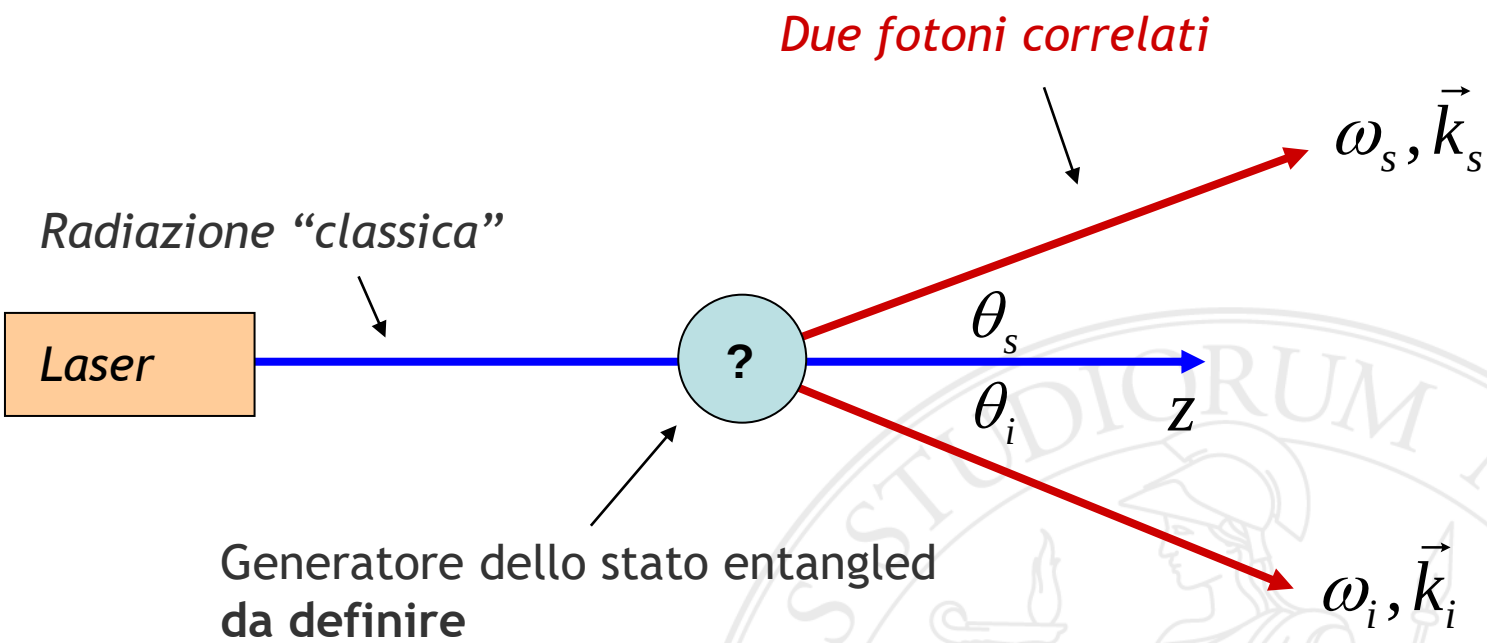
Voglio trasmettere istantaneamente il bit di informazione 1 (che corrisponde ad esempio ad H) dalla Terra alla Luna. Per fare questo misuro la polarizzazione del fotone che ho sulla terra.
Il collasso però è probabilistico quindi ho il 50% di probabilità di trasmettere 1 (quello che vorrei) e il 50% di trasmettere 0 (polarizzazione V).
Dunque anche se il collasso sulla particella che si trova sulla Luna è istantaneo l'informazione è persa. Quindi non ho alcuna propagazione superluminale dell'informazione ma ho solo generato rumore.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HH\rangle + |VV\rangle\right)$$



H 50%
V 50%

Stato entangled in polarizzazione



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,H\rangle_s|1,H\rangle_i + |1,V\rangle_s|1,V\rangle_i\right)$$

Stato entangled nella polarizzazione

Confronto tra stato entangled e mistura statistica

Se osservo H e V lo stato entangled risulta indistinguibile da una mistura statistica

Stato entangled

$$|\Psi_{ent}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_s|H\rangle_i + |V\rangle_s|V\rangle_i\right)$$

Ho una probabilità del 50% di vedere H e del 50% di vedere V

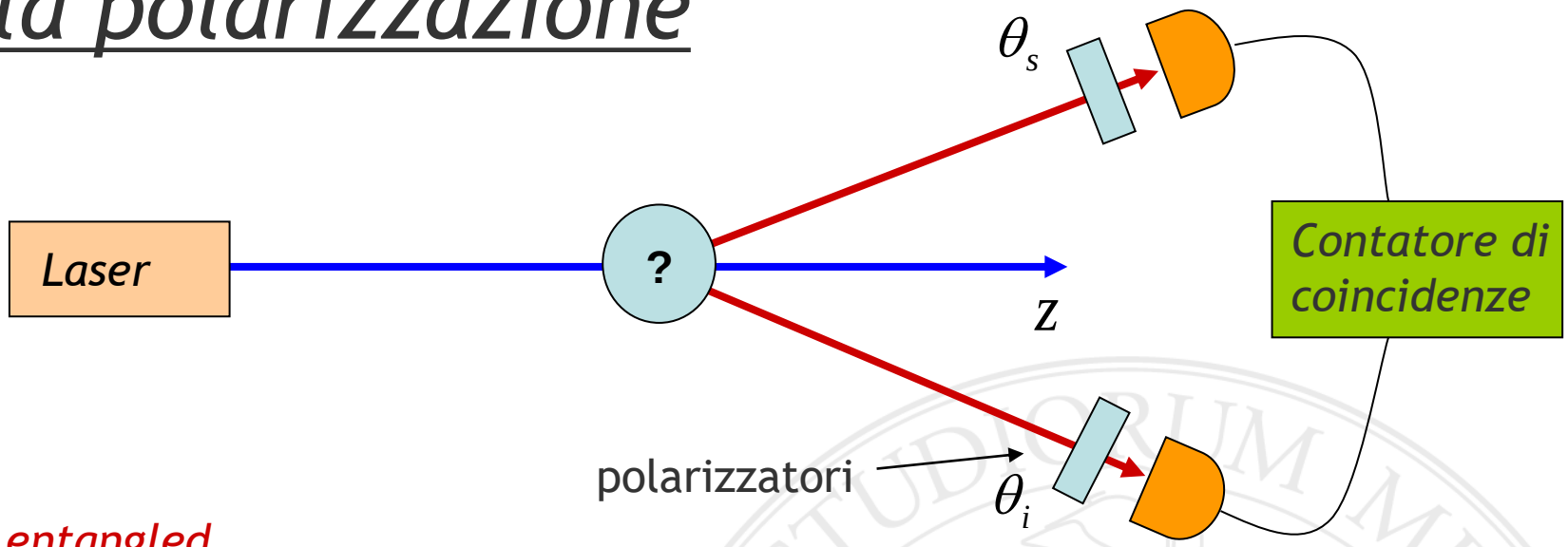
Mistura statistica

$$\rho_{mix} = \frac{1}{2}|H\rangle_s|H\rangle_{i\,s}\langle H|_i\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle_s|V\rangle_{i\,s}\langle V|_i\langle V|$$

Nel 50% dei casi genero H e nel restante 50% genero V

E' necessario un esperimento per distinguere i due casi

Misura delle correlazioni non locali nella polarizzazione



Stato entangled

$$P_{ent}(\theta_s,\theta_i)=\langle\theta_s,\theta_i|\rho_{ent}|\theta_s,\theta_i\rangle$$

Mistura statistica

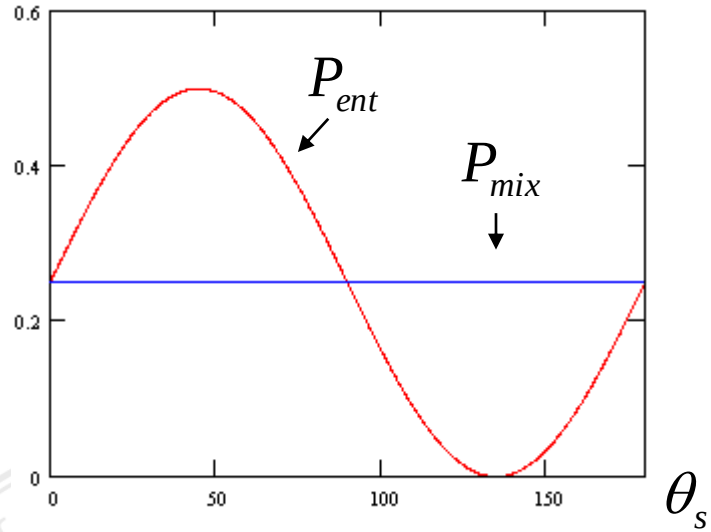
$$P_{mix}(\theta_s,\theta_i)=\langle\theta_s,\theta_i|\rho_{mix}|\theta_s,\theta_i\rangle$$

Calcolo la probabilità di vedere un conteggio in contemporanea in funzione degli assi dei due polarizzatori

Poniamo $\theta_i = 45°$ *e andiamo a vedere cosa succede in funzione di* θ_s

$$P_{mix}(\theta_s, 45°) = \frac{1}{4}$$

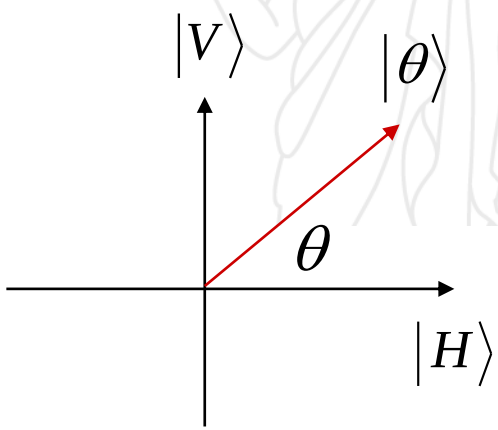
$$P_{ent}(\theta_s, 45°) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_s - 45°)$$



In questo modo i due casi risultano facilmente distinguibili

Il calcolo esplicito viene lasciato per esercizio; considerare che lo stato indicato con θ è:

$$|\theta\rangle = \cos(\theta)|H\rangle + \sin(\theta)|V\rangle$$

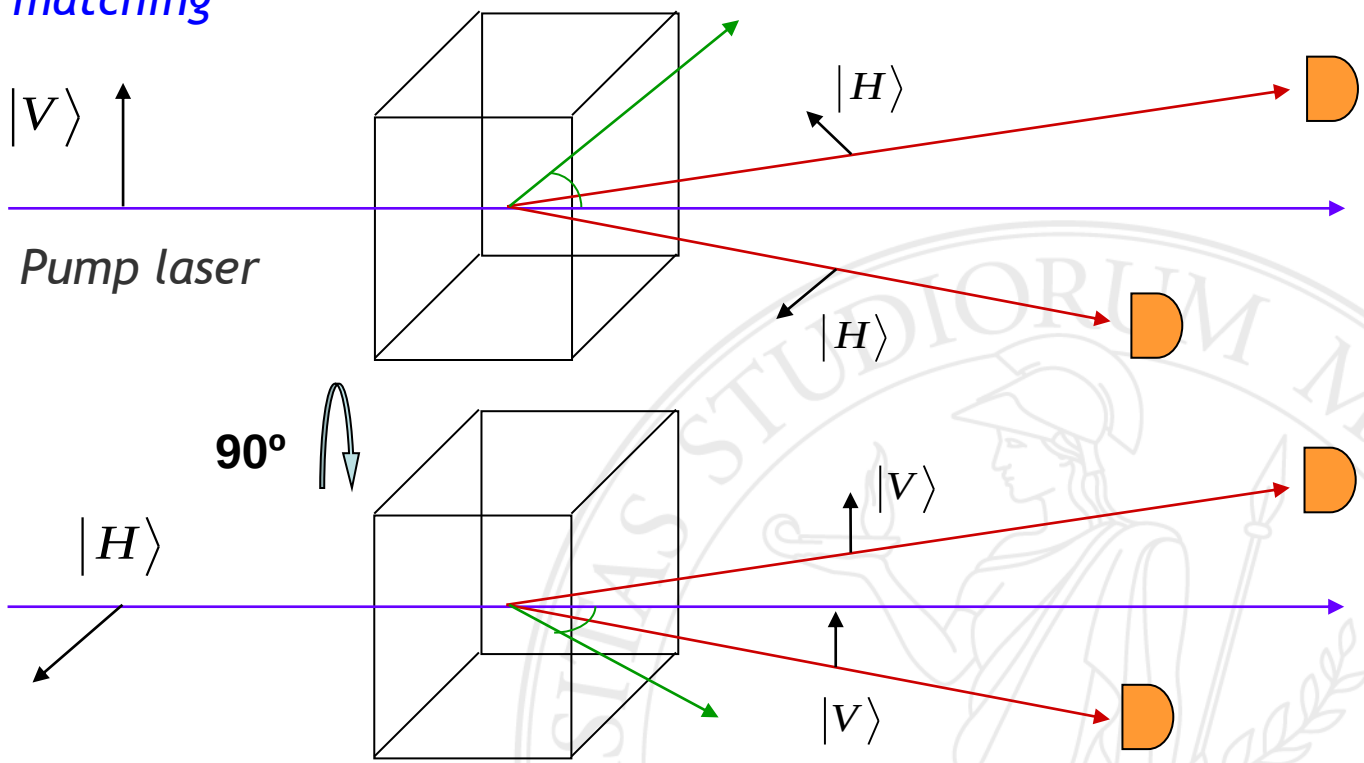


Generazione dello stato entangled in polarizzazione

Asse ottico del cristallo non lineare

Type I phase matching

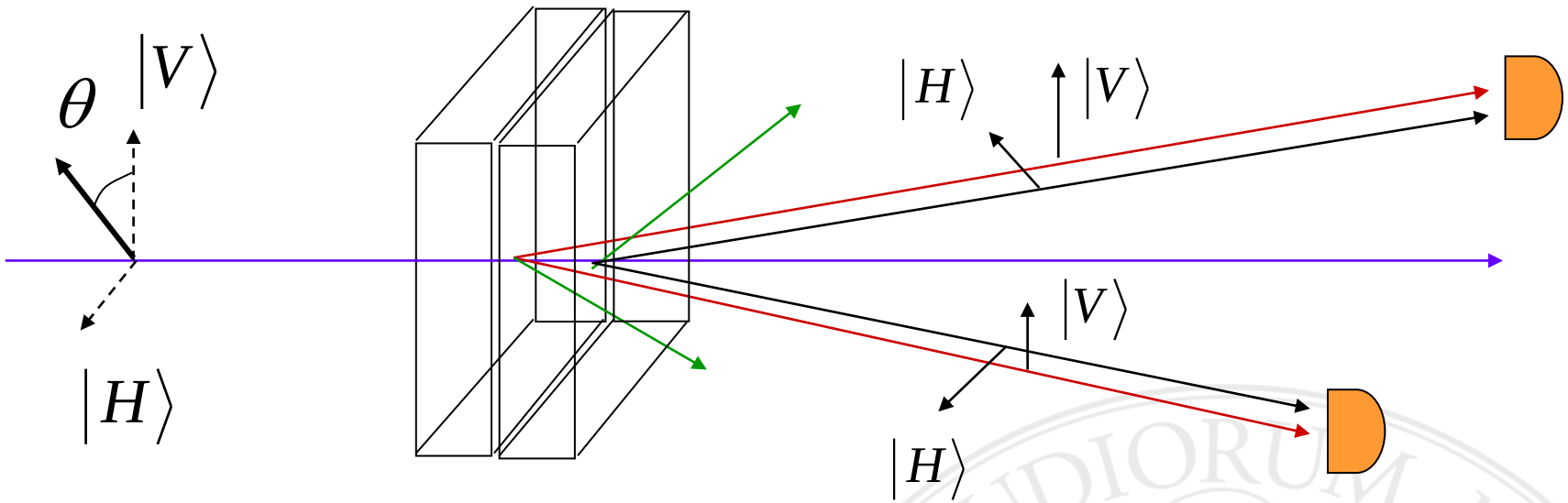
e = o + o



Se ruoto di 90º sia la polarizzazione di pompa che l'asse ottico del cristallo, allora anche la PDC avrà la polarizzazione ruotata di 90º

P. G. Kwiat et al,
Phys. Rev. A. 60, R773 (1999)

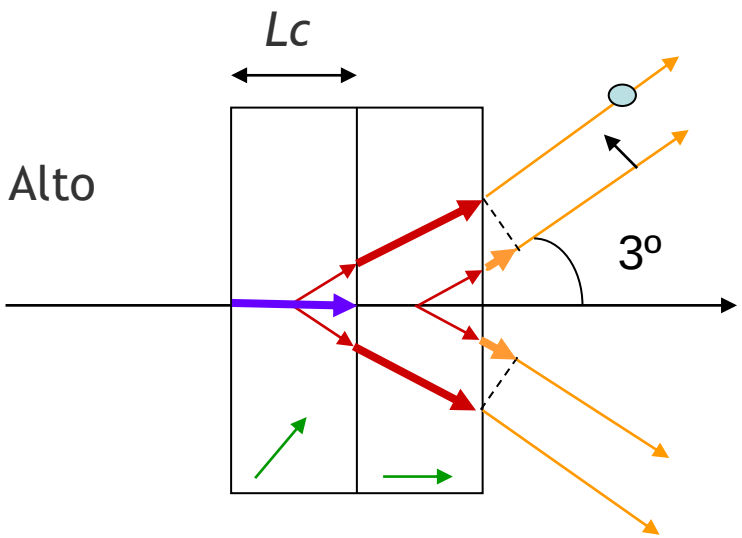
2 cristalli non lineari



$$|\Psi_{ent}\rangle = \cos(\theta)|H\rangle_s|H\rangle_i + \sin(\theta)e^{i\phi}|V\rangle_s|V\rangle_i$$

Se ragionassi "classicamente" concluderei che si genera una mistura statistica perché talvolta genero H e talvolta genero V. Ma se considero la meccanica quantistica allora devo sommare le ampiezze di probabilità, così facendo ottengo uno stato entangled.

Lo sfasamento ϕ tra HH e VV



$$|\Psi\rangle_{cristallo} \propto A(\omega_p)|P\rangle_s|P\rangle_i$$

Ampiezza complessa del laser

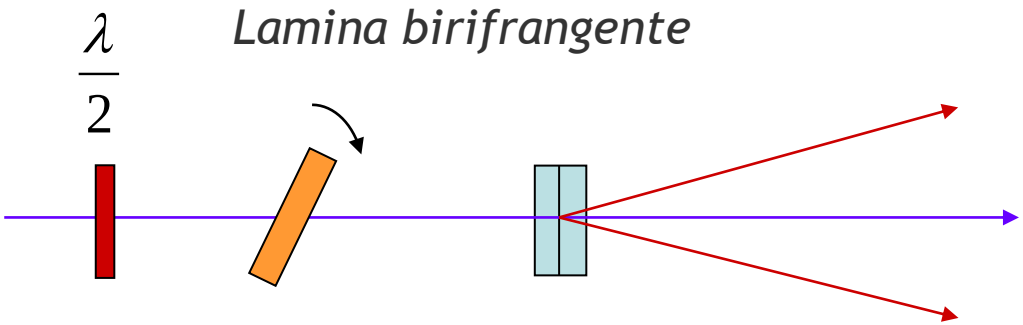
$$|\Psi_{ent}\rangle = \cos(\theta)e^{ik_p^o(\lambda_p)L_c + i2k_{PDC}(\lambda_{PDC})\cdot\delta_{W-Off}}|H\rangle_s|H\rangle_i +$$

$$\sin(\theta)e^{i2k_{PDC}^e(\lambda_{PDC})L_c/\cos(3/n_{PDC}^e)}|V\rangle_s|V\rangle_i$$

Da considerare soltanto i cammini ottici diversi per la parte HH e la parte VV. Per la parte HH è da considerare il cammino ottico della pompa nel primo cristallo e la parte esterna dovuta al walk-off. Per la parte VV il fatto che la PDC generata nel primo cristallo deve attraversare il secondo (attenzione alla conservazione dell'impulso trasverso)

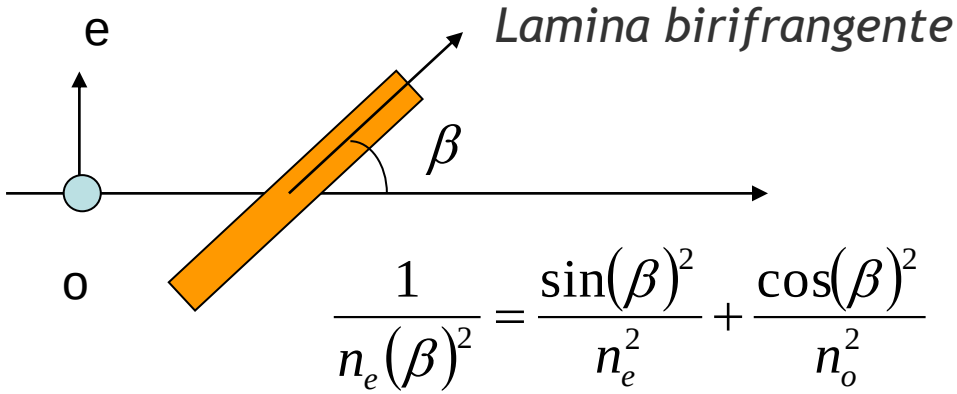
Controllo del bilanciamento e della fase

Per mezzo di una $\lambda/2$ e di una lamina birifrangente con l'asse principale disposto sul piano orizzontale è possibile impostare a piacere θ e ϕ.



Dopo questi due elementi ottici possiamo scrivere l'ampiezza del laser nel seguente modo:

$$A_p\left(\sin(\theta)e^{i\phi(\beta)}\hat{e}_H+\cos(\theta)\hat{e}_V\right)$$



$$\frac{1}{n_e(\beta)^2}=\frac{\sin(\beta)^2}{n_e^2}+\frac{\cos(\beta)^2}{n_o^2}$$

Dal momento che la PDC è proporzionale all'ampiezza del laser otteniamo:

$$\left|\Psi_{ent}\right\rangle=\cos(\theta)\left|H\right\rangle_s\left|H\right\rangle_i+\sin(\theta)e^{i(\phi+\phi(\beta))}\left|V\right\rangle_s\left|V\right\rangle_i$$

PDC *lamina*

Base di Bell:

$$\begin{cases} |\psi_+\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle) \\ |\psi_-\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle) \\ |\varphi_+\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle) \\ |\varphi_-\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle - |V\rangle|V\rangle) \end{cases}$$

Per generarli metto una lamina lambda/2 su uno dei due percorsi ruotata di 45° per scambiare H e V

Per generarli uso la lamina posta prima del cristallo per settare in modo opportuno la fase

$$|\psi_-\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle)$$

Questo stato sembrerebbe antisimmetrico ma i fotoni sono bosoni e quindi lo stato deve essere simmetrico. Ciò è dovuto al fatto che la notazione standard si presta a fraintendimenti.

Devo riscrivere lo stato con la notazione relativa al numero di occupazione e far vedere che è simmetrico.
Devo considerare due gradi di libertà: uno è l'impulso perchè il fotone può essere diretto lungo s o lungo i e l'altro è la polarizzazione H o V. Quindi nella notazione relativa al numero di occupazione ho 4 possibili ket:

$$|\psi_-\rangle \stackrel{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle_s|\mathrm{V}\rangle_i - |\mathrm{V}\rangle_s|\mathrm{H}\rangle_i)$$

Notazione standard

$$|\psi_-\rangle \stackrel{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1001\rangle - |0110\rangle)$$

H,s	V,s	H,i	V,i

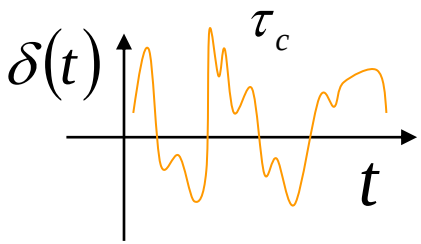
Notazione relativa al numero di occupazione: in questo caso si nota a vista che lo stato è simmetrico per scambio delle particelle come deve essere

Bosone $[a^\dagger_{Hs}, a^\dagger_{Vi}] = 0 \Rightarrow |1001\rangle = a^\dagger_{Hs} a^\dagger_{Vi}|0000\rangle = a^\dagger_{Vi} a^\dagger_{Hs}|0000\rangle = |1001\rangle$

Fermione $\{b^\dagger_{Hs}, b^\dagger_{Vi}\} = 0 \Rightarrow |1001\rangle = b^\dagger_{Hs} b^\dagger_{Vi}|0000\rangle = -b^\dagger_{Vi} b^\dagger_{Hs}|0000\rangle = -|1001\rangle$

Accenni agli effetti di decoerenza

Effetto legato al tempo di coerenza del laser di pompa



La fase temporale del laser varia velocemente con un tempo di coerenza che è tanto più piccolo quando più è largo lo spettro (nel nostro caso è circa 1ps)

Nello scrivere lo stato alla fine dei due cristalli devo considerare che le due ampiezze che arrivano nello stesso tempo alla fine dei cristalli sono state "generate" a due tempi diversi all'interno dei rispettivi cristalli

$$|\Psi_{ent}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\delta(t)}|H\rangle_s|H\rangle_i + e^{i\delta(t+\Delta\tau)}|V\rangle_s|V\rangle_i\right)$$

$$\rho_{ent}(t) = |\Psi_{ent}(t)\rangle\langle\Psi_{ent}(t)| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^{-i(\delta(t+\Delta\tau)-\delta(t))} \\ \frac{1}{2}e^{+i(\delta(t+\Delta\tau)-\delta(t))} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi acquisizioni fatte a tempi diversi hanno fasi diverse negli elementi fuori diagonale. Per ottenere lo stato misurato dobbiamo integrare su tutte le fluttuazioni di fase possibili. Ovvero dobbiamo integrare sul tempo:

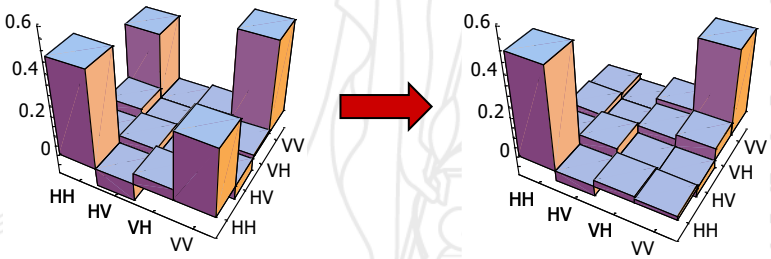
$$\rho_{\exp} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \rho_{ent}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{-i(\delta(t+\Delta\tau)-\delta(t))}dt \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{i(\delta(t+\Delta\tau)-\delta(t))}dt & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_c}} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_c}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= p\,\rho_{ent} + (1-p)\,\rho_{mix}$$

$$p = e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_c}}$$

Decoerenza

Quando il delay time diventa confrontabile con il tempo di coerenza del laser la decoerenza agisce e gli elementi fuori diagonale si abbassano



Dibattito sulla meccanica quantistica

Favorevoli	Contrari
Bohr	Einstein
Heisenberg	Planck
Born	De Broglie
Dirac	Schroedinger
Pauli	

"La M.Q. è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. E' una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare più a fondo i segreti del gran Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi col mondo."

Einstein, 1926

La meccanica quantistica prevede correlazioni non locali e non prevede il realismo alla Einstein. Ciò indusse molti fisici a ritenerla una teoria incompleta, primo tra tutti Einstein.

Convegno di Solvay del 1930

"Einstein scendeva a colazione ed esprimeva i suoi dubbi sulla nuova teoria quantistica, ed ogni volta aveva immaginato qualche bell'esperimento dal quale si vedeva che la teoria non funzionava. ... Pauli ed Heisenberg, che erano presenti, non prestavano molta attenzione (macché, tutto va bene). Bohr, viceversa ci rifletteva a fondo e la sera, a cena, quando eravamo tutti riuniti, analizzava minuziosamente il problema fino a chiarirlo"

Otto Stern

Meccanica quantistica: *il sistema è descritto dallo stato e lo stato è una sovrapposizione di autostati di un osservabile (l'osservabile è un operatore hermitiano perchè gli autovalori devono essere reali). L'evoluzione temporale deterministica dello stato è data da un operatore unitario (in modo che operatori hermitiani siano mandati in operatori hermitiani). Quando misuro quanto detto fin qui finisce e inizia un'altra teoria (tutta ancora da definire nei suoi aspetti di base) attraverso la quale si ottiene il collasso probabilistico dello stato e quindi il risultato della misura. Dunque, prima della misura il sistema si trova in una sovrapposizione quantistica di stati e quando faccio la misura il risultato è solo di tipo probabilistico.*

Paradosso E.P.R. 1935

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

Se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica che corrisponde a questa realtà.

Secondo E.P.R. lo stato entangled implica che posizione e impulso sono due elementi di realtà fisica (posizione ed impulso della seconda particella sono noti una volta misurata la prima senza toccare la seconda…). Al tempo stesso la M.Q. sostiene che posizione ed impulso non possono essere entrambi definiti. Quindi la M.Q. è una teoria non completa.

A. Einstein et al,
Phys. Rev. 47, 777(1935)

Situazione prima del 1964

Non esisteva una procedura sperimentale per rispondere alla seguente domanda:

La teoria fisica che meglio descrive la realtà deve essere locale o non locale? Deve essere dotata di realismo alla Einstein oppure no? Nota: riferendosi ad una QFT la domanda giusta non è se la teoria deve essere locale o non locale, ma se deve o meno prevedere correlazioni non locali

La domanda era quindi di tipo filosofico e non scientifico. Una teoria scientifica per essere tale deve poter essere supportata sperimentalmente.

Negli anni 50 furono inoltre formulate le teorie a variabili nascoste per tentare di spiegare le apparenti correlazioni non locali per mezzo di una teoria locale basata su variabili non accessibili allo sperimentatore (tutto è locale e realistico ma il risultato dipende dal valore di variabili non note)

La disuguaglianza di Bell

Per mezzo dell'esperimento descritto in precedenza siamo in grado di distinguere una mistura statistica da uno stato entangled.

Ma la domanda a cui dobbiamo rispondere è più generale. Lo scopo che ci poniamo è quello di escludere l'insieme delle teorie locali o l'insieme delle teorie «non locali».

Le teorie a variabili nascoste riescono a mimare abbastanza bene i risultati sperimentali e in assenza di uno strumento di carattere generale (un po' come la funzione di correlazione dell'intensità) rimaniamo con il dubbio che ne esista una capace di riprodurre esattamente i risultati della meccanica quantistica.

La disuguaglianza di Bell è lo strumento che ci permette di escludere l'insieme delle teorie locali o quello delle teorie «non locali» (e il realismo?)

Physics, *1*, 195-200 (1964).

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX

JOHN S. BELL†

I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no "hidden variable" interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

Nelle conclusioni

In a theory in which parameters are added to quantum mechanics to determine the results of individual measurements, without changing the statistical predictions, there must be a mechanism whereby the setting of one measuring device can influence the reading of another instrument, however remote. Moreover, the signal involved must propagate instantaneously, so that such a theory could not be Lorentz invariant.

Disuguaglianza di Bell secondo lo schema di Sakurai

Secondo la meccanica quantistica lo stato di singoletto di due particelle di spin=1/2 è:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle_1|z-\rangle_2 - |z-\rangle_1|z+\rangle_2\right)$$

In questo caso abbiamo scritto lo stato scegliendo l'asse z come asse di quantizzazione. Ma questo stato rimane invariante rispetto alla scelta dell'asse, se ad esempio scegliamo l'asse x otteniamo:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x+\rangle_1|x-\rangle_2 - |x-\rangle_1|x+\rangle_2\right)$$

Questo è ovvio perchè questo stato non può avere direzioni privilegiate nello spazio essendo nullo lo spin totale.

Ciò che ci interessa notare è che se troviamo che lo spin della particella 1 è + allora quello della particella 2 sarà -. E questo rispetto a qualsiasi asse.

Possiamo formulare una teoria che facendo uso dell'ipotesi di località e di realismo racchiude questa proprietà appena ricordata. Possiamo ad esempio pensare che se abbiamo molte di queste coppie di particelle queste saranno caratterizzate da una serie di popolazioni relative a tre assi diversi come segue:

Popolazione	*Particella 1*	*Particella 2*
N1	*(a+,b+,c+)*	*(a-,b-,c-)*
N2	*(a+,b+,c-)*	*(a-,b-,c+)*
N3	*(a+,b-,c+)*	*(a-,b+,c-)*
N4	*(a+,b-,c-)*	*(a-,b+,c+)*
N5	*(a-,b+,c+)*	*(a+,b-,c-)*
N6	*(a-,b+,c-)*	*(a+,b-,c+)*
N7	*(a-,b-,c+)*	*(a+,b+,c-)*
N8	*(a-,b-,c-)*	*(a+,b+,c+)*

***Relismo**: le particelle del tipo N_i hanno determinate proprietà già prima della misura. Il risultato è predeterminato.*

***Localita'** : il risultati della misura sulle particelle del tipo N_i è indipendente dal fatto che sulla particella 1 si misuri lungo a, b o c*

Una volta definite queste popolazioni possiamo calcolare le probabilità di trovare la particella 1 con lo spin + lungo un certo asse e la particella 2 + lungo un altro asse, ad esempio:

$$P(a+,b+)=\frac{N3+N4}{\sum Ni}$$

Similmente otteniamo:

$$P(a+,c+)=\frac{N2+N4}{\sum Ni} \qquad P(c+,b+)=\frac{N3+N7}{\sum Ni}$$

Per cui risulta:

$$\boxed{P(a+,b+)\leq P(a+,c+)+P(c+,b+)}$$

Dal momento che sicuramente abbiamo:

$$N3+N4\leq(N2+N4)+(N3+N7)$$

Se la disuguaglianza viene violata allora possiamo dire che non eisiste alcun tipo di teoria locale in grado di spiegare il risultato.

La disuguaglianza di Bell così formulata crea dei problemi di tipo sperimentale. Infatti dal punto di vista procedurale prima di applicare la disuguaglianza siamo costretti a verificare sperimentalemente di avere un sistema in accordo con la tabella e ciò è molto difficile.

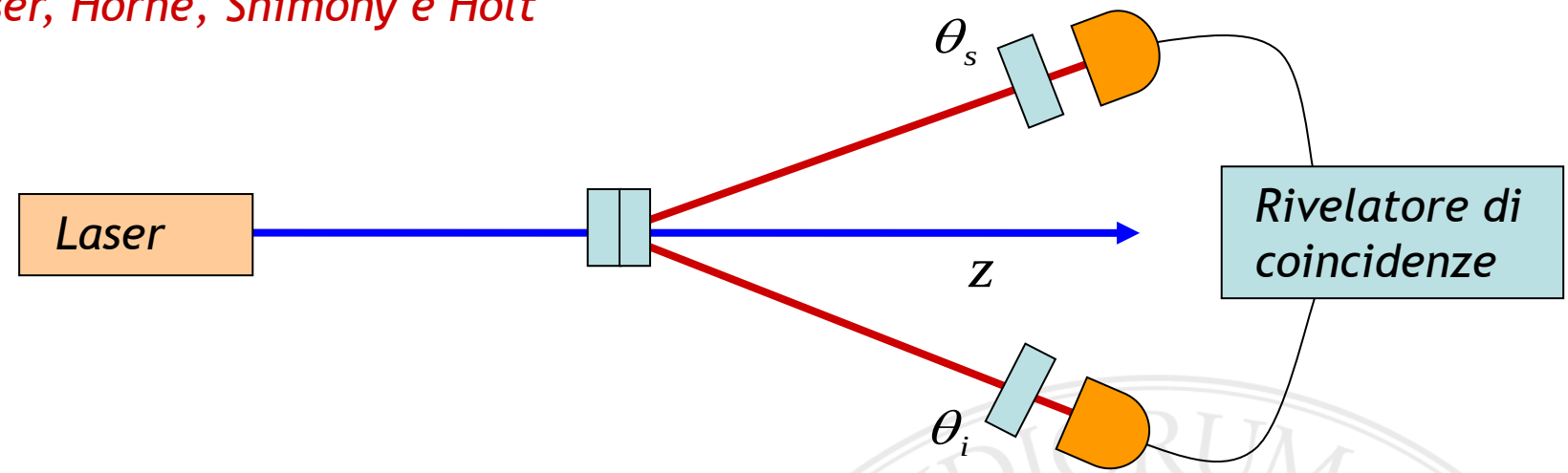
Pochi anni dopo quattro fisici riformularono la disuguaglianza di Bell senza questa limitazione, questi quattro fisici sono:

Clauser, Horne, Shimony e Holt.

In questo caso si arriva ad una disuguaglianza del tutto generale che non fa uso di nessun tipo di ipotesi particolare sul sistema.

Disuguaglianza di Bell secondo CHSH

Clauser, Horne, Shimony e Holt



Vogliamo definire le probabilità $P(\theta_s, \theta_i)$ *per mezzo di una teoria a variabili nascoste locale:*

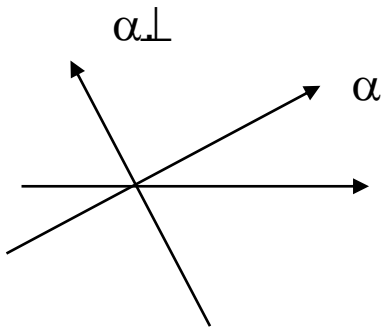
Le coppie di fotoni sono caratterizzate da una certa variabile non nota allo sperimentatore che chiamiamo λ*. Questa variabile sarà caratterizzata da una funzione di distribuzione* $\rho(\lambda)$ *normalizzata.*

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$$

λ = *polarizzazione nascosta*

J. F. Clauser et al,
Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969)

Il risultato di una misura dipende dal valore della variabile nascosta λ. Ovvero, scelto un certo asse di polarizzazione relativo al polarizzatore sul signal possiamo definire una funzione A che assume il valore 1 quando vediamo il fotone attraverso il polarizzatore ad angolo α e -1 quando vediamo il fotone ad angolo $\alpha\perp$



$$A(\lambda,\alpha)=\begin{cases}1 & H_\alpha \\ -1 & V_\alpha\end{cases}$$

Il risultato dipenderà dal particolare valore che assume λ

Considerando l'asse α sul signal e l'asse β sull'idler avremo:

$$P(\alpha,\beta)=\int\left(\frac{1+A(\lambda,\alpha)}{2}\right)\left(\frac{1+B(\lambda,\beta)}{2}\right)\rho(\lambda)d\lambda$$

$$P(\alpha,\beta\perp)=\int\left(\frac{1+A(\lambda,\alpha)}{2}\right)\left(\frac{1-B(\lambda,\beta)}{2}\right)\rho(\lambda)d\lambda$$

$$P(\alpha\perp,\beta)=\int\left(\frac{1-A(\lambda,\alpha)}{2}\right)\left(\frac{1+B(\lambda,\beta)}{2}\right)\rho(\lambda)d\lambda$$

$$P(\alpha\perp,\beta\perp)=\int\left(\frac{1-A(\lambda,\alpha)}{2}\right)\left(\frac{1-B(\lambda,\beta)}{2}\right)\rho(\lambda)d\lambda$$

La cosa importante da notare è che il valore di A non è correlato al valore assunto da B (Località).Inoltre (da notare) il risultato della misura è correlato al valore di λ ma non è necessario che A e B abbiano valori unicamente definiti una volta impostata λ, la dimostrazione infatti procede in modo simile se consideriamo A e B delle probabilità (ipotesi di Realismo non necessaria)

Prima di introdurre il parametro S va definita E:

$$E(\alpha,\beta)=P(\alpha,\beta)+P(\alpha\perp,\beta\perp)-P(\alpha\perp,\beta)-P(\alpha,\beta\perp)$$

Sostituendo le precendenti in E si dimostra facilmente che:

$$E(\alpha,\beta)=\int A(\lambda,\alpha)B(\lambda,\beta)\rho(\lambda)d\lambda$$

Adesso scegliamo quattro angoli a, b, a', b' e definiamo S:

$$S=E(a,b)-E(a,b')+E(a',b)+E(a',b')$$

Usando la precedente abbiamo:

$$S=\int s(\lambda,a,b,a',b')\rho(\lambda)d\lambda$$

Dove risulta:

$$s(\lambda,a,b,a',b') = A(\lambda,a)[B(\lambda,b) - B(\lambda,b')] + A(\lambda,a')[B(\lambda,b) + B(\lambda,b')]$$

Poiche A e B possono assumere soltanto i valori +1 o -1, s potrà assumere soltanto i valori +2 o -2. Dunque la media di s ovvero S potrà assumere solo valori compresi tra +2 e -2. Quindi per ogni teoria locale:

$$\boxed{|S| \leq 2}$$

Questo risultato è completamente generale e vale per qualsiasi teoria locale e non dipende da particolari ipotesi sul sistema sul quale vengono fatte le misure.

Una procedura per la determinazione di S

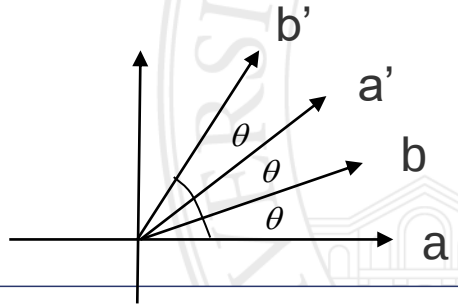
Prendiamo per vera la meccanica quantistica e applichiamo la procedura allo stato:

$$|\Psi_{ent}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_s|H\rangle_i + |V\rangle_s|V\rangle_i\right)$$

Con le regole della M.Q. scriviamo le probabilità $P(\alpha,\beta)$

$$P(\alpha,\beta) = |\langle\alpha|_i\langle\beta||\Psi_{ent}\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)|^2$$

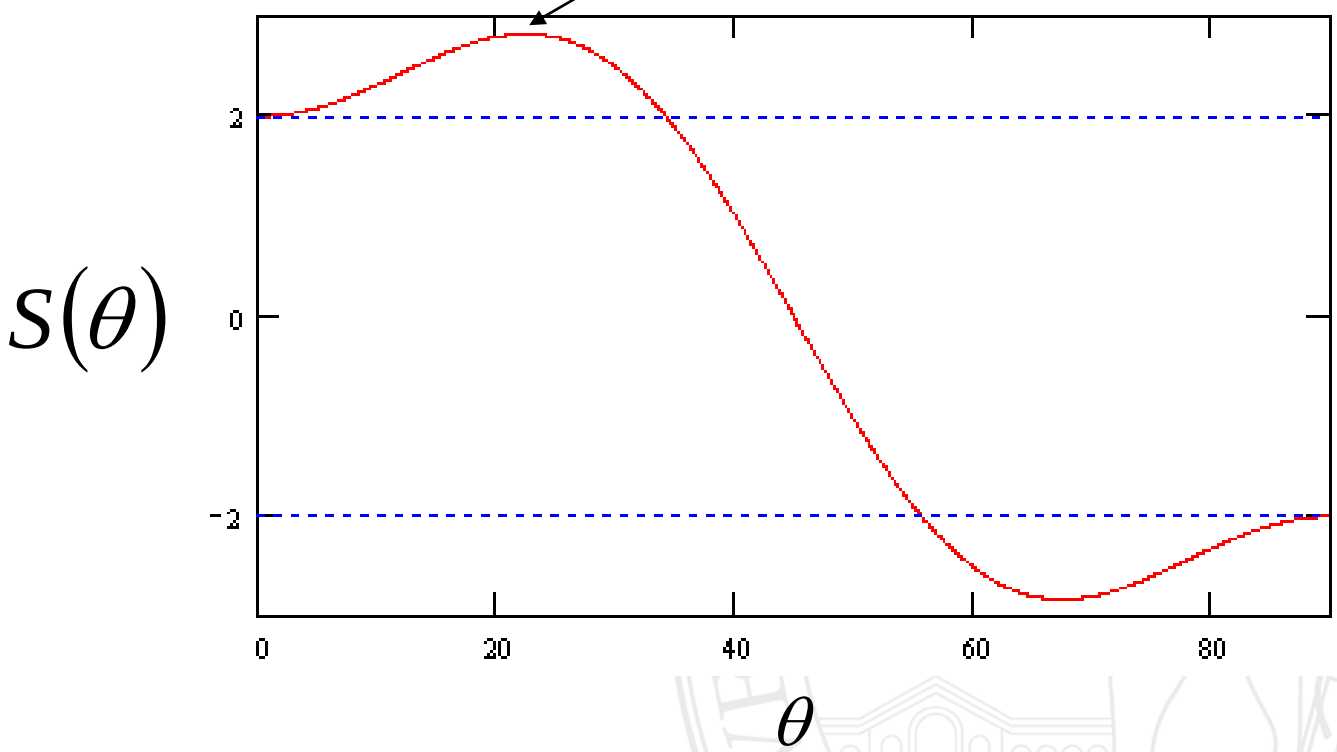
Poi scegliamo gli angoli a,b,a', b' con la seguente regola:



$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \theta \\ a' = 2\theta \\ b' = 3\theta \end{cases}$$

Così facendo otteniamo S attraverso la M.Q. come funzione di θ. Quindi notiamo che esistono valori di θ per i quali la disuguaglianza di Bell viene violata

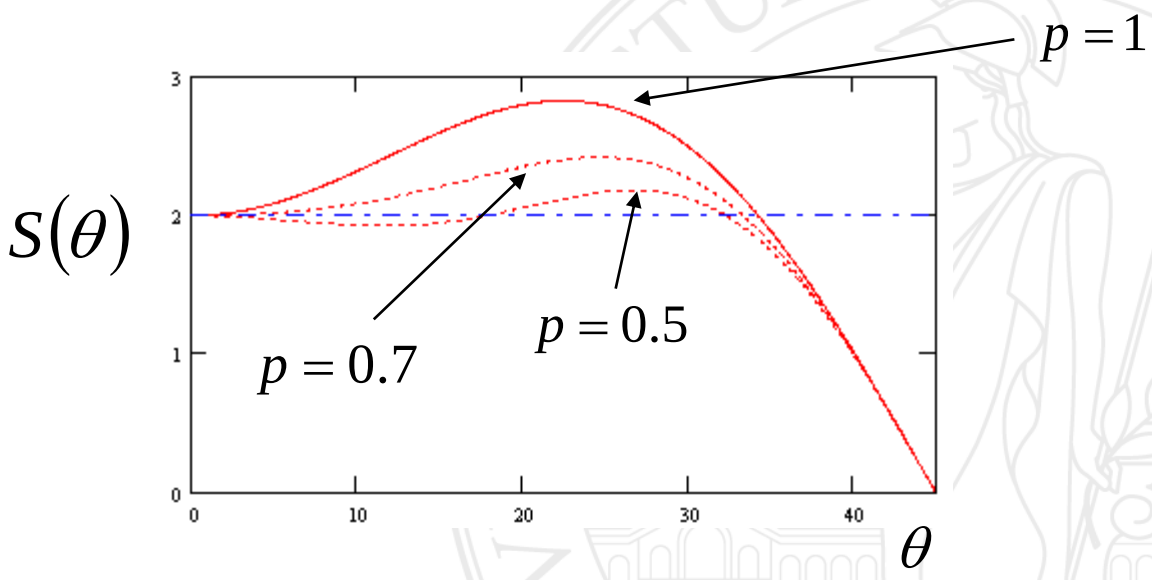
$$S(22.5°) = 2\sqrt{2} \approx 2.828$$



In un caso realistico la matrice densità della radiazione non sarà esattamente quella di uno stato entangled, infatti, se consideriamo gli effetti di decoerenza otteniamo:

$$\rho = p \cdot \rho_{ent} + (1-p)\rho_{mix}$$

Per mezzo di questa matrice densità è possibile ricalcolare S che adesso sarà funzione sia di θ che di p. In particolare S tende a diminuire al diminuire di p quindi sarà opportuno misurare la p dello stato ottenuto.



Procedura sperimentale per S

1) *Per prima cosa si misura la p dello stato generato. Nel nostro caso la p è uguale alla visibilità :*

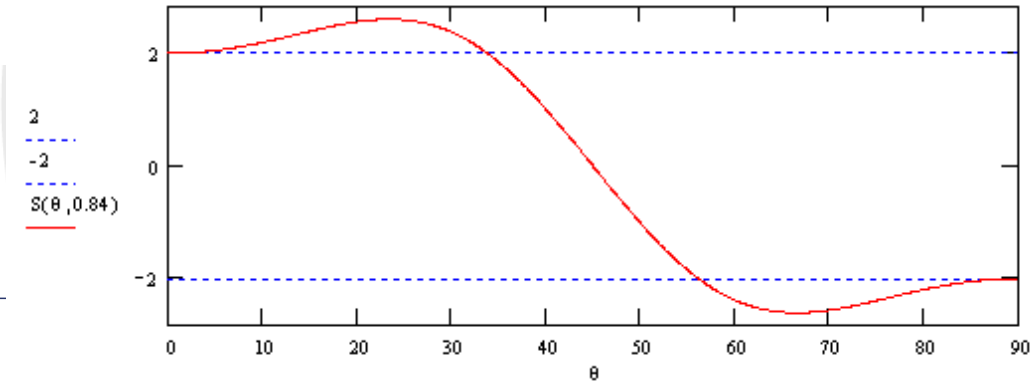
$$\rho = p \cdot \rho_{ent} + (1-p)\rho_{mix} \qquad Vis = \frac{Max - Min}{Max + Min} = \frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}(1-p) - \frac{1}{4}(1-p)}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}(1-p) + \frac{1}{4}(1-p)} = p$$

2) *Si grafica S in funzione di θ e si determina il valore ottimale di θ :*

$$P(\alpha,\beta,p) := p\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot\beta\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{180}\cdot\beta\right)\right)^2 + (1-p)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{180}\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot\beta\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{180}\cdot\beta\right)\right)^2\right]$$

$$E(\alpha,\beta,p) := P(\alpha,\beta,p) + P(\alpha+90,\beta+90,p) - P(\alpha+90,\beta,p) - P(\alpha,\beta+90,p)$$

$$S(\theta,p) := E(0,\theta,p) - E(0,3\cdot\theta,p) + E(2\cdot\theta,\theta,p) + E(2\cdot\theta,3\cdot\theta,p)$$



3) *Per ogni valore di E servono 4 misure (quindi 16 in tutto).*

$$E(a,b) = E(0,\theta) \qquad \{\, a = 0,\ b = \theta,\ a' = 2\theta,\ b' = 3\theta \,\}$$

Pol1	Pol2	Ncoinc
0	θ	$N(0,\theta)$
90	$\theta+90$	$N(90,\theta+90)$
90	θ	$N(90,\theta)$
0	$\theta+90$	$N(0,\theta+90)$

$$E(0,\theta) = \frac{N(0,\theta) + N(90,\theta+90) - N(90,\theta) - N(0,\theta+90)}{N(0,\theta) + N(90,\theta+90) + N(90,\theta) + N(0,\theta+90)}$$

4) *Una volta trovati i 4 valori di E si ottiene S:*

$$S(\theta) = E(0,\theta) - E(0,3\theta) + E(2\theta,\theta) + E(2\theta,3\theta)$$

5) *<u>E' fondamentale propagare l'errore su S</u> in modo da sapere per quante deviazioni standard la disuguaglianza viene violata.*

Riformulazione della disuguaglianza di Bell secondo CHSH senza l'ipotesi di realismo

Ridefinisco i nuovi A e B in modo che rappresentino una probabilità (quindi un valore compreso tra 0 e 1):

$\tilde{A}(\lambda,\alpha)$ e $\tilde{B}(\lambda,\beta)$ rappresentano le probabilità di vedere le particelle lungo gli assi α e β data λ

Quindi la relazione con i vecchi A e B è:

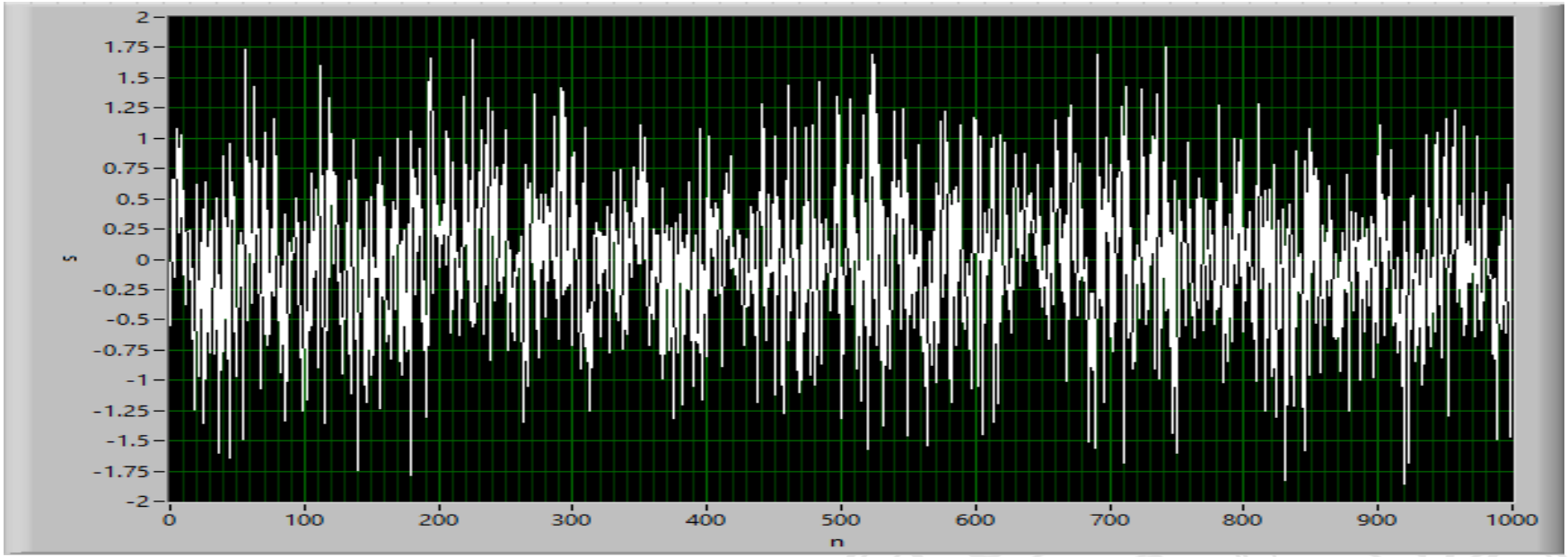
$$A(\lambda,\alpha) = 2\tilde{A}(\lambda,\alpha) - 1 \quad e \quad B(\lambda,\beta) = 2\tilde{B}(\lambda,\beta) - 1$$

Sostituendo nel risultato per s si ottiene:

$$s(\lambda,a,b,a',b') = 2\left[2\tilde{A}(\lambda,a)-1\right]\left[\tilde{B}(\lambda,b)-\tilde{B}(\lambda,b')\right] + 2\left[2\tilde{A}(\lambda,a')-1\right]\left[\tilde{B}(\lambda,b)+\tilde{B}(\lambda,b')-1\right]$$

Questo nuovo s è sempre compreso tra -2 e 2 (mentre prima era o 2 o -2).
Quindi la disuguaglianza per S continua a valere

Esempio: valori di s per i 4 valori di $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ estratti a caso tra 0 e 1



Ricapitolando:

1) l'ipotesi di realismo non è necessaria per la formulazione della disuguaglianza di Bell
2) Se la disuguaglianza viene violata allora la teoria che meglio descrive la realtà presenta correlazioni non locali. A questo punto ci si deve chiedere se questa teoria è dotata o meno di realismo alla Einstein
3) Se la teoria è dotata di realismo allora le correlazioni non locali possono dar luogo ad effetti superluminali (perchè non posso avere un collasso prababilistico dello stato), quindi affinchè la teoria non violi la relatività non deve essere dotata di realismo alla Einstein

VOLUME 49, NUMBER 2 PHYSICAL REVIEW LETTERS 12 JULY 1982

Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell's Inequalities

Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger
Institut d'Optique Théorique et Appliquée, Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique, Université Paris-Sud, F-91406 Orsay, France
(Received 30 December 1981)

The linear-polarization correlation of pairs of photons emitted in a radiative cascade of calcium has been measured. The new experimental scheme, using two-channel polarizers (i.e., optical analogs of Stern-Gerlach filters), is a straightforward transposition of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *gedankenexperiment*. The present results, in excellent agreement with the quantum mechanical predictions, lead to the greatest violation of generalized Bell's inequalities ever achieved.

$$S_{\text{expt}} = 2.697 \pm 0.015 .$$

Only two loopholes remain open for advocates of realistic theories without action at a distance.[10] The first one, exploiting the low efficiencies of detectors, could be ruled out by a feasible experiment.[11] The second one, exploiting the static character of all previous experiments, could also be ruled out by a "timing experiment" with variable analyzers[12] now in progress.

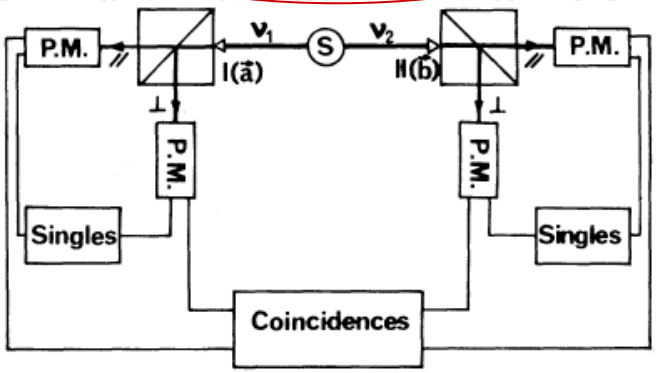


FIG. 2. Experimental setup. Two polarimeters I and II, in orientations $\vec{a}$ and $\vec{b}$, perform true dichotomic measurements of linear polarization on photons ν_1 and ν_2. Each polarimeter is rotatable around the axis of the incident beam. The counting electronics monitors the singles and the coincidences.

VOLUME 49, NUMBER 25 PHYSICAL REVIEW LETTERS 20 DECEMBER 1982

Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers

Alain Aspect, Jean Dalibard,[a] and Gérard Roger
Institut d'Optique Théorique et Appliquée, F-91406 Orsay Cédex, France

(Received 27 September 1982)

Correlations of linear polarizations of pairs of photons have been measured with time-varying analyzers. The analyzer in each leg of the apparatus is an acousto-optical switch followed by two linear polarizers. The switches operate at incommensurate frequencies near 50 MHz. Each analyzer amounts to a polarizer which jumps between two orientations in a time short compared with the photon transit time. The results are in good agreement with quantum mechanical predictions but violate Bell's inequalities by 5 standard deviations.

Bell thus insisted upon the importance of "experiments of the type proposed by Bohm and Aharonov,[6] in which the settings are changed during the flight of the particles."

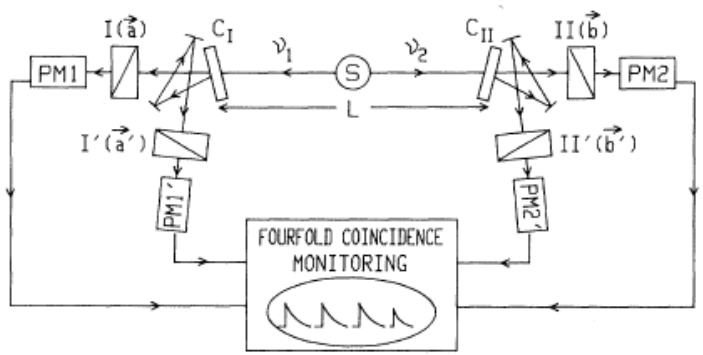
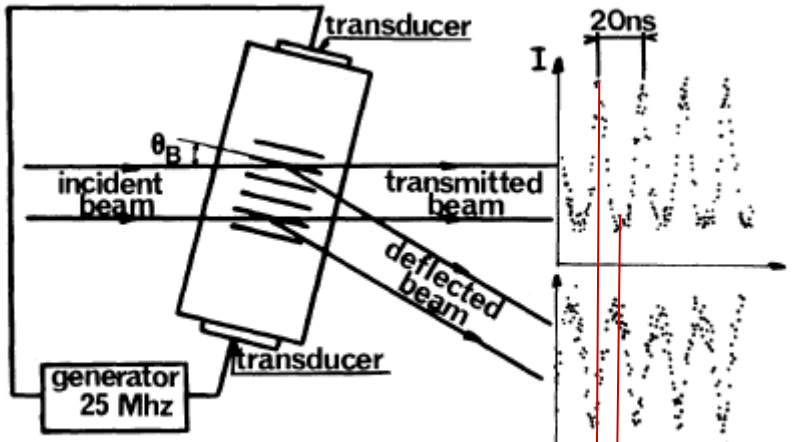


FIG. 2. Timing experiment with optical switches. Each switching device (C_I, C_{II}) is followed by two polarizers in two different orientations. Each combination is equivalent to a polarizer switched fast between two orientations.

Il tempo di volo è 40ns mentre il tempo di switch è 10ns. Inoltre i due modulatori sono scorrelati.



Quindi la modulazione avviene a 50MHz

10ns

NATURE | VOL 409 | 15 FEBRUARY 2001 | www.nature.com

Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection

M. A. Rowe*, D. Kielpinski*, V. Meyer*, C. A. Sackett*, W. M. Itano*, C. Monroe† & D. J. Wineland*

* *Time and Frequency Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, Colorado 80305, USA*
† *Department of Physics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48109, USA*

Two $^9Be^+$ $\quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$

Many experiments[1,6–15] have since been done that are consistent with quantum mechanics and inconsistent with local realism. But these conclusions remain the subject of considerable interest and debate, and experiments are still being refined to overcome 'loopholes' that might allow a local realistic interpretation. Here we have measured correlations in the classical properties of massive entangled particles ($^9Be^+$ ions): these correlations violate a form of Bell's inequality. Our measured value of the appropriate Bell's 'signal' is 2.25 ± 0.03, whereas a value of 2 is the maximum allowed by local realistic theories of nature. In contrast to previous measurements with massive particles, this violation of Bell's inequality was obtained by use of a complete set of measurements. Moreover, the high detection efficiency of our apparatus eliminates the so-called 'detection' loophole.

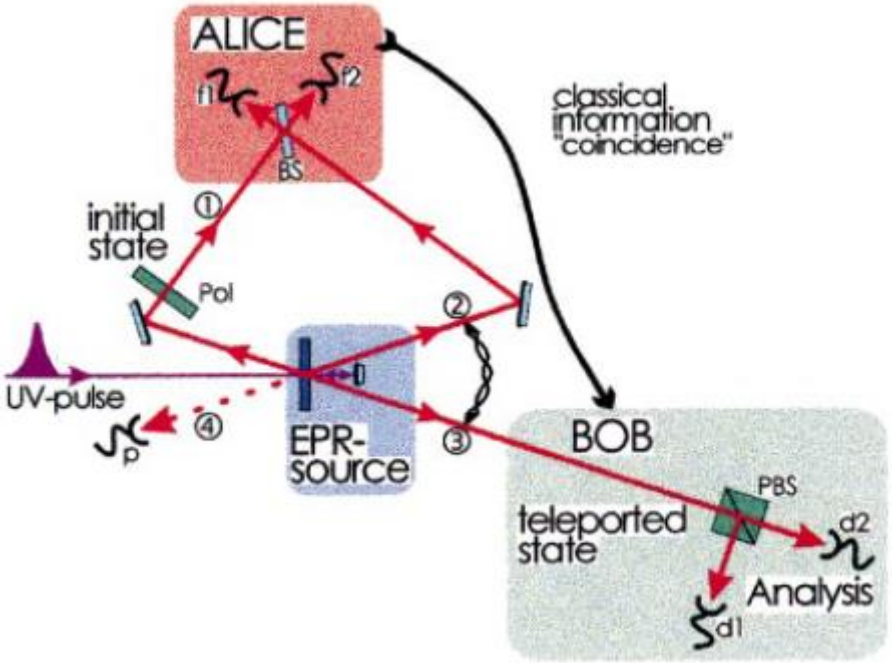
NATURE | VOL 390 | 11 DECEMBER 1997

Experimental quantum teleportation

Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter & Anton Zeilinger

Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, Technikerstr. 25, A-6020 Innsbruck, Austria

Quantum teleportation—the transmission and reconstruction over arbitrary distances of the state of a quantum system—is demonstrated experimentally. During teleportation, an initial photon which carries the polarization that is to be transferred and one of a pair of entangled photons are subjected to a measurement such that the second photon of the entangled pair acquires the polarization of the initial photon. This latter photon can be arbitrarily far away from the initial one. Quantum teleportation will be a critical ingredient for quantum computation networks.



A pulse of ultraviolet radiation passing through a nonlinear crystal creates the ancillary pair of photons 2 and 3. After retroflection during its second passage through the crystal the ultraviolet pulse creates another pair of photons, one of which will be prepared in the initial state of photon 1 to be teleported, the other one serving as a trigger indicating that a photon to be teleported is under way. Alice then looks for coincidences after a beam splitter BS where the initial photon and one of the ancillaries are superposed. Bob, after receiving the classical information that Alice obtained a coincidence count in detectors f1 and f2 identifying the $|\psi^-\rangle_{12}$ Bell state, knows that his photon 3 is in the initial state of photon 1 which he then can check using polarization analysis with the polarizing beam splitter PBS and the detectors d1 and d2. The detector p provides the information that photon 1 is under way.

Inizialmente ho i due stati:

$$|Q\rangle_1 = \alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1$$

$$|\psi_-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_2|V\rangle_3 - |V\rangle_2|H\rangle_3\right)$$

Lo stato complessivo è: $|Q\rangle_1 \otimes |\psi_-\rangle_{23}$

Adesso riscrivo questo stato usando la base de Bell per i fotoni 1 e 2, ovvero, uso le seguenti :

$$\begin{cases} |\psi_+\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle|V\rangle + |V\rangle|H\rangle\right) \\ |\psi_-\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle\right) \\ |\phi_+\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle\right) \\ |\phi_-\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle|H\rangle - |V\rangle|V\rangle\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H\rangle|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle\right) \\ |V\rangle|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_+\rangle - |\phi_-\rangle\right) \\ |H\rangle|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\right) \\ |V\rangle|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle\right) \end{cases}$$

Ottengo:

$$|Q\rangle_1 \otimes |\psi_-\rangle_{23} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_1|H\rangle_2\right)|V\rangle_3 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_1|V\rangle_2\right)|H\rangle_3 +$$

$$+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(|V\rangle_1|H\rangle_2\right)|V\rangle_3 - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(|V\rangle_1|V\rangle_2\right)|H\rangle_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\phi_+\rangle_{12} + |\phi_-\rangle_{12}\right)\alpha|V\rangle_3 - \frac{1}{2}\left(|\psi_+\rangle_{12} + |\psi_-\rangle_{12}\right)\alpha|H\rangle_3 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(|\psi_+\rangle_{12} - |\psi_-\rangle_{12}\right)\beta|V\rangle_3 - \frac{1}{2}\left(|\phi_+\rangle_{12} - |\phi_-\rangle_{12}\right)\beta|H\rangle_3 =$$

$$= \frac{1}{2}|\phi_+\rangle_{12}\left(\alpha|V\rangle_3 - \beta|H\rangle_3\right) +$$

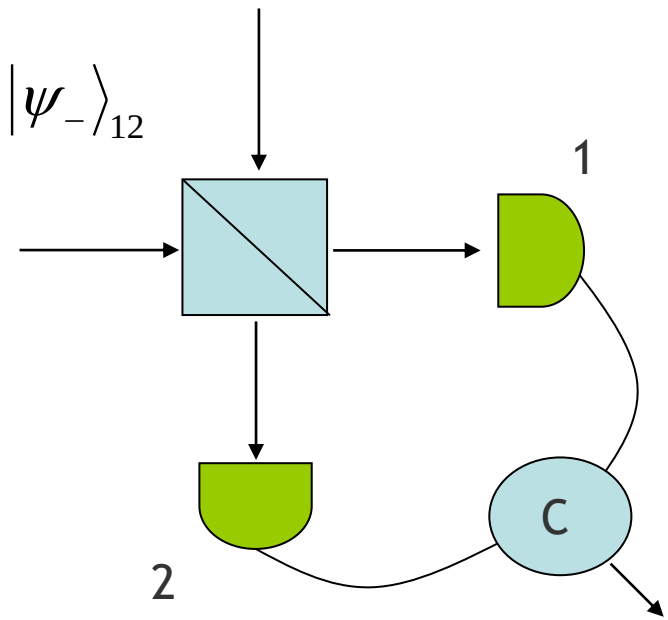
$$\frac{1}{2}|\phi_-\rangle_{12}\left(\alpha|V\rangle_3 + \beta|H\rangle_3\right) +$$

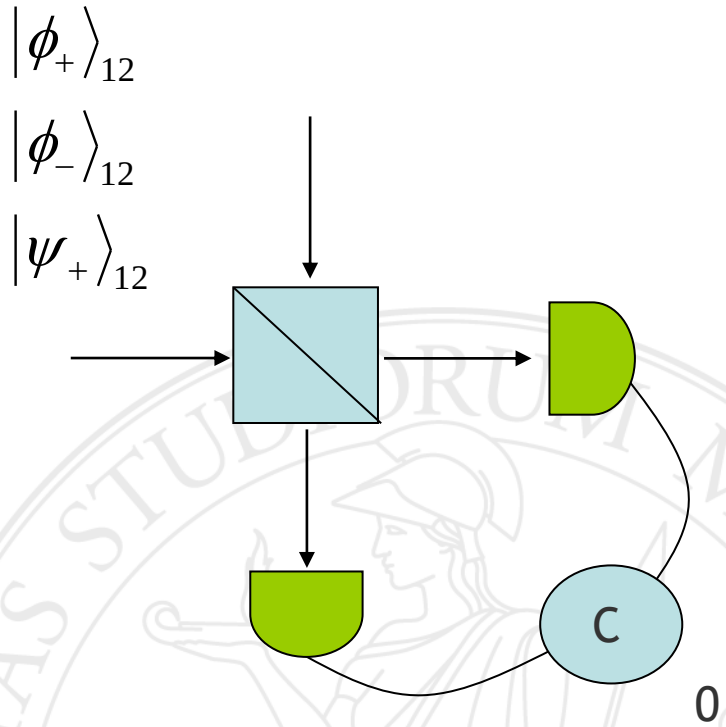
$$\frac{1}{2}|\psi_+\rangle_{12}\left(-\alpha|H\rangle_3 + \beta|V\rangle_3\right) +$$

$$-\frac{1}{2}|\psi_-\rangle_{12}\left(\alpha|H\rangle_3 + \beta|V\rangle_3\right)$$

Se proietto lo stato relativo ai fotoni 1, 2 su uno dei 4 stati di Bell automaticamente teletrasporto lo stato del fotone 3. Sapendo quale dei 4 stati di Bell è stato selezionato Bob sa cosa fare per ottenere lo stato Q.

Se mando i fotoni 1 e 2 su un BS e questi sono sovrapposti entro il loro tempo di coerenza ottengo (esercizio):



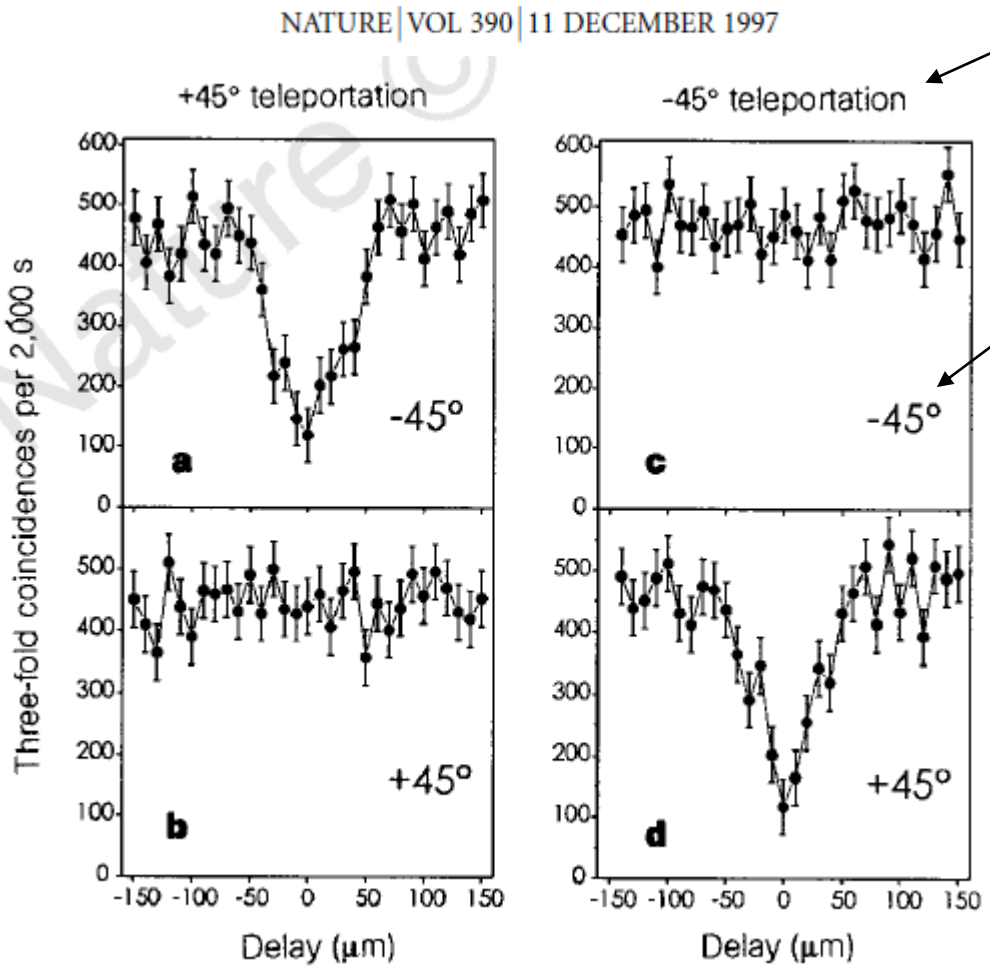


Posso vedere conteggi in contemporanea

Non posso vedere conteggi in contemporanea

Quindi se vedo conteggi in contemporanea tra i rivelatori 1 e 2 automaticamente il fotone 3 si troverà nello stato Q (ciò solo se i fotoni 1 e 2 arrivano contemporaneamente, ovvero sono indistinguibili, sul BS):

Risultato:



Q

Proiezione su 3

*Conteggi tripli tra i rivelatori 1, 2 e 3**

** Per il fotone 3 ho due rivelatori uno relativo alla pol +45° e l'altro -45°*

Il delay si ottiene traslando lo specchio di ritorno sul cristallo non lineare

Osservazioni:

1) *Senza uno stato entangled Alice non potrebbe fare una sola misura e spedire a Bob tutte le informazioni per ricostruire lo stato Q (infatti per ottenere la matrice densità dello stato Q servono 4 misure).*

2) *Nell'esperimento di teletrasporto la potenzialità dello stato entangled non viene pienamente sfruttata, infatti il teletrasporto ha successo soltanto nel 25% dei casi (tralasciando il problema della QE), ovvero, di fatto non ho un vantaggio effettivo rispetto al caso in cui faccio una tomografia dello stato con 4 misure (Phys. Rev. A, 64, 052312 (2001)* **Measurement of qubits,** *D. F. V. James et al.)*

3) *Modificando l'apparato potrei distinguere 3 casi su 4 ed arrivare così a dover fare solo 2 misure invece di 4 (dense coding). Sfruttando un altro grado di libertà potrei arrivare al superdense conding ma l'apparato sarebbe notevolmente più complesso. (Nature Physics 4, 283 (2008),* **Beating the channel capacity limit for linear photonic superdense coding**, *J. T. Barreiro et. al)*