UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Osservare il campo elettrico

Rivelazione omodina risolta in frequenza e in tempo

Simone Cialdi

Outline

Analisi delle misure sullo stato entangled

Osservabile campo elettrico

- Funzione di distribuzione degli autovalori del campo
- Casi particolari: Fock, Coerente, Squeezed

Rivelazione omodina bilanciata

- Apparato ottico/elettronico ideale
- Fonti di rumore
- Apparato con eterodina e mixer

Effetto della QE dei rivelatori

Effetto della non perfetta sovrapposizione spaziale

Omodina in regime impulsato

Analisi delle misure sull'omodina

Analisi delle misure sullo stato entangled

Procedura per la generazione dello stato entangled

1. *Compensazione del delay time*
2. *Individuazione degli assi della lamina birifrangente*
3. *Verifica che per mezzo della lamina birifrangente è possibile aggiungere uno sfasamento maggiore o uguale a* 2π
4. *Individuazione del phase-matching per i due cristalli*
5. *Bilanciamento tra la parte HH e quella VV*
6. *Settaggio della fase tra la parte HH e la parte VV*
7. *Determinazione della visibilità e della «purezza» (parametro p)*

Compensazione del delay time (velocità di gruppo)

La velocità di gruppo è la velocità di traslazione di un "pacchetto" di frequenze. Ad esempio un impulso laser propaga in un mezzo con la velocità di gruppo. Nel nostro caso il profilo di fase del laser propaga nei cristalli con la velocità di gruppo. Vediamo la definizione della velocità di gruppo:

$$E(t,z)=\int A(\omega)e^{-i(\omega_0+\omega)t+ik(\omega_0+\omega)z}d\omega$$

Campo elettrico nella posizione z al tempo t

Ampiezza comlessa del campo nel dominio spettrale centrata sulla portante (ω_0)

Propagatore spaziale

Sviluppo al primo ordine il vettore d'onda ⇨ $k(\omega_0+\omega)\approx k(\omega_0)+\left.\frac{\partial k}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}\cdot\omega$

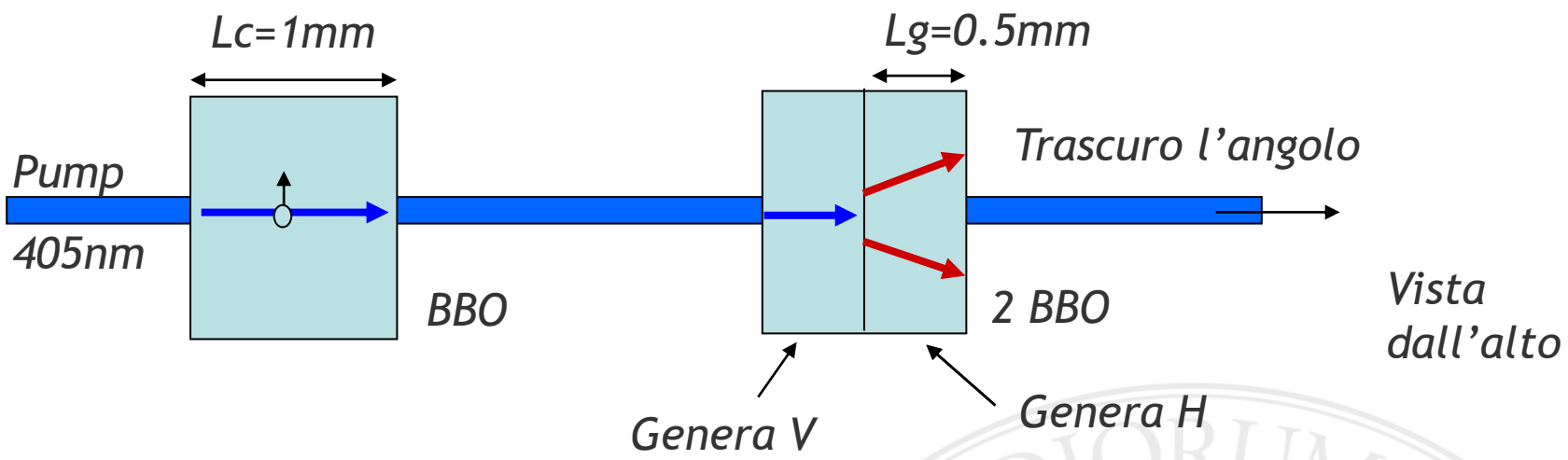
$$E(t,z)\approx e^{-i\omega_0 t+ik(\omega_0)z}\int A(\omega)e^{-i\omega t+i\frac{\partial k}{\partial\omega}z\cdot\omega}d\omega=e^{-i\omega_0 t+ik(\omega_0)z}\int A(\omega)e^{-i\left(t-\frac{\partial k}{\partial\omega}z\right)\omega}d\omega$$

Ovvero: $E(t,z)=E\left(t-\frac{\partial k}{\partial\omega}z,0\right)e^{ik(\omega_0)z}\overset{df}{=}E\left(t-\frac{z}{V_g},0\right)e^{ik(\omega_0)z}$

$$\boxed{\frac{1}{V_g}=\frac{\partial k}{\partial\omega}=\frac{n_g}{c}}$$

Quindi nella posizione z abbiamo lo stesso campo che si aveva nella posizione 0 ma ad un tempo ritardato pari al tempo di traslazione tra 0 e z alla velocità di gruppo.

Compensazione del delay time



$$\Delta\tau_c = \frac{Lc}{V_g^e(\lambda_p)} - \frac{Lc}{V_g^o(\lambda_p)} = -133fs \qquad \Delta\tau_g = \frac{Lg}{V_g^o(\lambda_p)} - \frac{Lg}{V_g^e(2\lambda_p)} = 213fs$$

$n^o_{g_p} = 1{,}779 \qquad n^e_{g_p} = 1{,}739 \qquad n^e_{g_{PDC}} = 1{,}653$

Quindi il delay time complessivo è 213fs-133fs=80fs da conforntare con il tempo di coerenza della pompa per ricavare l'effetto sulla purezza dello stato entangled generato per PDC

Effetto del delay time residuo sulla «purezza»

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int d\omega_p A_p(\omega_p)\left[|HH\omega_p\rangle + e^{i\tau\omega_p}|VV\omega_p\rangle\right]$$

Dove τ è il delay time residuo

Esercizio: capire perchè non ho scritto la dipendenza da ω

La misura dei conteggi in contemporanea traccia via la frequenza della pompa, quindi ossrrvo la matrice densità otenuta dalla traccia:

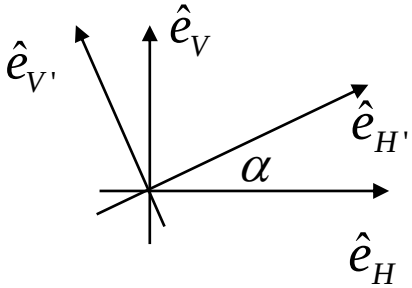
$$\rho_T = \int d\omega_p \langle\omega_p|\varphi\rangle\langle\varphi|\omega_p\rangle = \frac{1}{2}\begin{array}{cc} HH & VV \\ \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} HH \\ VV \end{array} \end{array}$$

Dove: $$p = \int d\omega_p |A_p(\omega_p)|^2 e^{i\tau\omega_p}$$

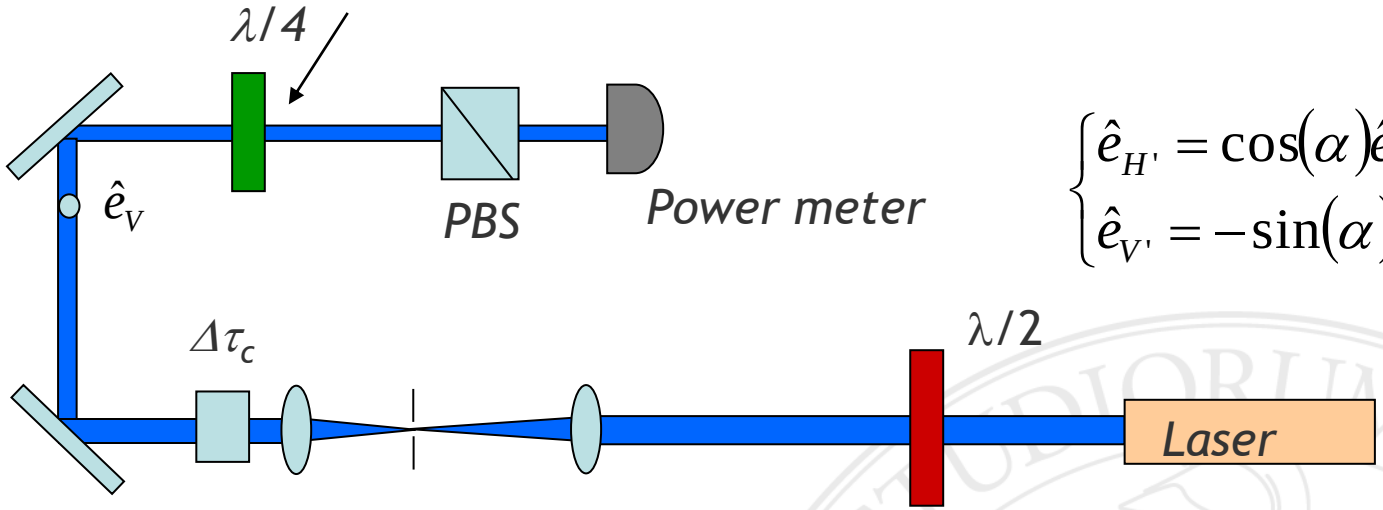
Nota: in generale p sarà complesso

Dalla FFT dello spettro misurato (funzione di correlazione dei campi) ricavo che l'effetto di 80fs è trascurabile. Rimane però l'effetto della decoerenza angolare che porta il modulo di p a circa 0.8.

Individuazione degli assi della lamina



$$\sin(\alpha)\hat{e}_{H'} + i\cos(\alpha)\hat{e}_{V'}$$

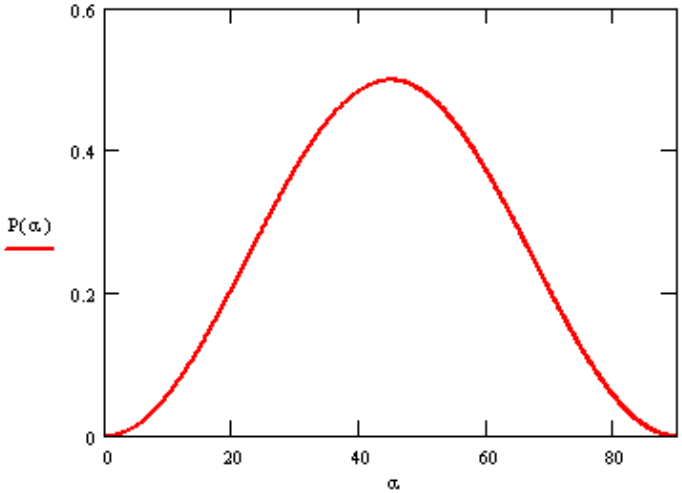


$$\begin{cases} \hat{e}_{H'} = \cos(\alpha)\hat{e}_H + \sin(\alpha)\hat{e}_V \\ \hat{e}_{V'} = -\sin(\alpha)\hat{e}_H + \cos(\alpha)\hat{e}_V \end{cases}$$

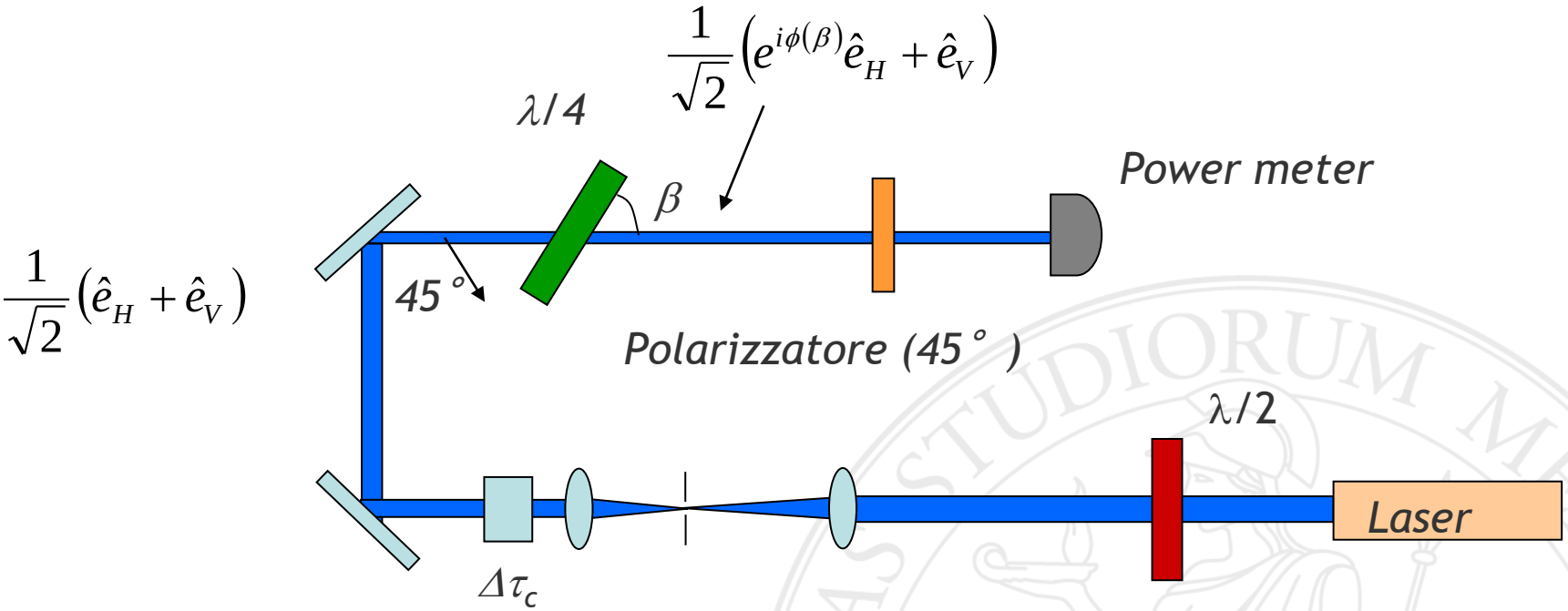
Chiamando α l'angolo tra l'asse H' della $\lambda/4$ e l'asse orizzontale del lab. la potenza ha il seguente andamento:

$$P(\alpha) = 2(\sin(\alpha)\cos(\alpha))^2$$

Quando la potenza è massima/minima gli assi H e V del lab. sono paralleli a quelli della lamina



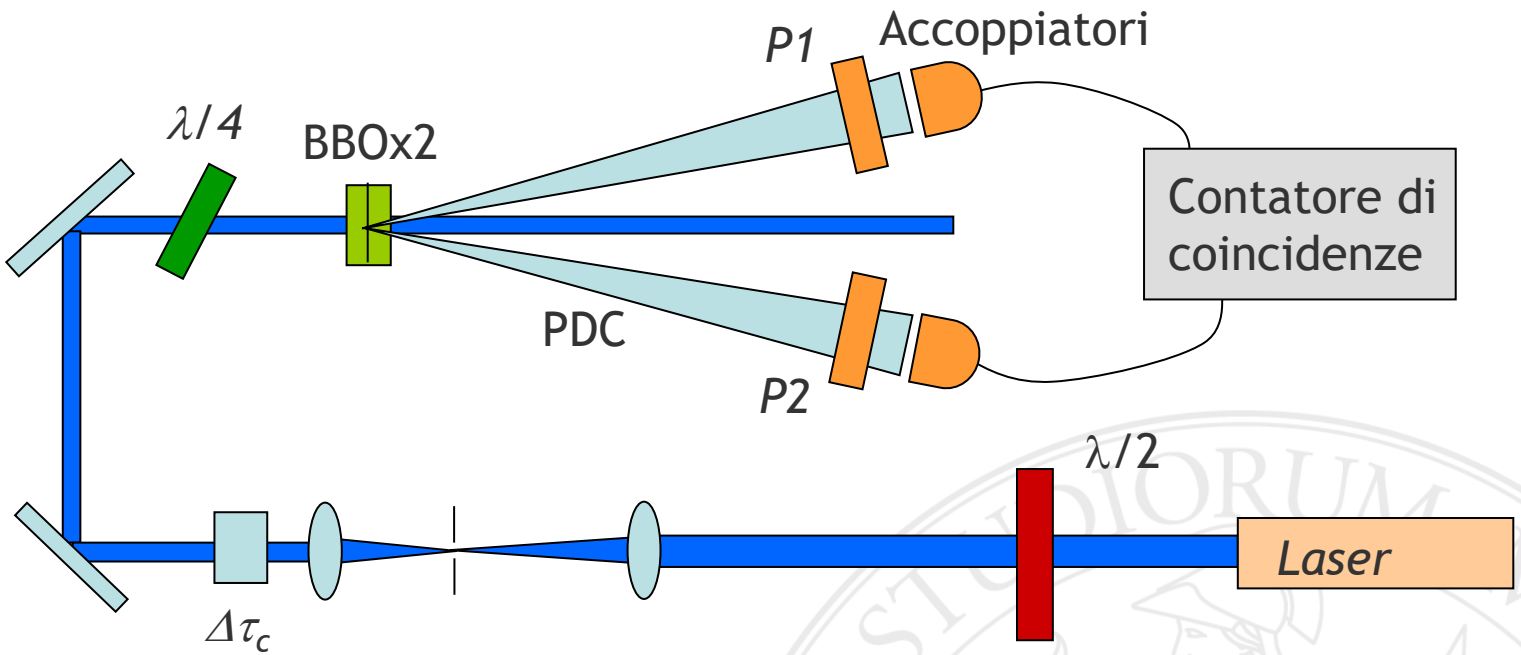
Verifica che la lamina introduce uno sfasamento maggiore o uguale a 2π



$$P_{45}(\beta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\phi(\beta))\right)$$

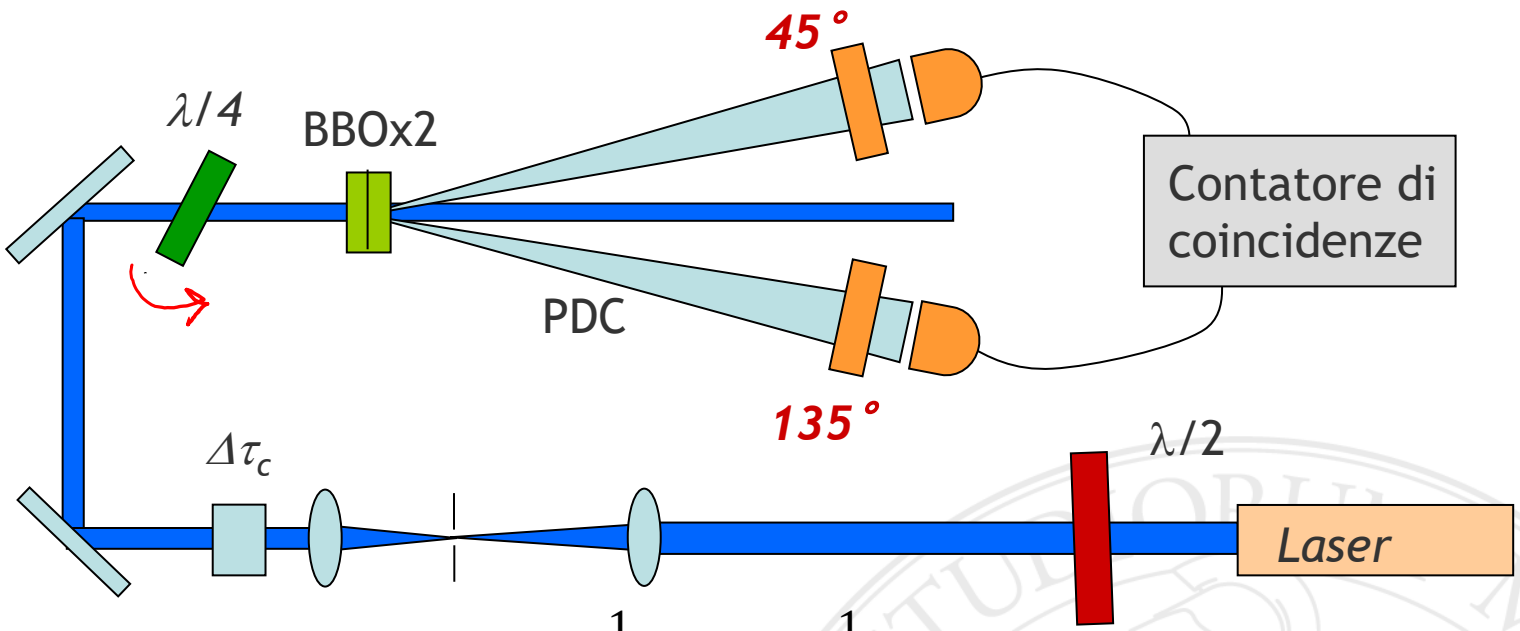
Bisogna verificare che è possibile ottenere almeno un ciclo completo (2π) in funzione di β

Phase matching - bilanciamento e settaggio della fase



- *Phase Matching: Polarizzazione V, Polarizzatori H, si massimizzano i conteggi orientando il cristallo V con la vite V del montaggio, poi la stessa cosa invertendo H e V.*
- *Bilanciamento: bilanciare i conteggi in contemporanea HH e VV agendo sulla $\lambda/2$*
- *Agendo sulla $\lambda/4$ (β) si setta lo sfasamento a 0*

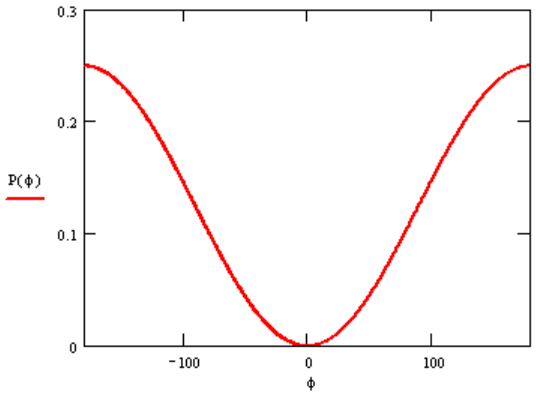
Settaggio della fase per mezzo della lamina

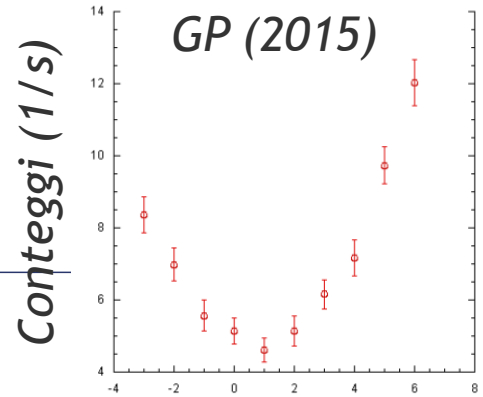


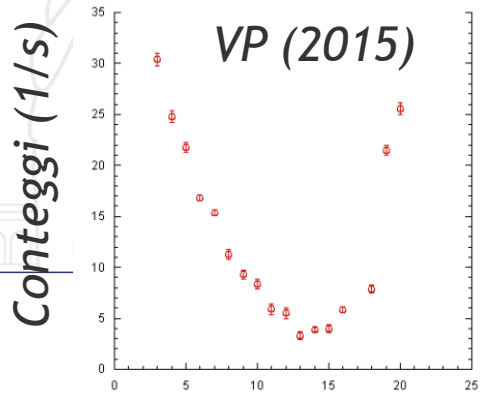
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|HH\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}|VV\rangle$$

$$P(\phi) = \left|\langle 45|\langle 135||\Psi\rangle\right|^2 = \frac{1}{8}\left|-1+e^{i\phi}\right|^2 = \frac{1}{4}(1-\cos(\phi))$$

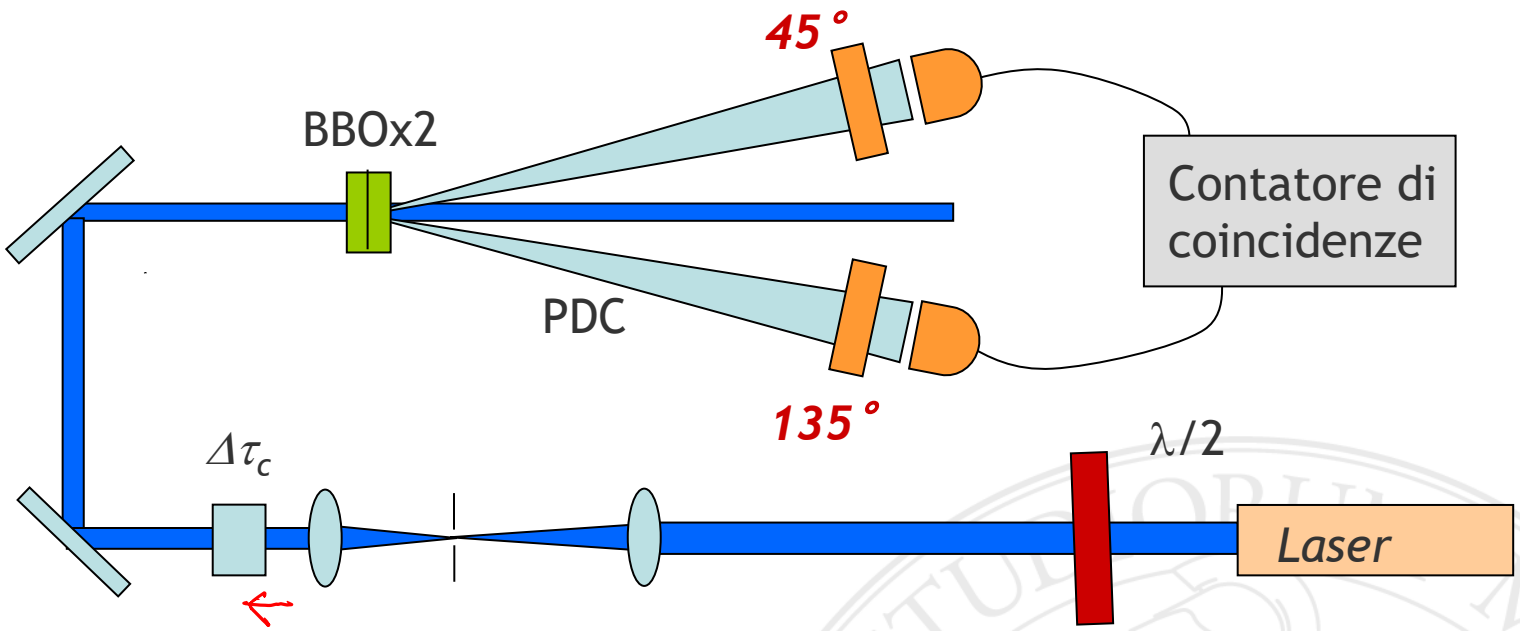
Per ottenere ϕ=0 devo minimizzare i conteggi in contemporanea







Metodo alternativo per l'impostazione della fase



Con la vite verticale cambio l'angolo dell'asse principale del cristallo di compensazione. La variazione del termine di fase della portante è:

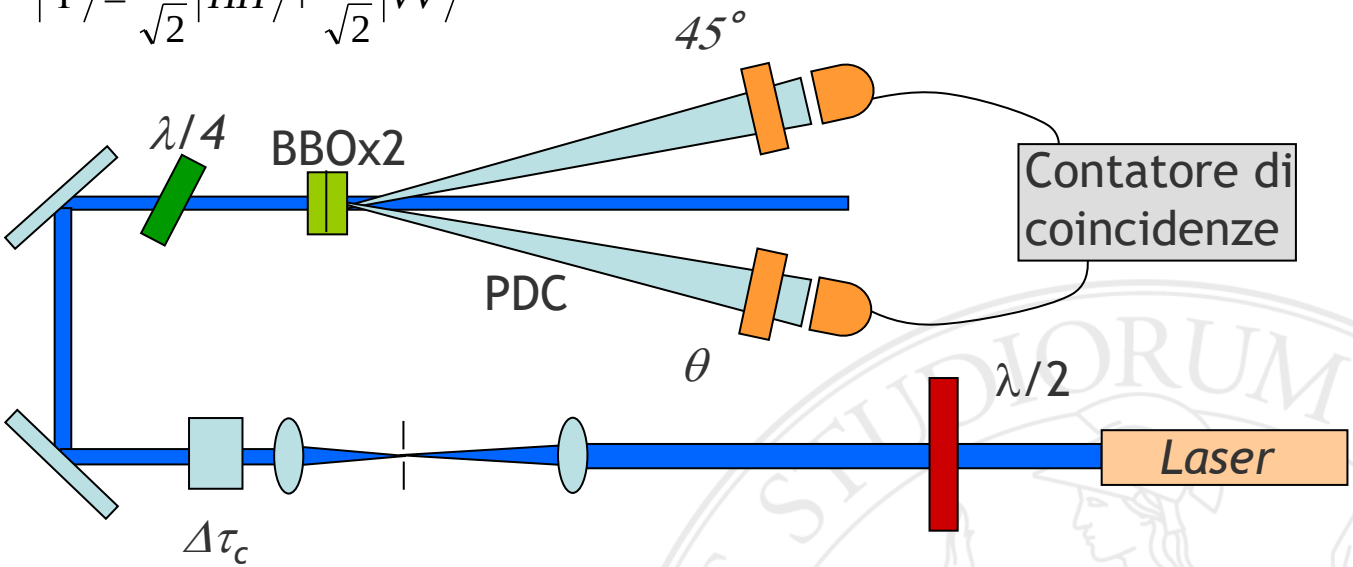
$$\frac{2\pi}{\lambda_p}\left(n_p^o - n_p^e(\varphi)\right)L_c = \phi$$

405 nm

Questo va a cambiare anche l'indice di gruppo ma in modo trascurabile in questo caso

Determinazione della visibilità e della purezza

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|HH\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|VV\rangle$$



$$\rho = p \cdot \rho_{ent} + (1-p) \cdot \rho_{mix}$$

$$Vis = \frac{Max - Min}{Max + Min} = \frac{\langle 45,45|\rho|45,45\rangle - \langle 45,135|\rho|45,135\rangle}{\langle 45,45|\rho|45,45\rangle + \langle 45,135|\rho|45,135\rangle} = p$$

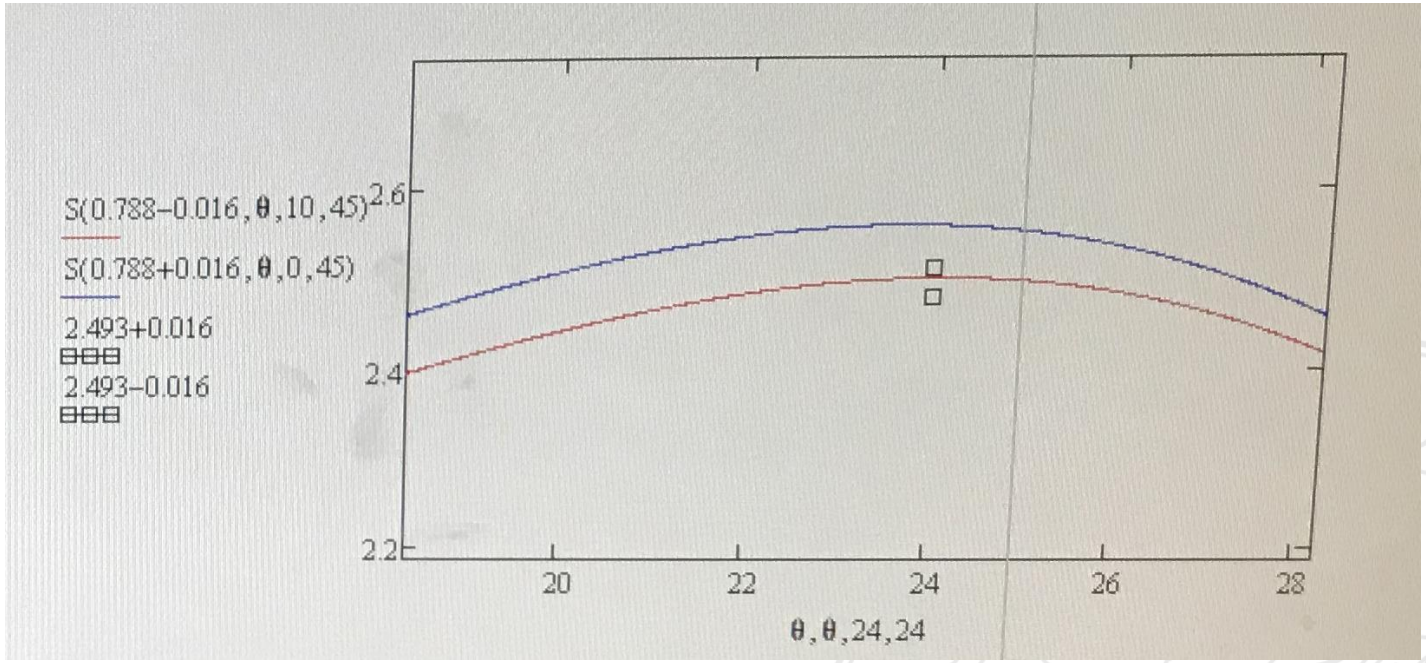
Considerazioni sull'affidabilità della misura

1) *L'affidabilità sul valore di S dipende dalla stabilità del sistema sperimentale e non dal particolare stato generato (se ad esempio i due cristalli sono mal allineati questo non incide sull'affidabilità del valore di S). Quindi devo verificare che la meccanica (allineamento), la temperatura (cristalli e rivelatori) e le tensioni di alimentazione siano rimaste costanti durante la misura.*
2) *Se invece voglio confrontare il valore previsto di S secondo la MQ e quello sperimentale devo chiedermi se il metodo di ricostruzione dello stato è affidabile. Il metodo usato individua solo quattro elementi della matrice densità e descrive lo stato secondo due parametri p, ϕ. Quindi la prima cosa da chiedersi è se dati gli errori su questi due parametri è possibile spiegare eventuali discrepanze tra previsione e risultato.*

Stima di S

Gruppo Venerdì (2023)

Con una p del 78.8% il valore ottimale per θ risulta 24°

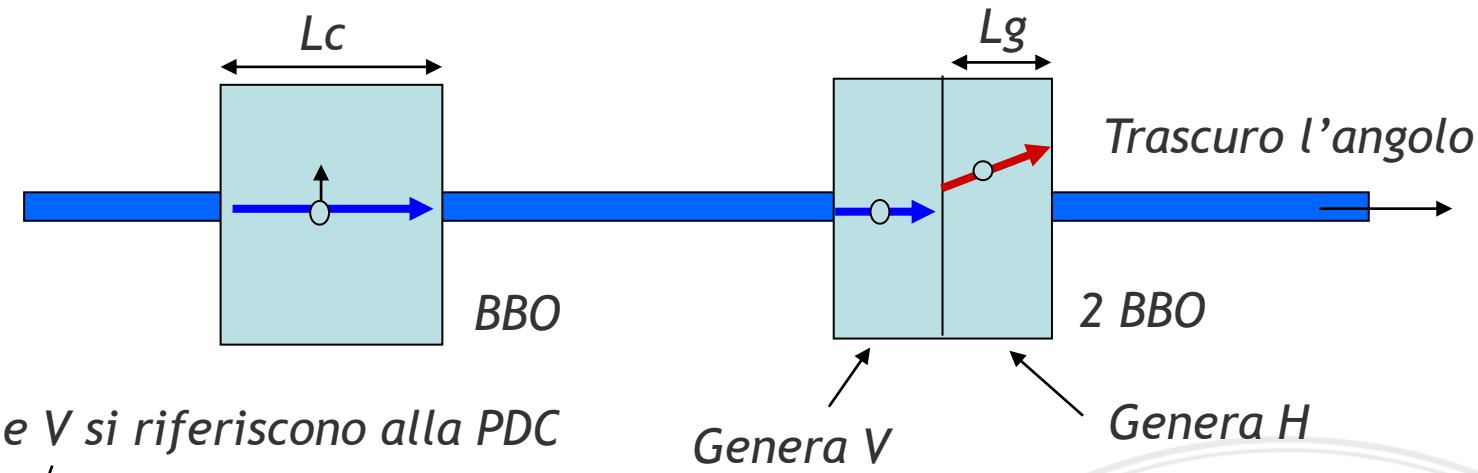


$$Sexp(E1, E2, E3, E4) = 2.493$$

$$\Delta Sexp = 0.016$$

La disuguaglianza di Bell risulta violata per 31 deviazioni standard e il risultato è compatibile con quello previsto dalla MQ

Variazione della fase con la Temperatura



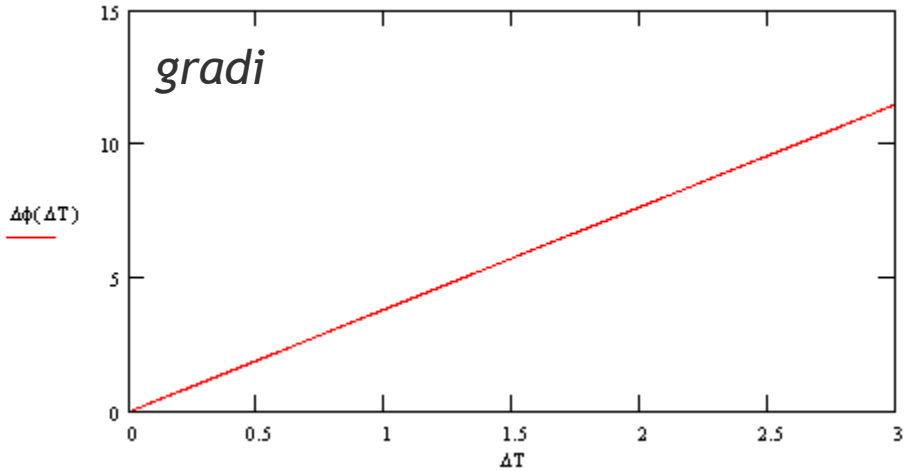
H e V si riferiscono alla PDC

$$\Delta\varphi_H = \frac{2\pi}{\lambda_p}\frac{\partial n_e}{\partial T}\bigg|_{\lambda_p} \Delta T L_c - \frac{2\pi}{\lambda_p}\frac{\partial n_o}{\partial T}\bigg|_{\lambda_p} \Delta T L_g$$

$$\Delta\varphi_V = \frac{2\pi}{\lambda_p}\frac{\partial n_o}{\partial T}\bigg|_{\lambda_p} \Delta T L_c - \frac{2\pi}{2\lambda_p}\frac{\partial n_e}{\partial T}\bigg|_{2\lambda_p} \Delta T L_g$$

$$\Delta\phi = \Delta\phi_V - \Delta\phi_H$$

Derivate ottenute con il programma free **SNLO**



Approfondimento sulla stabilizzazione di temperatura

Concetto fondamentale è quello di resistenza termica. Per la resistenza termica vale una legge simile a quella di Ohm:

$$\Delta T = R_T \cdot P$$

Differenza di temperatura tra l'oggetto da stabilizzare e l'ambiente

Potenza scambiata tra l'oggetto e l'ambiente

L'ordine di grandezza per R_T quando l'oggetto è metallico e l'ambiente è l'aria:

$$R_T \approx 50 / Area(cm^2) \frac{°C}{W}$$

Per questo i dissipatori devono avere l'area più grande possibile (alette). Inoltre la resistenza diminuisce se si ottiene un flusso d'aria turbolento e non laminare sulle alette (quindi la ventola deve soffiare sul dissipatore e non aspirare)

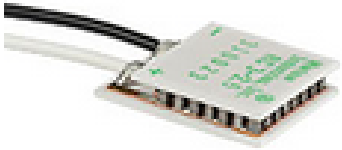
Nota: se al posto dell'aria abbiamo l'acqua la resistenza a parità di area è molto più piccola (circa un fattore 100)

Approfondimento sulla stabilizzazione di temperatura (apparato)

Connettori per il termistore e la cella Peltier

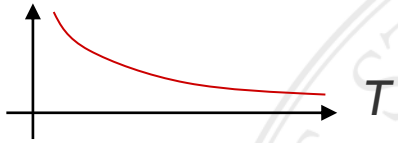
Stabilizzatore

Dissipatore



Cella Peltier

Termistore

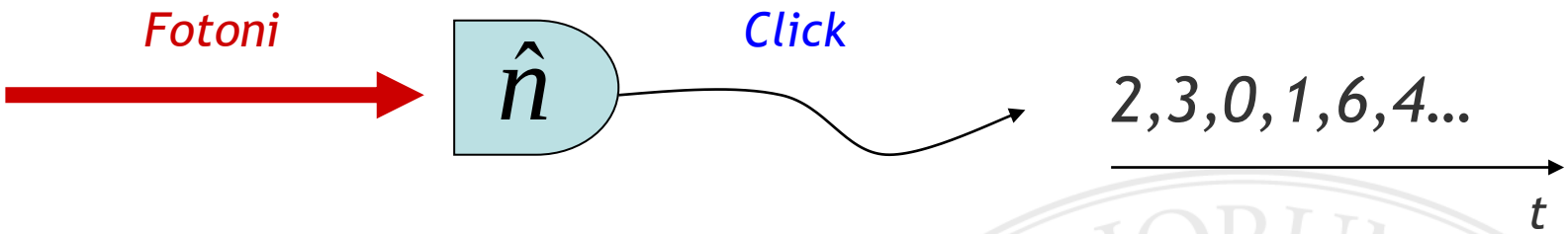


Cristallo inserito in un piccolo montaggio metallico con un foro per il termistore

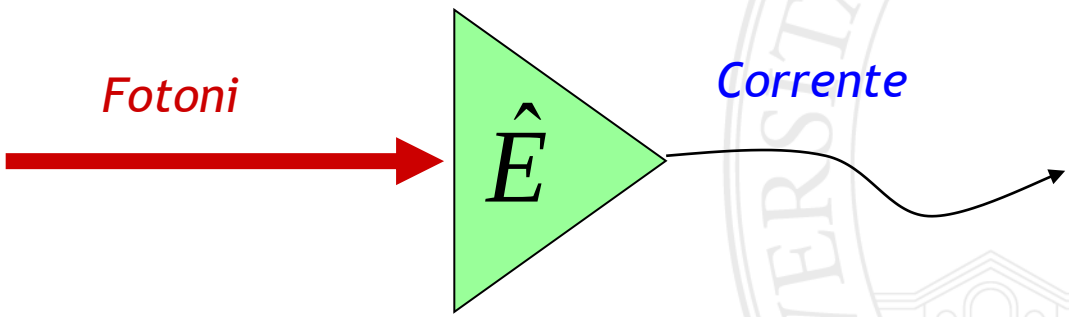
Supponiamo che il montaggio del cristallo abbia un'area di 5cm^2, allora la sua R_T è circa 10K/W. Dunque se lo vogliamo stabilizzare a circa 10 gradi sotto la T ambiente avremo uno scambio energetico tra il montaggio e l'aria di 1W. Questa potenza deve essere trasmessa dal Peltier al dissipatore. Quindi nelle specifiche della cella dobbiamo vedere se è possibile dare abbastanza corrente per scambiare 1W ($P=\Pi * I$ con Π parametro della cella e I corrente) e il dissipatore dovrà avere un'area preferibilmente molto più grande di 5cm^2. La cella deve essere messa in contatto termico con il montaggio e il dissipatore tramite opportuno conduttore termico evitando la formazione di bolle d'aria tra le due superfici.

Introduzione osservabile campo elettrico

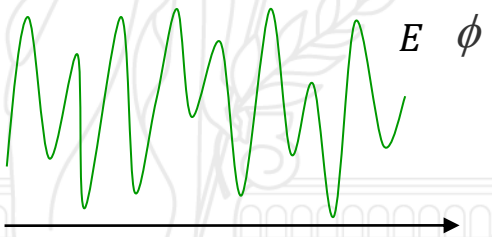
Fino ad oggi abbiamo usato soltanto l'osservabile numero, ovvero, un contatore di fotoni:



Adesso ci proponiamo di descrivere un apparato sperimentale per implementare l'osservabile campo elettrico:



Vogliamo sia il modulo di E che la sua fase



Osservabile campo elettrico

Riscriviamo l'operatore campo elettrico mettendo in evidenza la fase:

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}}\left(iae^{-i\omega t+ikz} - ia^{+}e^{+i\omega t-ikz}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}}\left(ae^{\underline{-i\omega t+ikz+i\frac{\pi}{2}}} + a^{+}e^{+i\omega t-ikz-i\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V}}\left(ae^{-i\theta} + a^{+}e^{+i\theta}\right) \stackrel{df}{=} \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_o V}}\hat{X}(\theta)$$

Proprietà dell'operatore $X(\theta)$

$$\boxed{\hat{X}(\theta) = ae^{-i\theta} + a^{+}e^{+i\theta}}$$

$$\begin{cases} \hat{X}_1 \overset{df}{=} \hat{X}(0) = a + a^{+} \\ \hat{X}_2 \overset{df}{=} \hat{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -ia + ia^{+} \end{cases}$$

$$[a, a^{+}] = 1 \quad \Rightarrow \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2i$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 1$$

Dalle precedenti risulta:

$$\boxed{\hat{X}(\theta) = \cos(\theta)\,\hat{X}_1 + \sin(\theta)\,\hat{X}_2}$$

Per la media e la varianza di X otteniamo:

$$\left\langle \hat{X}(\theta) \right\rangle = \cos(\theta)\left\langle \hat{X}_1 \right\rangle + \sin(\theta)\left\langle \hat{X}_2 \right\rangle$$

$$\left\langle \Delta\hat{X}(\theta)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{X}(\theta)^2 \right\rangle - \left\langle \hat{X}(\theta) \right\rangle^2 =$$

$$= \underline{\cos(\theta)^2\left\langle \Delta\hat{X}_1{}^2 \right\rangle + \sin(\theta)^2\left\langle \Delta\hat{X}_2{}^2 \right\rangle} + \underline{\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\left\langle \hat{X}_1\hat{X}_2 \right\rangle + \left\langle \hat{X}_2\hat{X}_1 \right\rangle - 2\left\langle \hat{X}_1 \right\rangle\left\langle \hat{X}_2 \right\rangle\right)}$$

Analogia con gli operatori q e p

Definiamo l'operatore X_2 nello spazio degli autovalori di X_1 sfruttando l'analogia con gli operatori q e p:

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar \quad \Rightarrow \quad \langle q|\hat{p}|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\Psi(q)$$

$$[\hat{X}_1,\hat{X}_2] = 2i \quad \Rightarrow \quad \langle x_1|\hat{X}_2|\Psi\rangle = -2i\frac{\partial}{\partial x_1}\langle x_1|\Psi\rangle = -2i\frac{\partial}{\partial x_1}\Psi(x_1)$$

Adesso possiamo scrivere le funzioni d'onda nello spazio degli autovalori di X_1 nei casi più importanti:

$$\Psi_n(x_1) = \langle x_1|n\rangle = ? \qquad \Psi_\alpha(x_1) = \langle x_1|\alpha\rangle = ?$$

Fock *Coerente*

Stato di Fock:

Si possono sfruttare le proprietà degli operatori a ed a⁺:

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

E il fatto che: $a = \frac{1}{2}(x_1 + i x_2)$

$\langle x_1|a|0\rangle = 0$ *vuoto (n=0)*

$$\frac{1}{2}\langle x_1|\hat{X}_1 + i\hat{X}_2|0\rangle = \frac{1}{2}x_1\Psi_0(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_0(x_1) = 0$$

$$\boxed{\Psi_0(x_1) = e^{-\frac{x_1^2}{4}}}$$

Non normalizzato $\Delta X_1 = 1$

$\langle x_1|a^{+}|0\rangle = \langle x_1|1\rangle = \Psi_1(x_1)$ *1 fotone (n=1)*

$$\frac{1}{2}\langle x_1|\hat{X}_1 - i\hat{X}_2|0\rangle = \frac{1}{2}x_1\Psi_0(x_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_0(x_1) = \Psi_1(x_1)$$

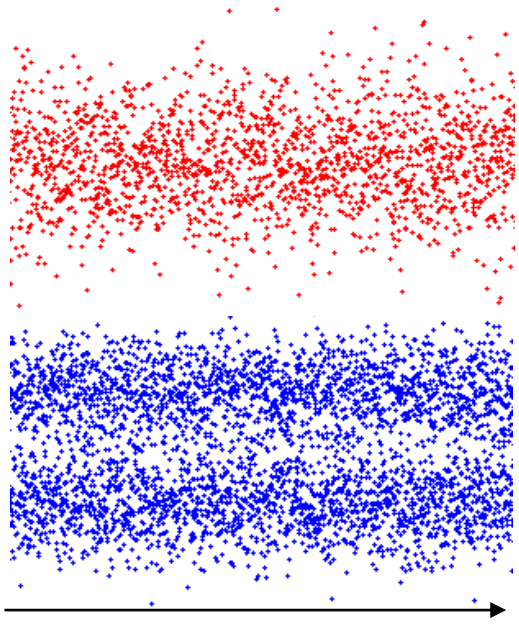
$$\boxed{\Psi_1(x_1) = x_1 e^{-\frac{x_1^2}{4}}}$$

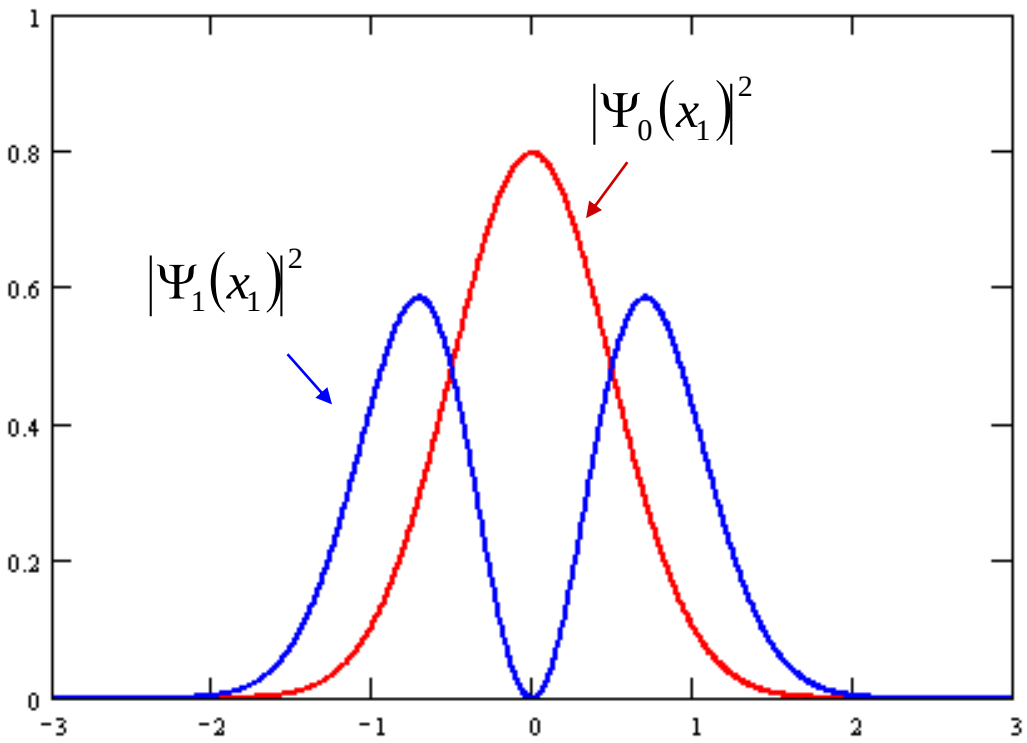
Non normalizzato

Stato di Fock (2):

Funzione di distribuzione degli autovalori del campo elettrico

Gli stati di Fock sono autostati dell'Hamiltoniana del campo, quindi, le funzioni di distribuzione trovate non cambiano se si fa evolvere il tempo.





Stato Coerente *(non è autostato dell'operatore numero)*

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \Rightarrow \quad e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\alpha\rangle = \left|e^{-i\omega t}\alpha\right\rangle = |\alpha(t)\rangle$$

$$\langle x_1|a|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\Psi_\alpha(x_1,t)$$

$$\frac{1}{2}\langle x_1|\hat{X}_1 + i\hat{X}_2|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{2}x_1\Psi_\alpha(x_1,t) + \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_\alpha(x_1,t) = \alpha(t)\Psi_\alpha(x_1,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Psi_\alpha(x_1,t) = -\frac{1}{2}\big(x_1 - 2\alpha(t)\big)\Psi_\alpha(x_1,t)$$

$$\boxed{\Psi_\alpha(x_1,t) = e^{-\frac{\left(x_1-2\alpha(t)\right)^2}{4}}}$$

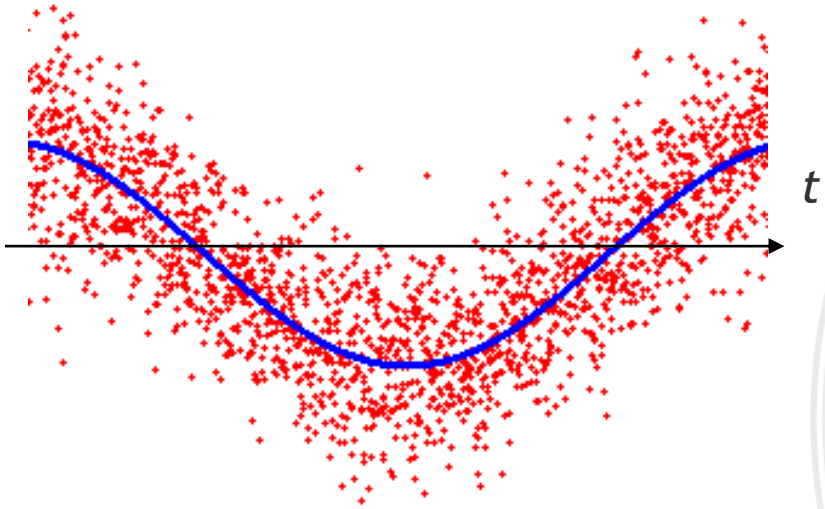
Non normalizzato

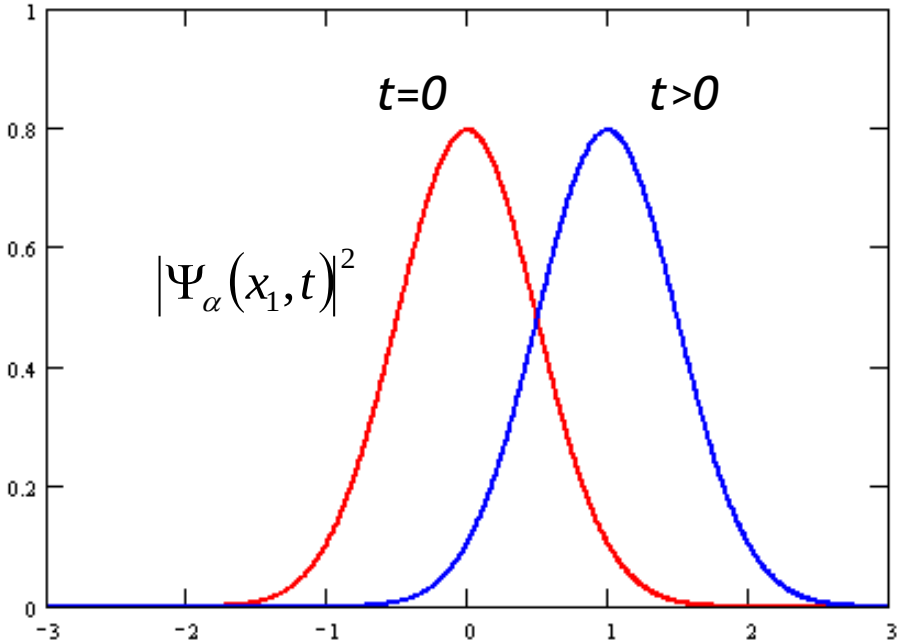
La sigma è la stessa di quella dello stato di vuoto per ogni α

Stato Coerente (2):

Funzione di distribuzione degli autovalori del campo elettrico

La ΔX_1 è sempre 1 indipendentemente dal modulo di α, il picco della funzione di distribuzione oscilla attorno allo 0 con un'ampiezza 2α.





Stato Coerente (3) *(tengo fisso lo stato e faccio evolvere l'operatore)*

Usando le equazioni di pg. 21 per la media e la varianza di X nel caso dello stato coerente si ottiene:

$$\langle \hat{X}(\theta) \rangle = \cos(\theta)\,\langle \alpha | \hat{X}_1 | \alpha \rangle + \sin(\theta)\,\langle \alpha | \hat{X}_2 | \alpha \rangle$$

Sapendo che: $\begin{cases} a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|a^+ = \alpha^*\langle\alpha| \end{cases}$

Penendo ad esempio: $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ $\quad \varphi = 0$ *Lo stato è fissato*

$$\langle \hat{X}(\theta) \rangle = 2|\alpha| \cos(\theta)$$

$$\langle \Delta\hat{X}(\theta)^2 \rangle = \cos(\theta)^2 \langle \Delta\hat{X}_1{}^2 \rangle + \sin(\theta)^2 \langle \Delta\hat{X}_2{}^2 \rangle + \underline{\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\langle \hat{X}_1\hat{X}_2 \rangle + \langle \hat{X}_2\hat{X}_1 \rangle - 2\langle \hat{X}_1 \rangle \langle \hat{X}_2 \rangle\right)}$$

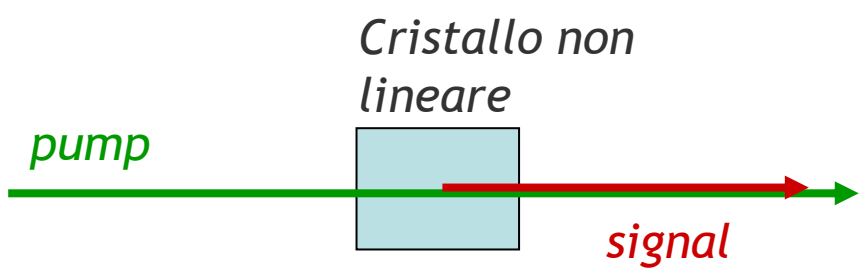
I singoli pezzi non sono zero ma complessivamente questa parte è nulla (esercizio)

$$\langle \Delta\hat{X}(\theta)^2 \rangle = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Come volevamo la varianza non dipende da α e θ

$$\boxed{\frac{\Delta X}{X_{Max}} = \frac{1}{2|\alpha|} = \frac{1}{2\sqrt{N}}}$$

Stato squeezed



Il fascio laser di pompa deve essere molto intenso in modo da ottenere una down-conversion in regime non perturbativo (meglio usare una cavità risonante…)

L'Hamiltoniana di interazione è (idler e signal sono collineari):

$$\boxed{H = i\hbar\chi\left(a^2 - a^{+2}\right)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, a] \\ \dfrac{da^+}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, a^+] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -2\chi a^+ \\ \dfrac{da^+}{dt} = -2\chi a \end{cases}$$

Equazioni per l'evoluzione temporale degli operatori

Il cristallo NL intreccia a e a^+

Sostituisco nelle precedenti equazioni: $a = \frac{1}{2}(X_1 + iX_2)$

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = -2\chi X_1 \\ \frac{dX_2}{dt} = +2\chi X_2 \end{cases}$$

In questo modo ottengo due equazioni disaccoppiate per X_1 e X_2

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{-2\chi t} X_1(0) \\ X_2(t) = e^{+2\chi t} X_2(0) \end{cases}$$

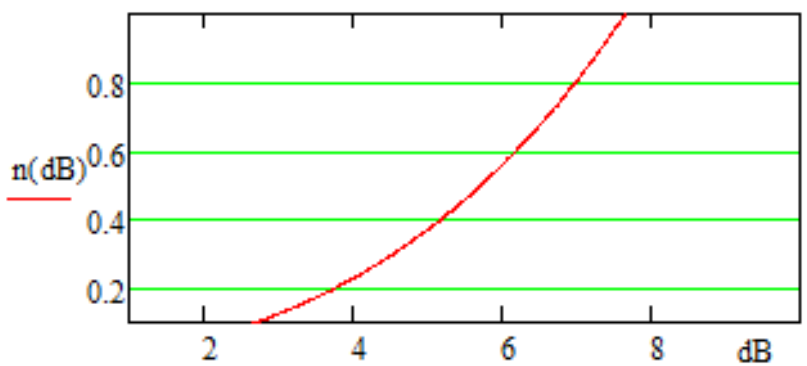
Le due equazioni sono molto semplici da risolvere ed il risultato dipende dallo stato al tempo t=0

$$\begin{cases} \langle \Delta X_1(t)^2 \rangle = e^{-4\chi t} \\ \langle \Delta X_2(t)^2 \rangle = e^{+4\chi t} \end{cases}$$

Se ad esempio partiamo dal vuoto (squeezing del vuoto) vediamo che l'effetto del cristallo è quello di trasferire rumore da X_1 a X_2

Esercizio: trovare il numero medio di fotoni dello stato squeezed

$$\bar{n} = [\sinh(2\chi t)]^2$$



La faccia dello stato squeezed

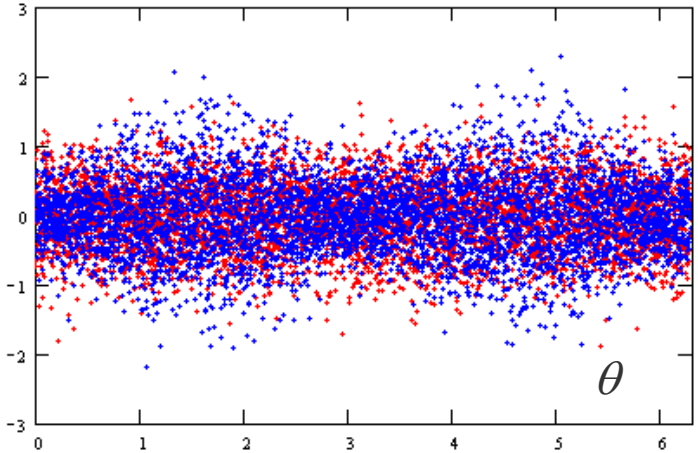
In rosso il vuoto

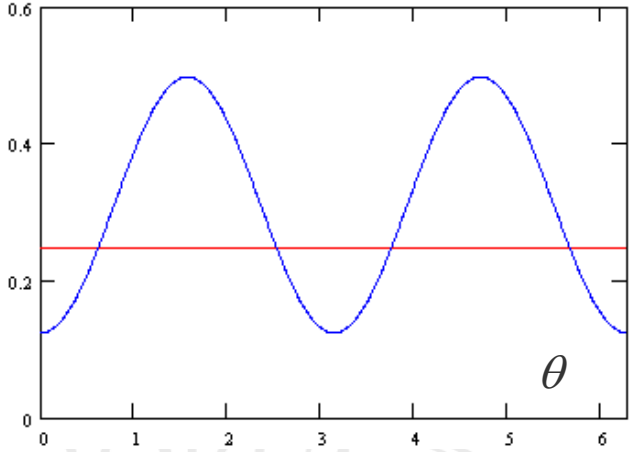
Campo $x(\theta)$

Varianza $\langle \Delta X(\theta)^2 \rangle$

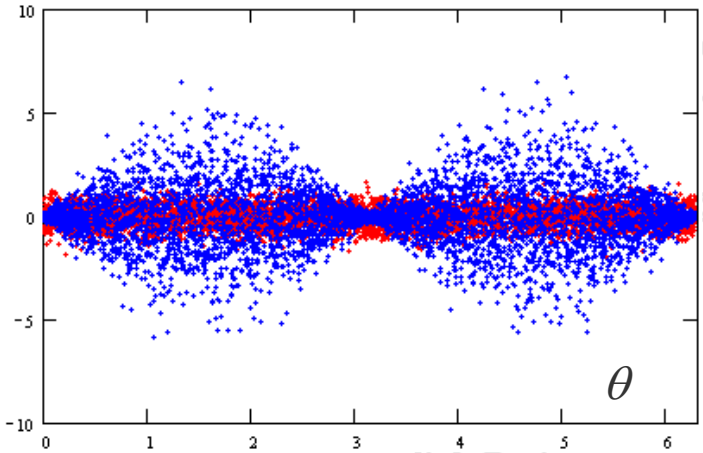
3 dB

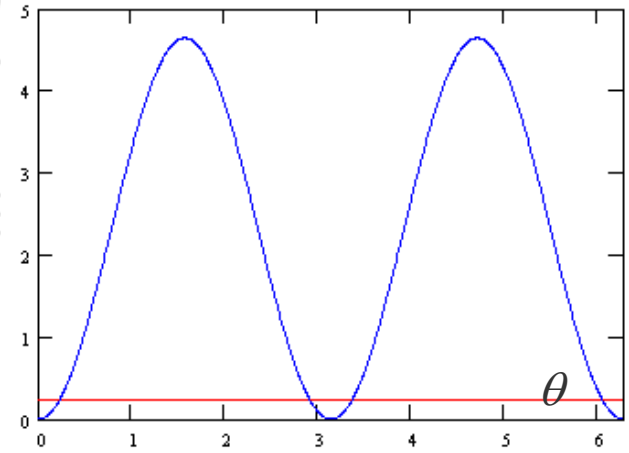
$$3 = 10\log\left(\frac{\langle \Delta X^2_{1vuoto} \rangle}{\langle \Delta X^2_{1sq} \rangle}\right)$$





12.7 dB





* T. Eberle *et al.*, *Phys. Rev. Lett. 104, 251102 (2010)*

http://www.qi.aei-hannover.de

Nota: in questa slide il vuoto ha varianza 1/4

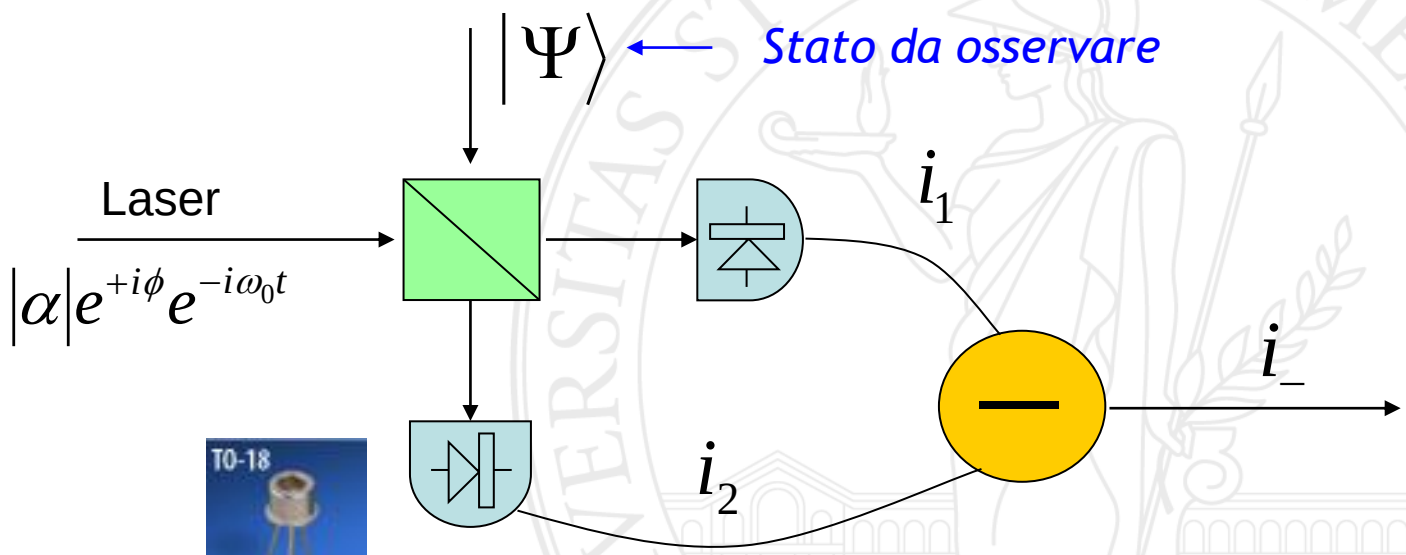
Rivelazione omodina bilanciata

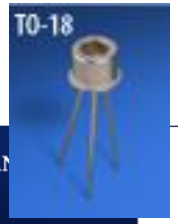
Esiste il problema dell'evoluzione temporale velocissima del campo

Le frequenze ottiche sono intorno a 10^{14} -10^{15} Hz quindi è chiaro che non esistono strumenti in grado di seguire segnali così rapidamente variabili

Il nostro fine è quello di osservare l'operatore $X(\theta)$ con θ selezionabile a piacere.

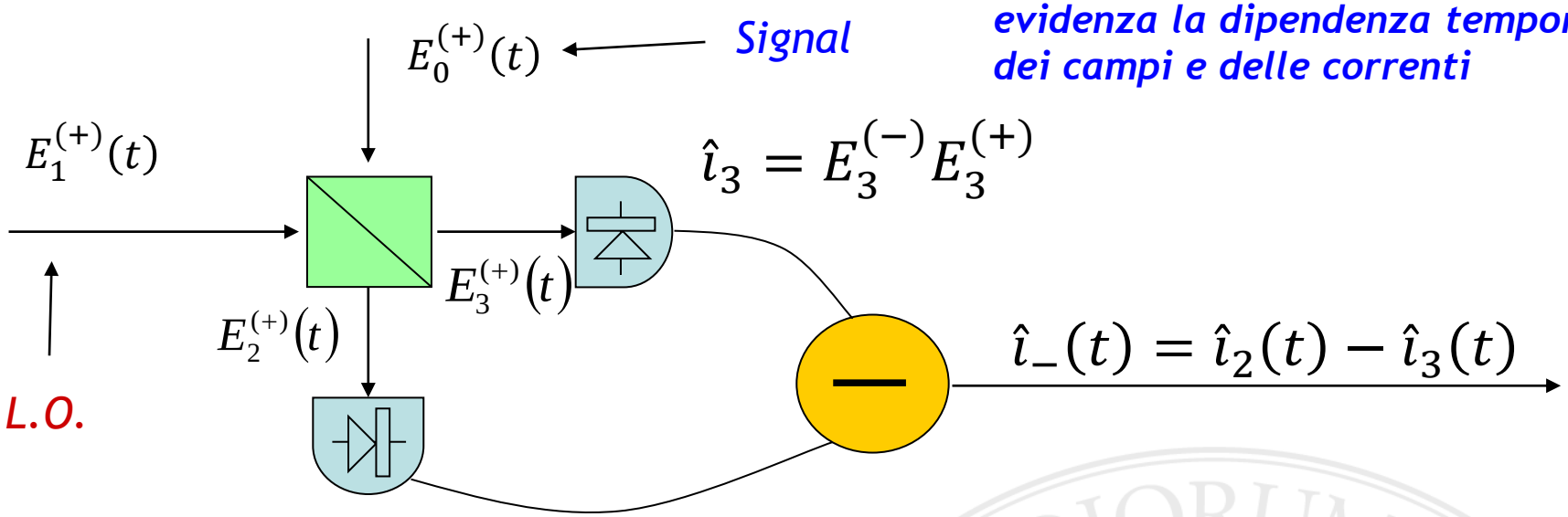
Per fare questo si usa un sistema basato su due rivelatori (non a singolo fotone), un beam-splitter, un fascio laser di alta potenza (oscillatore locale) di riferimento con fase selezionabile e un amplificatore differenziale:





Fotodiodi ad alta QE (>90%) tipicamente di InGaAs nel caso di stati squeezed a 1064nm

Notare che è stata messa in evidenza la dipendenza temporale dei campi e delle correnti



T ed R sono la trasmittività e la riflettività del BS.

Per il momento poniamo la QE dei rivelatori al 100%

$$\hat{\imath}_-(t) = E_2^{(-)} E_2^{(+)} - E_3^{(-)} E_3^{(+)}$$

$$\begin{cases} E_2^{(+)} = \sqrt{T} E_0^{(+)} + i\sqrt{R} E_1^{(+)} \\ E_3^{(+)} = i\sqrt{R} E_0^{(+)} + \sqrt{T} E_1^{(+)} \end{cases}$$

BS quantistico

Il Signal e il L.O. hanno la stessa frequenza portante ω_0 corrispondente ad esempio a 1064nm

$$E^{(+)}(t) \propto a(t)$$

Il L.O. è molto più potente del segnale quindi posso trascurare questo termine

$$\hat{i}_-(t) \propto (R-T)a_1^+(t)a_1(t) + i2\sqrt{RT}\left(a_1^+a_0 - a_1a_0^+\right) + (T-R)a_0^+(t)a_0(t)$$

$$\approx (R-T)a_1^+(t)a_1(t) + 2i\sqrt{RT}\left(a_1^+a_0 - a_1a_0^+\right)$$

Il termine sottolineato in rosso è proporzionale all'operatore X(θ), dimostrazione:

Sostituisco: $a_1(t) = |\alpha| e^{+i\phi} e^{-i\omega_0 t}$

Attenzione: in generale il laser non è monocromatico e quindi sia |α| che φ hanno una loro dipendenza temporale

$$2i\sqrt{RT}\left(a_1^+a_0 - a_1a_0^+\right) = 2\sqrt{RT}|\alpha| i \left(a_0 e^{-i\phi + i\omega_o t} - a_0^+ e^{+i\phi - i\omega_o t}\right) =$$

$$= 2\sqrt{RT}|\alpha| \left(a_0(t) e^{-i\phi + i\frac{\pi}{2} + i\omega_o t} + a_0^+(t) e^{+i\phi - i\frac{\pi}{2} - i\omega_o t} \right)$$

Ho messo in evidenza la dipendenza dal tempo

L'operatore a(t) si può scrivere come una trasformata di Fourier di a(ω)

$$a(t) = e^{-i\omega_0 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega a(\omega)e^{-i\omega t} \overset{df}{=} e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(t)$$

"cappuccio"

Dove ω è quindi lo shift in frequenza rispetto alla portante ω_0

Con a "cappuccio" considero solo la parte lentamente variabile del segnale senza la portante.

Risulta:

$$[a(t), a^+(t')] = \delta(t - t')$$

Sapendo che $$[a(\omega), a^+(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$$

Sostituendo nella precedente otteniamo:

$$2\sqrt{RT}|\alpha|\left(\hat{a}_0 e^{-i\varphi+i\frac{\pi}{2}} + \hat{a}_0^+ e^{+i\varphi-i\frac{\pi}{2}}\right) = 2\sqrt{RT}|\alpha|\left(\hat{a}_0(t)e^{-i\theta} + \hat{a}_0^+(t)e^{+i\theta}\right) =$$

$$= 2\sqrt{RT}|\alpha|X(t,\theta)$$

Vedi definizione di X

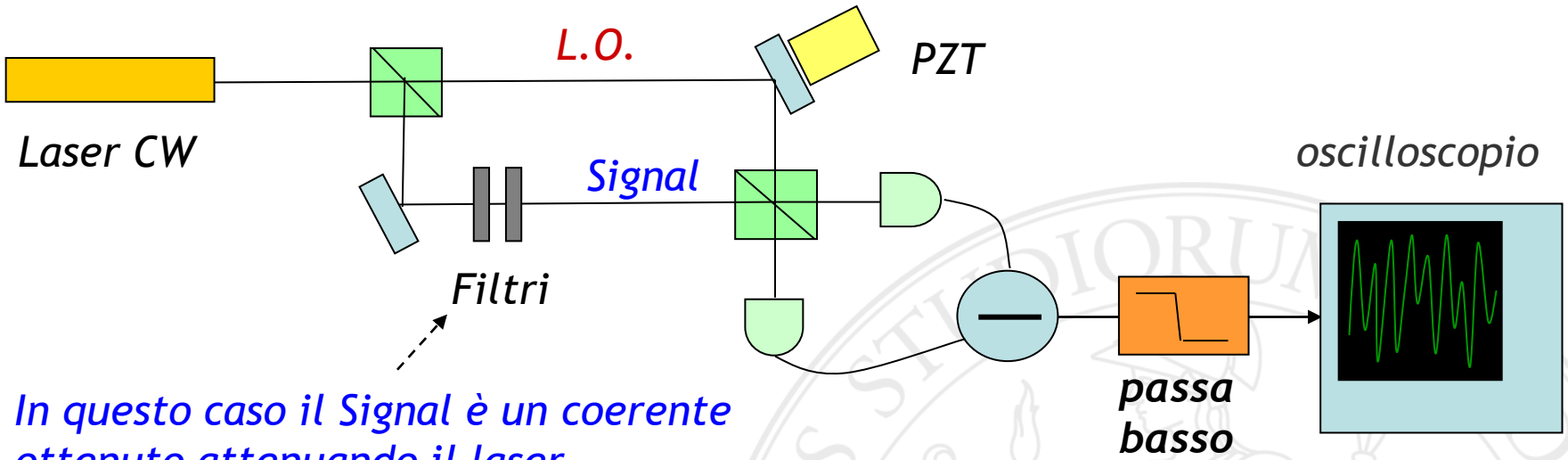
Quindi è sparita la parte veloce relativa alla portante e ciò che osserviamo al tempo t è una corrente proporzionale al campo con fase θ

$$\boxed{\hat{i}_(t) \propto \hat{X}(t,\theta)}$$

se R=T

Questo però è ciò che si ottiene in un caso ideale. Nella realtà dobbiamo tenere conto delle varie sorgenti di rumore e del fatto che T ed R non sono esattamente uguali e costanti e del fatto che anche la fase è affetta da rumore.

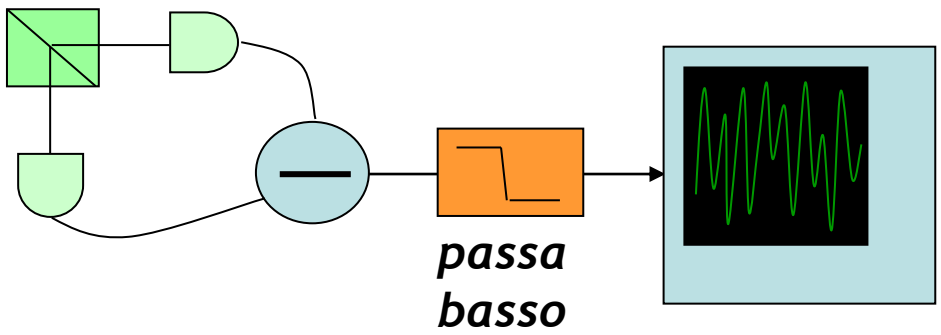
Apparato sperimentale ideale per la rivelazione omodina bilanciata.



In questo caso il Signal è un coerente ottenuto attenuando il laser

L'apparato basato su un interferometro di Mach-Zehnder permette di selezionare la differenza di fase tra il L.O. e il Signal. La fase viene cambiata per mezzo di un piezoelettrico attaccato ad uno specchio lungo il cammino del L.O. Nello schema in figura il signal è un coerente ma la trattazione che verrà fatta vale per qualunque stato.

Problema della misura continuata nel tempo



Nel formalismo sviluppato compare il tempo, ma cosa vuol dire fare una misura al tempo t?

L'apparato sperimentale ha il suo tempo di risposta uguale all'inverso della banda spettrale passante (nello schema potrebbe essere quella del filtro passa basso). Quindi vediamo il campo relativo ad una funzione d'onda collassata nel tempo di risposta dell'apparato. Ad esempio il numero medio di fotoni contenuti nello stato coerente osservato è il numero che mediamente arriva in questo tempo di risposta. Ovvero, lo stato osservato non è definito indipendentemente dall'apparato di misura perché il flusso di energia è continuo. In un caso impulsato invece possiamo prendere come stato quello contenuto nell'intervallo temporale dell'impulso.

Quanto detto può essere condensato dal punto di vista matematico nella seguente equazione:

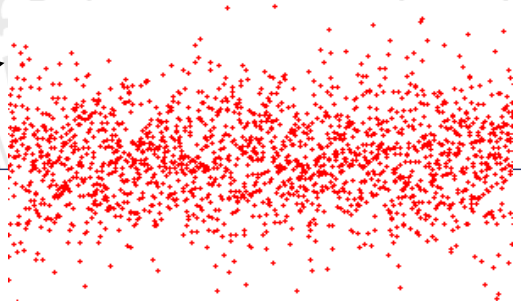
$$\boxed{a_0(t) = e^{-i\omega_0 t}\int d\omega F(\omega) a_0(\omega) e^{-i\omega t} \overset{df}{=} e^{-i\omega_0 t}\hat{a}_0(t)}$$

Dove F è la funzione di risposta spettrale dell'apparato (ad esempio una funzione a gradino associata al filtro passa basso).

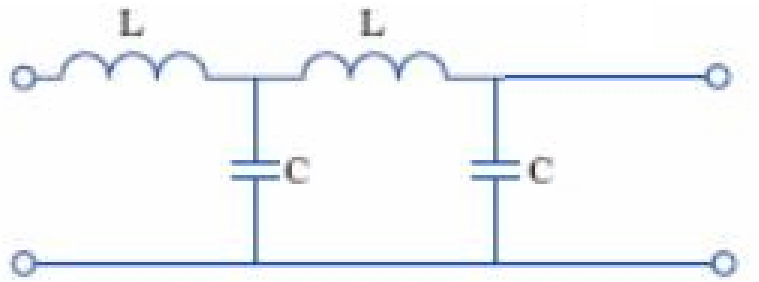
Esercizio: calcolare $[a(t), a^{+}(t')]$

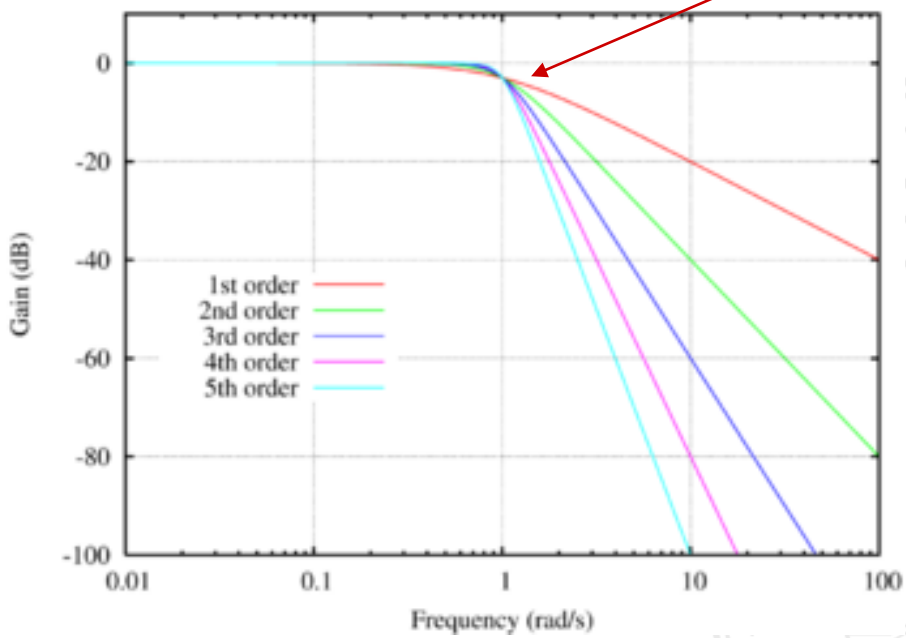
Quindi la misura al tempo t automaticamente non può essere interpretata come misura istantanea ma come una misura relativa a ciò che è arrivato sul rivelatore in un tempo pari all'inverso della banda spettrale (ciò va a modificare il commutatore tra a(t) e $a^{+}(t')$)

Ogni punto si riferisce ad un intervallo $\Delta t = 1/\Delta\nu$



Tipico filtro passa basso Filtro Butterworth





Frequenza di taglio (attenuazione di 3dB sulla potenza)

La funzione di risposta è

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

Dove ω_o è la frequenza di taglio e n è l'ordine del filtro

Caso realistico

Sorgenti di rumore

Fase: $\theta(t) = \theta + \delta\theta(t)$

Rumore principalmente dovuto alla turbolenza dell'aria e alle vibrazioni meccaniche (circa 1kHz)

$$\hat{\imath}_-(t) \propto (R-T)a_1^+(t)a_1(t) + 2\sqrt{RT}|\alpha|X(t,\theta) + K(t)$$

Laser:

$$a_1(t) = (\alpha(t) + \delta C(t) + \delta a_1(t))e^{-i\omega_o t}$$

$\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ — *LASER classico (consideriamo questa parte costante)*

δC — *Rumore classico del laser (< 1MHz)*

δa_1 — *Rumore quantistico (bianco)*

Trasmittività e Riflettività:

$$T(t) = T + \delta T(t)$$
$$R(t) = R + \delta R(t)$$

Ad esempio si può includere in T ed R anche l'accoppiamento e le fluttuazioni relative (circa 1kHz)

Rumore elettronico dell'amplificatore differenziale e dei rivelatori:

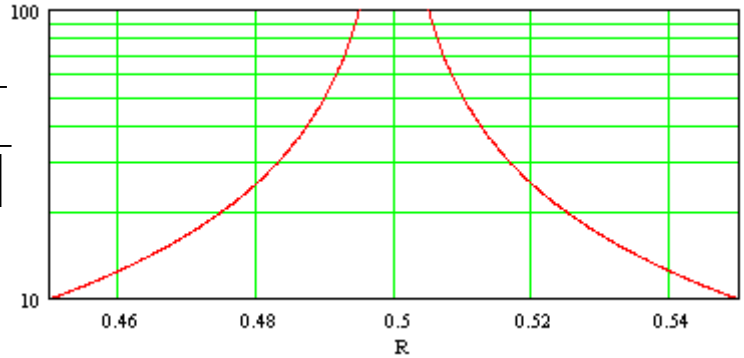
$K(t)$ — *Tipicamente alto alle basse frequenze (< 1MHz)*

Per sopprimere il rumore quantistico del laser è semplice dimostrare che deve essere soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$R - T << 2\sqrt{RT}$$

Ciò non crea grossi problemi

$$\frac{2\sqrt{RT}}{|R-T|}$$



Dimostrazione: considero solo il rumore quantistico del laser

$$a_1^+(t)a_1(t) = (\alpha^* + \delta a^+)(\alpha + \delta a) \approx |\alpha|^2 + |\alpha|\left(\delta a_1 e^{-i\varphi} + \delta a_1^+ e^{+i\varphi}\right) =$$

$$= |\alpha|^2 + |\alpha| X_{laser}(\varphi)$$

Lo devo sostituire nell'equazione completa e confrontare con il pezzo relativo al segnale

Segnale costante che elimino

Per il rumore di fase è necessario inscatolare l'interferometro, isolare le fonti di calore, usare montaggi stabili e ovviamente un tavolo ottico (il tavolo ottico deve avere grande massa circa 300kg in modo da minimizzare la sua frequenza di risonanza (pochi Hz), in questo modo le frequenze tipiche di vibrazione staranno sulla coda della sua funzione di risposta)

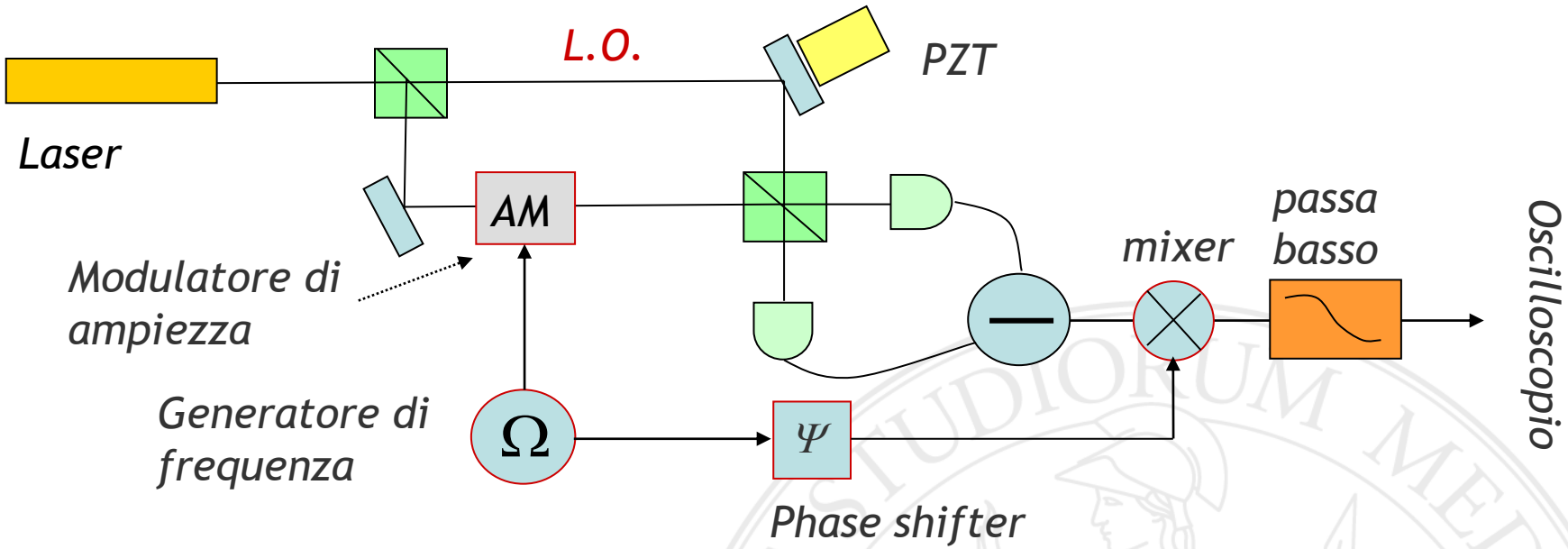
Il rumore classico del laser è invece più problematico (eliminarlo totalmente per mezzo di una omodina richiederebbe un bilanciamento molto più preciso) ed il metodo migliore per eliminarlo è quello di implementare una eterodina

L'eterodina permette anche di evitare il rumore a bassa frequenza tipico dei rivelatori

Per eliminare la fluttuazione su T ed R la cosa migliore è focalizzare direttamente il fascio sulla superficie del rivelatore (che è "piccola" perchè servono tempi di risposta veloci, circa 0.5x0.5mm^2) senza usare accoppiatori o fibre (in particolare fibre multimodo)

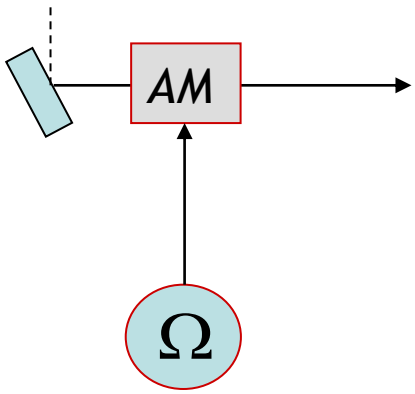
Rivelazione eterodina

Con il bordo rosso i dispositivi ottici/elettronci aggiunti rispetto all'omodina



Per passare dalla rivelazione omodina a quella eterodina è necessario aggiungere: modulatore di ampiezza/fase, generatore di frequenza, phase shifter e mixer. L'idea è quella di aggirare i rumori a bassa frequenza del laser e dell'elettronica shiftando in frequenza (alcuni MHz) il signal. In questo modo il segnale di interesse è ad alta frequenza dove non sono presenti i rumori che si vogliono eliminare, alla fine il segnale viene riportato a bassa frequenza usando un mixer.

Modulazione di ampiezza



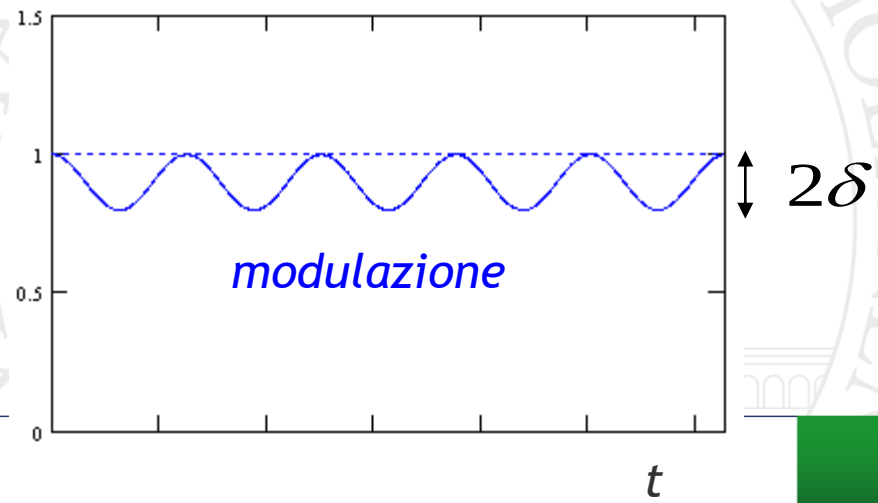
Il modulatore di ampiezza (che potrebbe consistere in una cella di Pockels guidata da un generatore RF amplificato e seguita da un PBS) agisce sul campo introducendo un termine modulato alla frequenza Ω

Per scrivere bene il termine modulato nella notazione quantistica conviene partire dalla notazione classica considerando il campo reale e non la parte complessa:

campo

modulazione

$$\cos(\omega_0 t)[(1-\delta)+\delta\cos(\Omega t)]$$

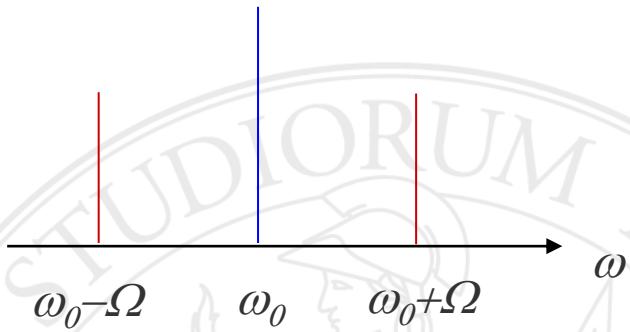


poi introduco la notazione complessa:

$$\cos(\omega_0 t)\left[(1-\delta)+\delta\cos(\Omega t)\right]=$$

$$\left(\frac{1-\delta}{2}\right)\left(e^{-i\omega_0 t}+c.c.\right)+\frac{\delta}{4}\left(e^{-i\underline{(\omega_0+\Omega)}t}+c.c.+e^{-i\underline{(\omega_0-\Omega)}t}+c.c.\right)$$

La modulazione ha generato due sidebands attorno alla portante, ovvero, ha spostato lo stato che stava alla frequenza ω_0 sulle sidebands:



Adesso considero la notazione quantistica associando gli operatori alle relative frequenze, inoltre trascuro la parte alla frequenza portante perchè sarà eliminata dall'elettronica (mixer+filtro):

$$\tilde{a}_0=e^{-i\omega_0 t}\left(\hat{a}_{0_\Omega}e^{-i\Omega t}+\hat{a}_{0_{-\Omega}}e^{+i\Omega t}\right)=e^{-i\omega_0 t}\,\tilde{\hat{a}}_0$$

$\sim$ ⇨ *2 sidebands*

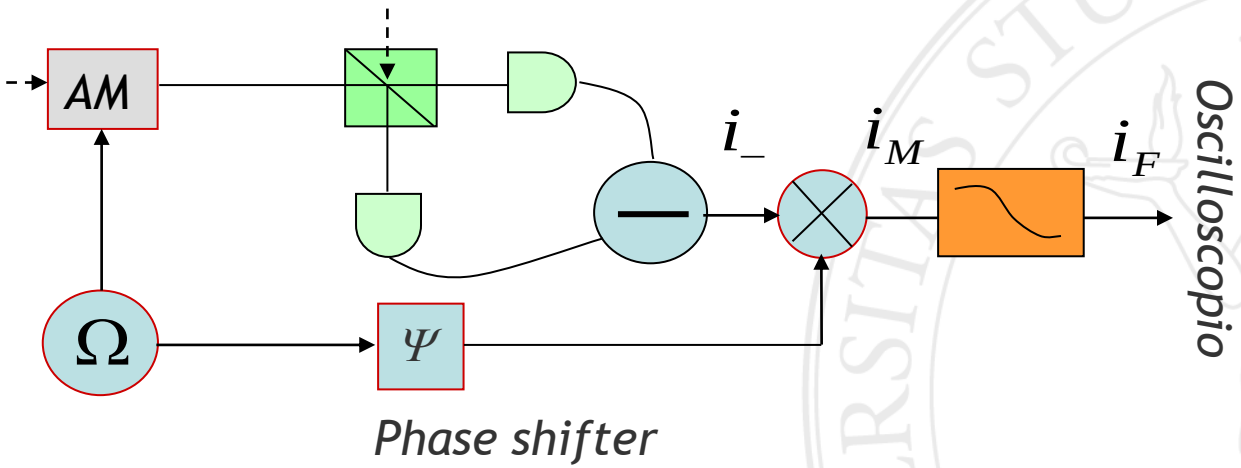
$\frown$ ⇨ *senza portante*

A questo punto è possibile recuperare i risultati ottenuti in precedenza sostituendo $\hat{a}_0$ *con* $\tilde{\hat{a}}_0$

$$2\sqrt{RT}|\alpha|\left(\hat{a}_0(t)e^{-i\theta} + \hat{a}_0^+(t)e^{+i\theta}\right) \Longrightarrow 2\sqrt{RT}|\alpha|\left(\tilde{\hat{a}}_0(t)e^{-i\theta} + \tilde{\hat{a}}_0^+(t)e^{+i\theta}\right)$$

$$= 2\sqrt{RT}|\alpha|\tilde{X}(t,\theta)$$

Il segnale di interesse è dunque attorno alla frequenza Ω*. Adesso dobbiamo riportarlo attorno alla frequenza 0 per mezzo di un mixer:*



Mixer

$$i_M(t) = i_-(t)\cdot\cos(\Omega t + \Psi) \propto \tilde{X}(t,\theta)\cdot\cos(\Omega t + \Psi)$$

$$i_M(t) \propto \tilde{X}(t,\theta)\cdot\cos(\Omega t+\Psi) = \frac{1}{4}\left(\tilde{a}_0(t)\,e^{-i\theta} + \tilde{a}_0^{+}(t)\,e^{+i\theta}\right)\left(e^{-i\Omega t - i\Psi} + e^{+i\Omega t + i\Psi}\right) =$$

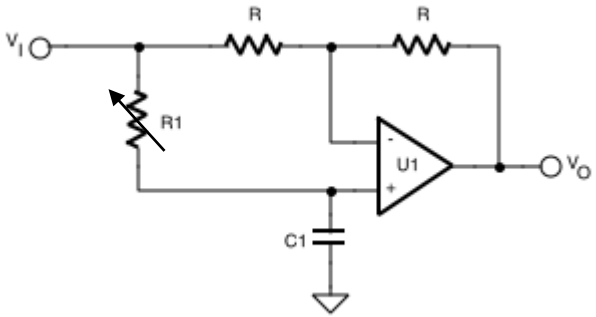
$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left[\left(\tilde{a}_{0\Omega}(t)e^{-i\Omega t} + \tilde{a}_{0-\Omega}(t)e^{+i\Omega t}\right)e^{-i\theta}\right]\left(e^{-i\Omega t - i\Psi} + e^{+i\Omega t + i\Psi}\right) + \\ \frac{1}{4}\left[\left(\tilde{a}^{+}_{0\,\Omega}(t)e^{+i\Omega t} + \tilde{a}^{+}_{0\,-\Omega}(t)e^{-i\Omega t}\right)e^{+i\theta}\right]\left(e^{-i\Omega t - i\Psi} + e^{+i\Omega t + i\Psi}\right) = \end{cases} \quad *$$

$$\frac{1}{4}\left(\underline{\tilde{a}_{0\Omega}(t)e^{-i\theta+i\Psi} + \tilde{a}^{+}_{0\,\Omega}(t)e^{+i\theta-i\Psi}} + \underline{\tilde{a}_{0-\Omega}(t)e^{-i\theta-i\Psi} + \tilde{a}^{+}_{0\,-\Omega}(t)e^{+i\theta+i\Psi}}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(X_{\Omega}(t,\theta-\Psi) + X_{-\Omega}(t,\theta+\Psi)\right) = i_F(t)$$

Come si vede il risultato dipende da Ψ, per ottenere il risultato voluto (sovrapporre i campi delle sidebands con la stessa fase) è necessario agire sul phase-shifter in modo da ottenere Ψ=0 .

Esempio di schema elettrico di un phase-shifter



$$|V_o| = |V_i|$$

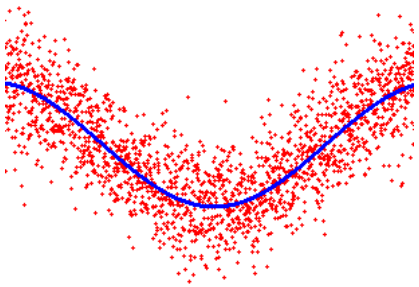
$$\varphi_{shift} = \arctan\left(\frac{2\Omega R_1 C_1}{(\Omega R_1 C_1)^2 - 1}\right)$$

** I termini a frequenza 2Ω vengono eliminati dal filtro passa basso*

Procedura per porre Ψ uguale a 0:

Genero un coerente sulle sidebands e quindi ottengo:

$$X_{\pm\Omega}(t,\theta) = A\cos(\theta) + \Delta X_{\pm\Omega}(t,\theta)$$



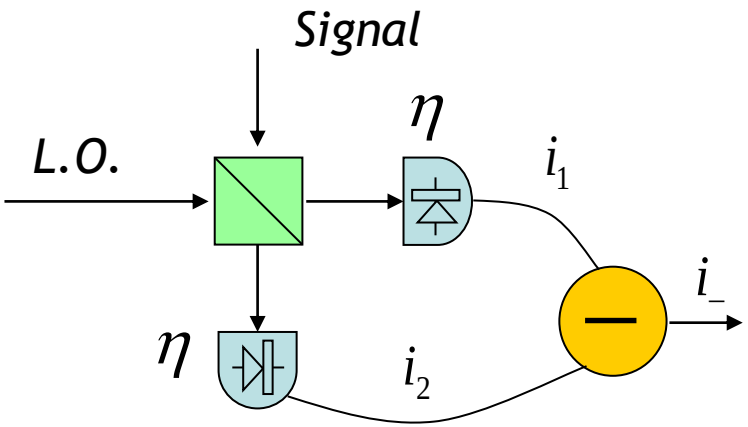
Nel caso dello stato coerente il rumore non dipende da θ. Inoltre i rumori sulle due sidebands sono scorrelati

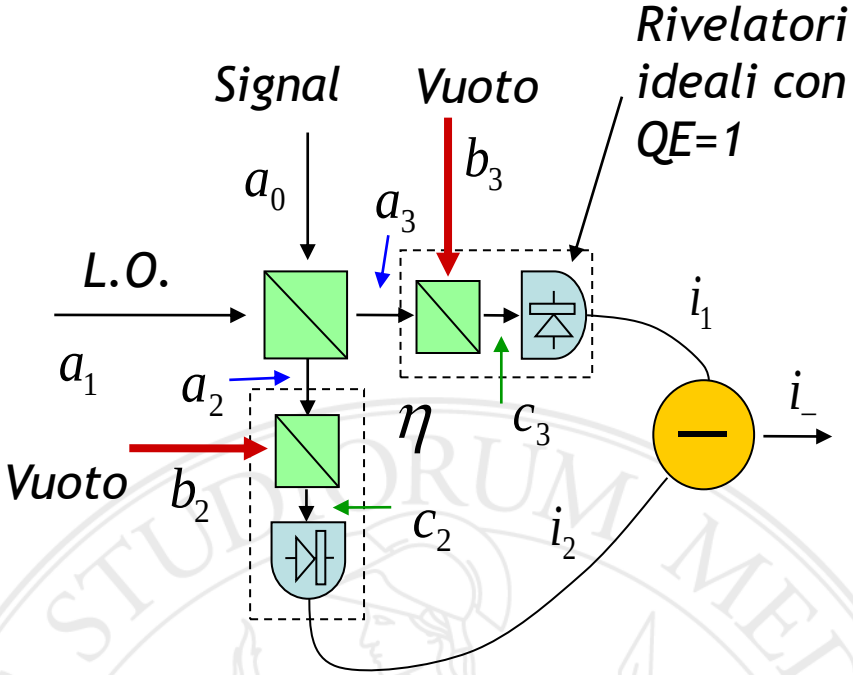
$$X_{\Omega}(t,\theta-\Psi) + X_{-\Omega}(t,\theta+\Psi) = A\cos(\theta-\Psi) + A\cos(\theta+\Psi) + \Delta X_{\Omega} + \Delta X_{-\Omega} =$$
$$= \underline{2A\cos\theta\cos\Psi} + \Delta X_{\Omega} + \Delta X_{-\Omega}$$

La media è: $2A\cos(\theta)\cos(\Psi)$ *La varianza è:* $\langle \Delta X_{\Omega}^{2} \rangle + \langle \Delta X_{-\Omega}^{2} \rangle$

Nel caso coerente troviamo che la media (ma non il rumore) dipende da Ψ. Per ottenere Ψ=0 deve essere massimizzata l'ampiezza del segnale.

Effetto della QE dei rivelatori





$$i_-(t) = c_3^+(t)c_3(t) - c_2^+(t)c_2(t)$$

$$c_2 = \sqrt{\eta}\,a_2 + i\sqrt{1-\eta}\,b_2$$

$$c_3 = \sqrt{\eta}\,a_3 + i\sqrt{1-\eta}\,b_3$$

$$c_2 = \sqrt{\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 + ia_1)\right\} + i\sqrt{1-\eta}\,b_2$$

$$c_3 = \sqrt{\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(ia_0 + a_1)\right\} + i\sqrt{1-\eta}\,b_3$$

vuoto

BS (50:50)

In questo caso il L.O. amplifica non solo il signal ma anche il vuoto aggiuntivo sui modi b2 e b3:

$$i_-(t) \approx \underbrace{i\eta\left(a_0^+ a_1 - a_0 a_1^+\right)}_{signal} + \underbrace{\sqrt{\frac{\eta(1-\eta)}{2}}\left(b_2^+ a_1 + b_2 a_1^+\right) + \sqrt{\frac{\eta(1-\eta)}{2}} i\left(-b_3^+ a_1 + b_3 a_1^+\right)}_{vuoto}$$

$$a_1 \approx |\alpha| e^{i\phi} e^{-i\omega_0 t}$$

$$i_-(t) = \eta |\alpha| X_1(t, \theta) + \sqrt{\frac{\eta(1-\eta)}{2}} |\alpha| X_2\left(t, \theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{\frac{\eta(1-\eta)}{2}} |\alpha| X_3\left(t, \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

X_2 e X_3 sono due rumori di vuoto, quindi sono scorrelati e non dipendono dalla fase

Dunque i due rumori di vuoto possono essere sommati in quadratura:

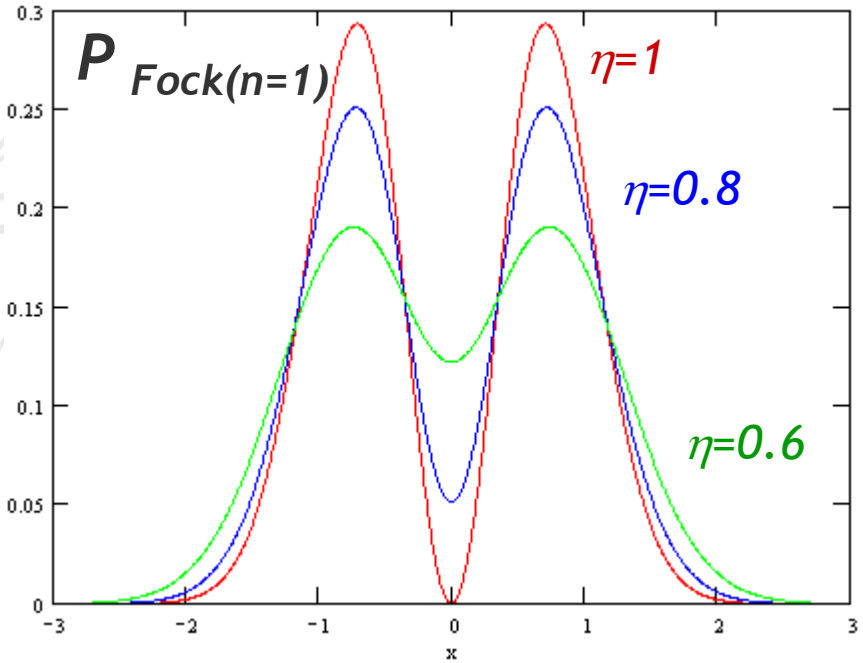
$$i_- = \sqrt{\eta}|\alpha|\left\{\sqrt{\eta}\, X_0(\theta,t) + \sqrt{1-\eta}\, X_V(t)\right\}$$

Dove X_V è il rumore di vuoto.

*Nel caso di uno **stato squeezed** al diminuire della QE ovviamente diminuisce la differenza tra X_1 e X_2 e si tende a Xv*

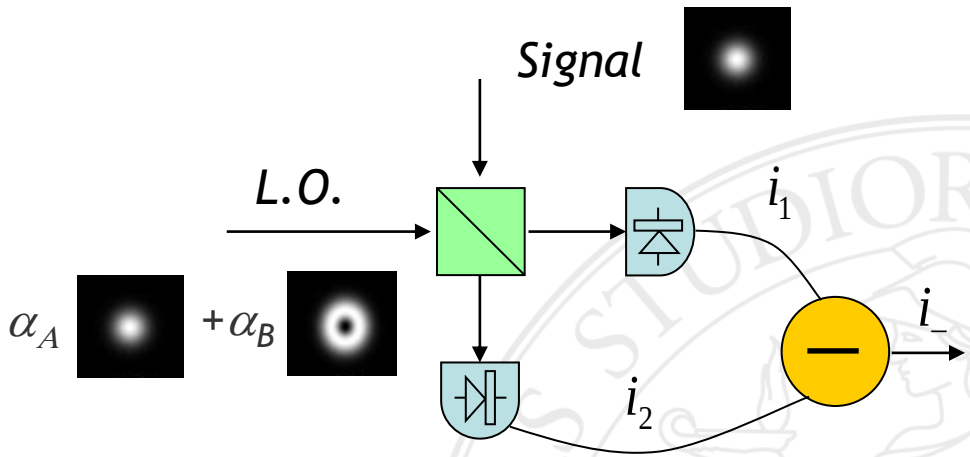
*Nel caso di un **coerente** lo stato rimane coerente ma diminuisce l'ampiezza (ovvero diminuisce N medio al diminuire della QE)*

*Nel caso di uno stato di **Fock** con n=1 al diminuire della QE cambia la forma della funzione di distribuzione e diminuisce la visibilità dei due picchi:*



Effetto della non perfetta sovrapposizione spaziale tra signal e L.O.

Poniamo che il L.O. sia dato dalla sovrapposizione di due modi spaziali (ortogonali quindi) che chiamiamo A e B mentre il signal sta solo su A (e quindi su B abbiamo il vuoto)



Dunque il L.O. amplificherà sia il segnale che il vuoto, ovvero:

$$i_- = |\alpha_A| X_{0A}(\theta, t) + |\alpha_B| X_V(t) \propto \sqrt{\eta}(\theta, t) + \sqrt{1-\eta} X_V(t)$$

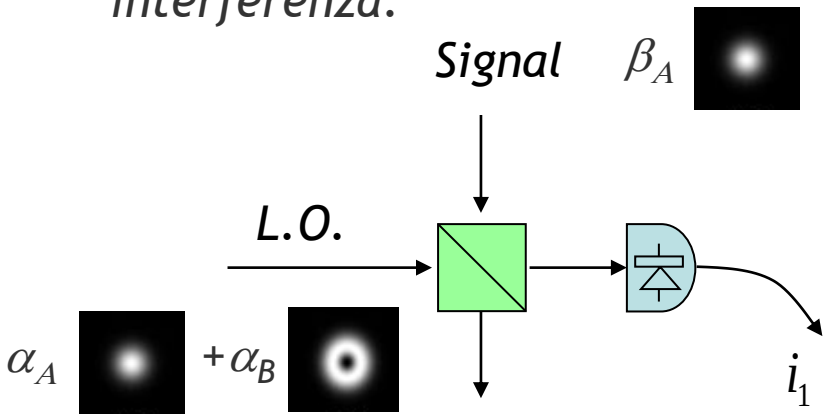
$$\eta \overset{df}{=} \frac{|\alpha_A|^2}{|\alpha_A|^2 + |\alpha_B|^2}$$

Dunque il risultato è identico a quello che abbiamo ottenuto nel caso di bassa efficienza quantica dei rivelatori (abbiamo infatti che la distribuzione risultante è la convoluzione del vuoto (con il cambio di scala) e del segnale)

$$|\alpha_A| X_{0A}(\theta, t) + |\alpha_B| X_V(t)$$

Dipende da θ *Non dipende da* θ

Il rapporto tra le ampiezze dei modi può essere ottenuto mandando sul BS due coerenti con la stessa potenza e osservando la visibilità delle frange di interferenza:



$$i_1 \propto \left| \frac{i}{\sqrt{2}} |\beta_A| e^{i\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha_A| + |\alpha_B| \right) \right|^2$$

$$|\alpha_A|^2 + |\alpha_B|^2 = |\beta_A|^2$$

Potenza bilanciata

$$i_1 \propto 1 - \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1 + \frac{|\alpha_B|^2}{|\alpha_A|^2}}} \qquad Vis = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|\alpha_B|^2}{|\alpha_A|^2}}} = \sqrt{\eta}$$

Perdita di squeezing in funzione di η

In generale risulta: $X_m(t) = \sqrt{\eta}\, X_0(\theta, t) + \sqrt{1-\eta}\, X_V(t)$

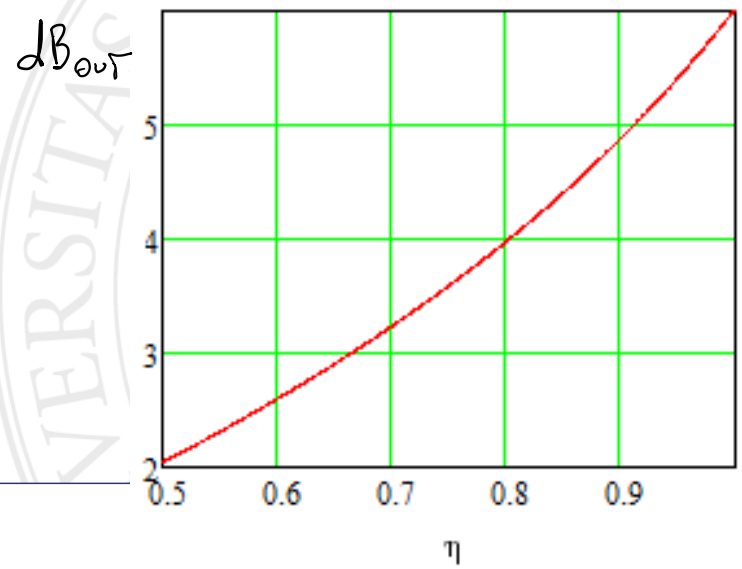
misurato

Se ho uno stato squeezed pongo: $\langle \Delta X_1^2 \rangle = e^{-4\chi t} \overset{df}{=} 1 - \varepsilon$

$$\Rightarrow \langle \Delta X_m^2 \rangle = \eta(1-\varepsilon) + (1-\eta) = 1 - \eta\varepsilon$$

$$dB_{out} = 10 \log \frac{1}{1-\eta\varepsilon}$$

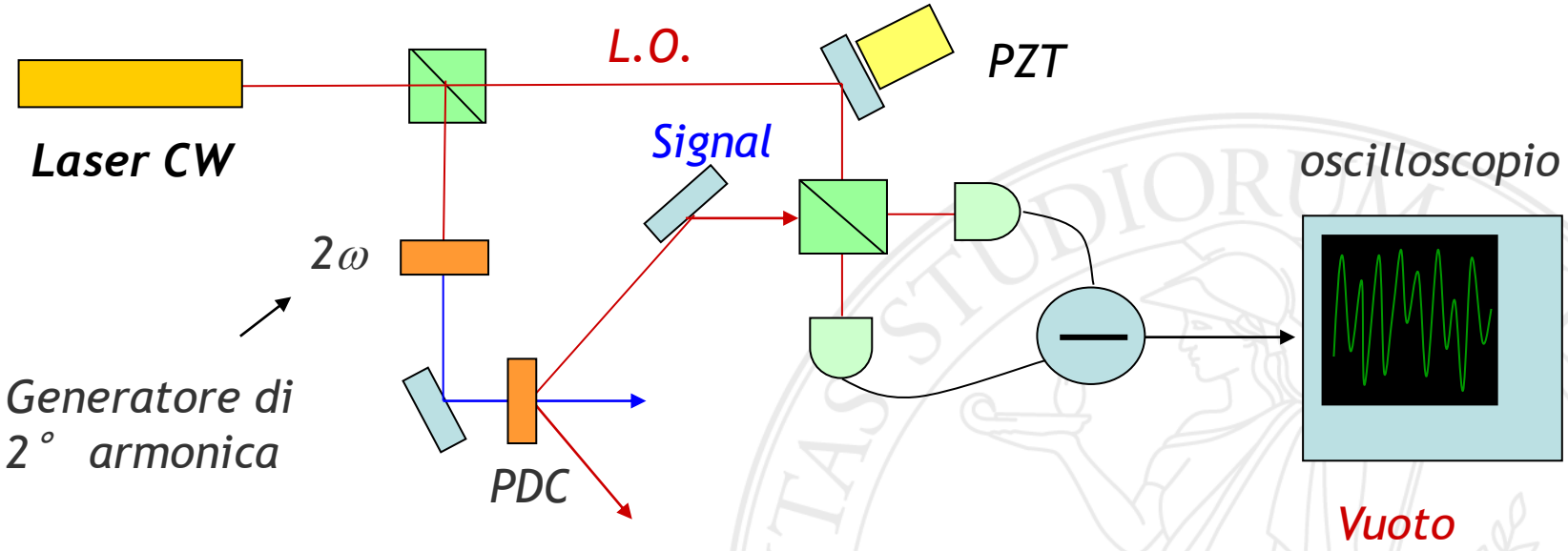
$$dB_{in} = 10 \log \frac{1}{1-\varepsilon} = 6\,dB$$



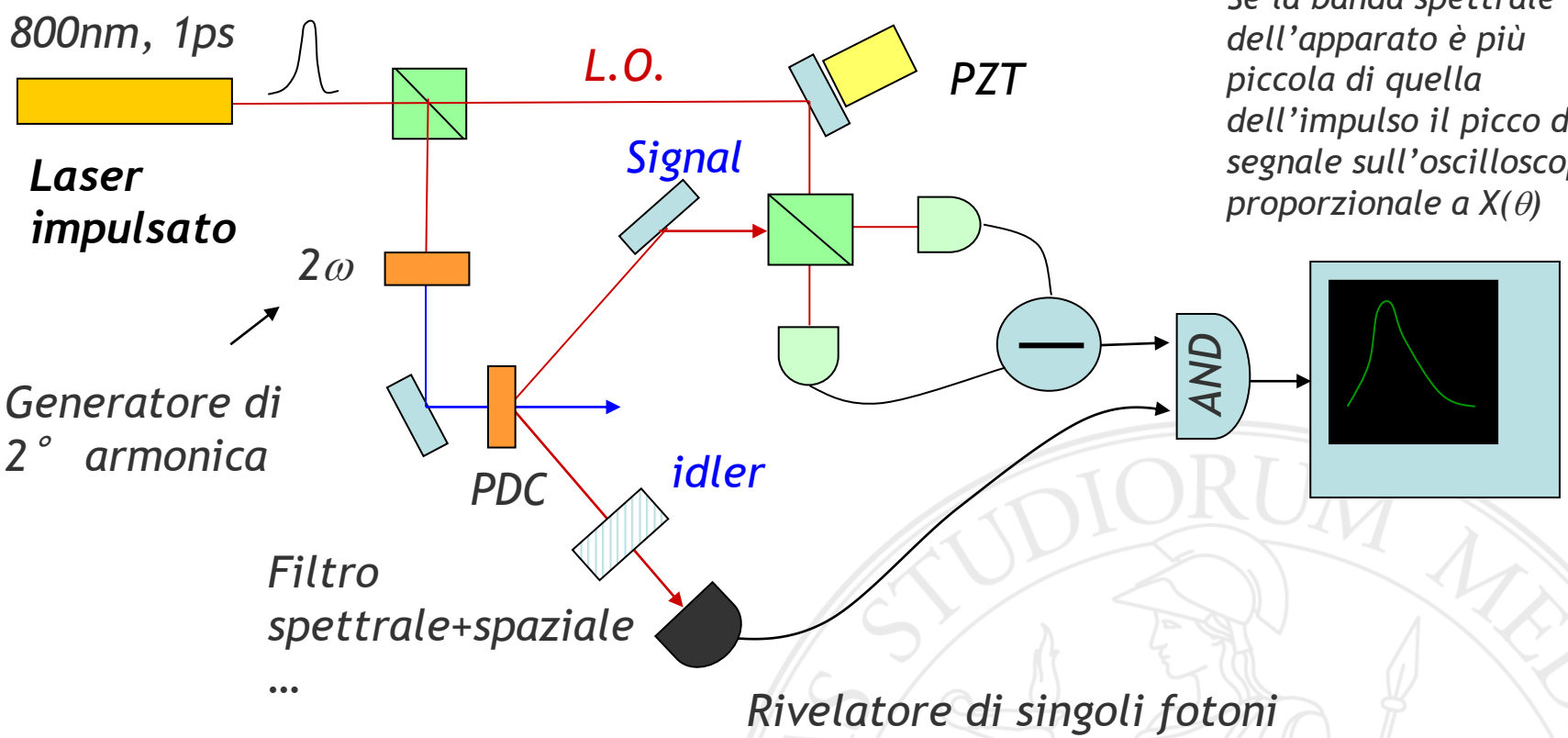
Omodina bilanciata in regime impulsato

caso dello stato di Fock

Se uso un laser in continua per generare coppie di fotoni via PDC quello che vedrò è solo il vuoto



Si capisce intuitivamente che poiché l'efficienza di generazione di coppie è bassissima il L.O. andrà ad amplificare solo il vuoto.



Se la banda spettrale dell'apparato è più piccola di quella dell'impulso il picco del segnale sull'oscilloscopio è proporzionale a $X(\theta)$

Usando un laser impulsato posso prendere il segnale dell'omodina solo quando rivelo un fotone sull'idler.

Attenzione: lo spettro e il modo spaziale del L.O. si devono essere "uguali" a quelli del signal (per questo sull'idler abbiamo un filtro spettrale e un filtro spaziale)

Generazione e rivelazione di stati Squeezed (esempio)

Measurement of the quantum states of squeezed light

G. Breitenbach, S. Schiller & J. Mlynek

Fakultät für Physik, Universität Konstanz, D-78457 Konstanz, Germany

NATURE | VOL 387 29 MAY 1997

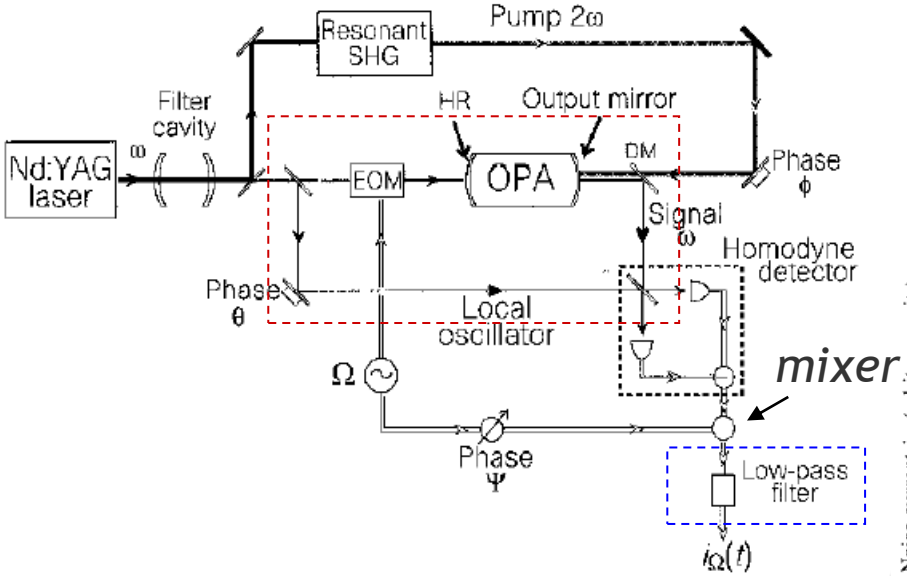


Figure 1 Experimental scheme for generating bright squeezed light and squeezed vacuum with an optical parametric oscillator (OPA). The electric field quadratures are measured in the homodyne detector while scanning the phase θ. A computer performs the statistical analysis of the photocurrent i_Ω and reconstructs the quantum states. EOM, electro-optic modulator; DM, dichroic mirror; SHG, second harmonic generator; HR, high reflector.

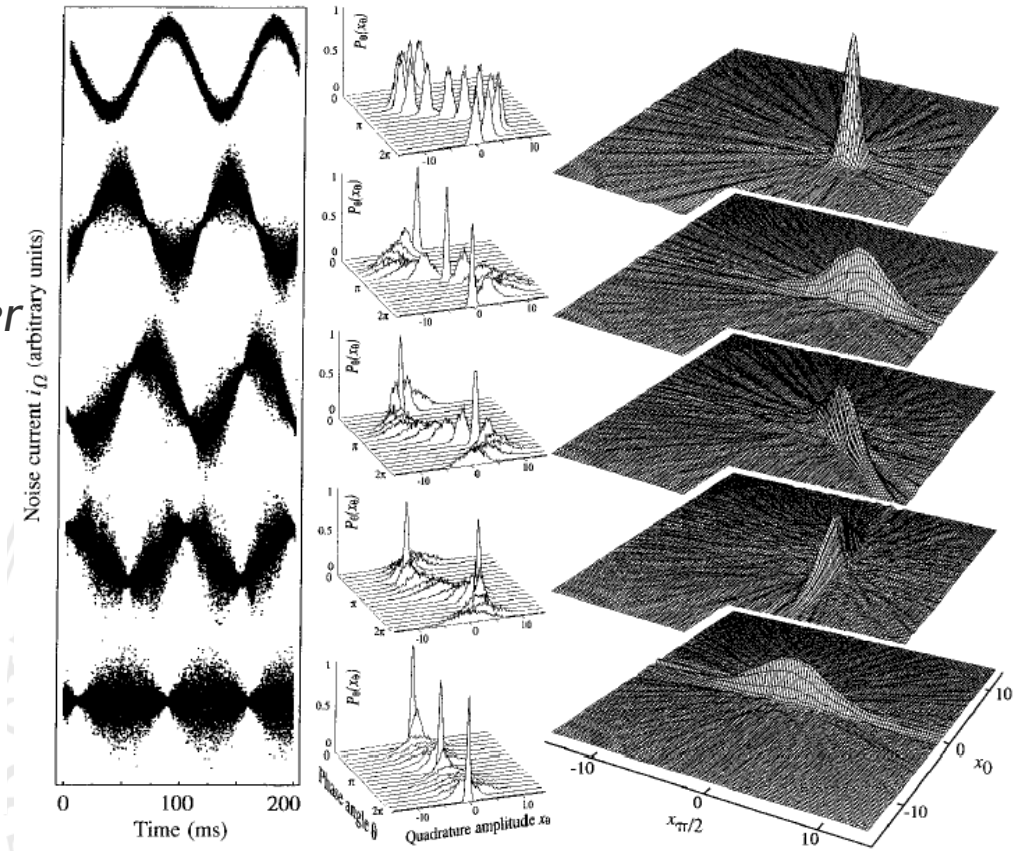


Figure 2 Noise traces in $i_\Omega(t)$ (left), quadrature distributions $P_\theta(x_\theta)$ (centre), and reconstructed Wigner functions (right) of generated quantum states. From the top: Coherent state, phase-squeezed state, state squeezed in the $\phi = 48°$-quadrature, amplitude-squeezed state, squeezed vacuum state. The noise traces as a function of time show the electric fields' oscillation in a 4π interval for the upper four states, whereas for the squeezed vacuum (belonging to a different set of measurements) a 3π interval is shown. The quadrature distributions (centre) can be interpreted as the time evolution of wave packets (position probability densities) during one oscillation period. For the reconstruction of the quantum states a π interval suffices.

PRL **100,** 033602 (2008) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 25 JANUARY 2008

Observation of Squeezed Light with 10-dB Quantum-Noise Reduction

Henning Vahlbruch, Moritz Mehmet, Simon Chelkowski, Boris Hage, Alexander Franzen, Nico Lastzka, Stefan Goßler, Karsten Danzmann, and Roman Schnabel

Institut für Gravitationsphysik, Leibniz Universität Hannover and Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut), Callinstr. 38, 30167 Hannover, Germany

(Received 13 August 2007; published 23 January 2008)

Squeezing of light's quantum noise requires temporal rearranging of photons. This again corresponds to creation of quantum correlations between individual photons. Squeezed light is a nonclassical manifestation of light with great potential in high-precision quantum measurements, for example, in the detection of gravitational waves [C. M. Caves, Phys. Rev. D **23**, 1693 (1981)]. Equally promising applications have been proposed in quantum communication [H. P. Yuen and J. H. Shapiro, IEEE Trans. Inf. Theory **24**, 657 (1978)]. However, after 20 years of intensive research doubts arose whether strong squeezing can ever be realized as required for eminent applications. Here we show experimentally that strong squeezing of light's quantum noise is possible. We reached a benchmark squeezing factor of 10 in power (10 dB). Thorough analysis reveals that even higher squeezing factors will be feasible in our setup.

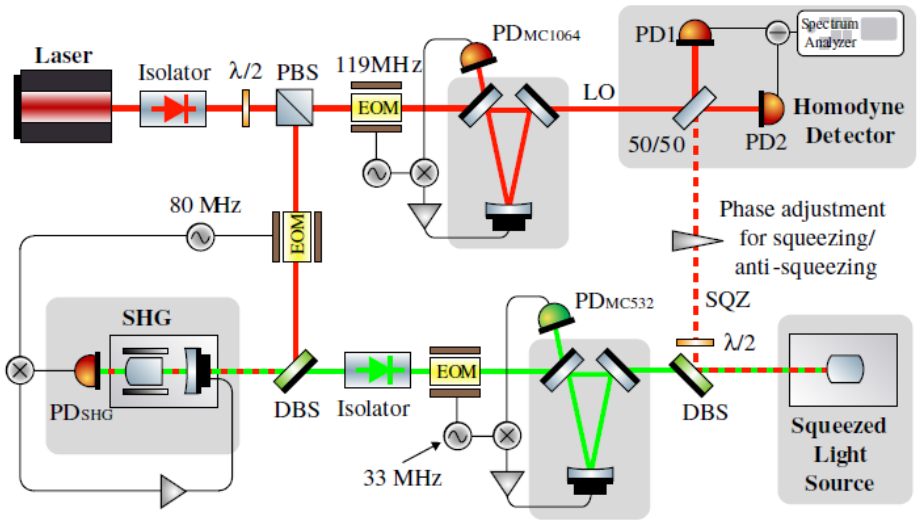


FIG. 1 (color online). Schematic of the experimental setup. Squeezed states of light (SQZ) at 1064 nm were generated by type I optical parametric oscillation (OPO) below threshold. SHG, Second harmonic generation (SHG); Polarizing beam splitter (PBS); Dichroic beam splitter (DBS); Local oscillator (LO), photodiode (PD); electro-optical modulator (EOM).

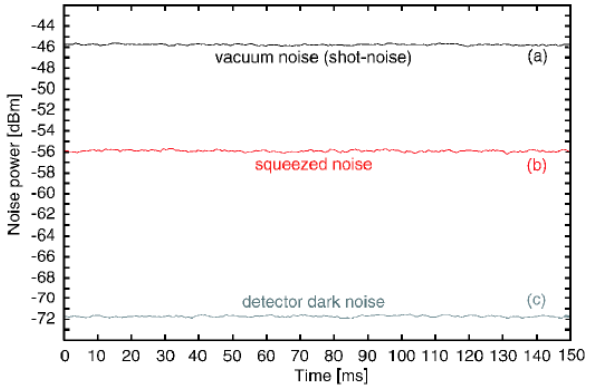


FIG. 2 (color online). Quantum noise powers at a Fourier frequency of 5 MHz, measured with a resolution bandwidth of 100 kHz and video bandwidth of 100 Hz. Trace (a) shows the vacuum noise level corresponding to 26.9 mW local oscillator power. Trace (b) shows the noise power of the squeezed vacuum states measured with the same local oscillator power. A nonclassical noise reduction of 10.12 dB below vacuum noise was observed. The electronic detector dark noise is shown in trace (c) and was not subtracted from the data. Each trace was averaged 3 times.

Quantum-to-Classical Transition with Single-Photon–Added Coherent States of Light

Alessandro Zavatta, Silvia Viciani, Marco Bellini*

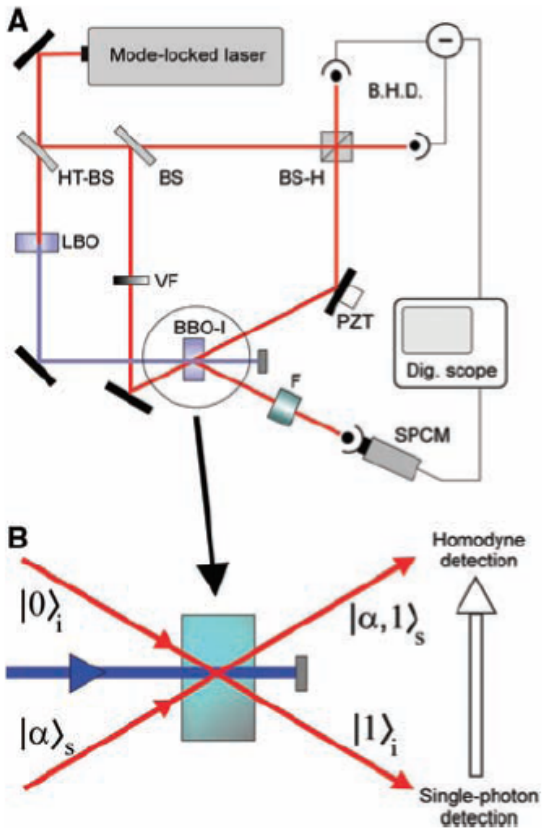


Fig. 2. Experimental apparatus and conceptual scheme for the conditional SPACS preparation. (A) Picosecond-duration pulses at 786 nm and at a repetition rate of 82 MHz from a mode-locked Ti:sapphire laser are split by a high-transmission (HT-BS) and a 50% (BS) beam splitter to serve as (i) the pump for spontaneous parametric down-conversion in a 3-mm-thick, type-I BBO crystal after frequency doubling in lithium triborate (LBO) crystal; (ii) the seed coherent field $|\alpha\rangle$, after proper attenuation by variable filters (VF); (iii) the local oscillator field for balanced homodyne detection (B.H.D.) after mixing with the investigated states in another 50% beam splitter (BS-H). F is a combination of spectral and spatial filters constituted by a pair of etalon interference filters with a narrow (50 GHz) spectral width, and by a single-spatial–mode optical fiber directly connected to a single-photon counting module (SPCM). PZT is a piezoelectric transducer used to vary the relative phase between the SPACS and the LO. Additional optics and computer-controlled optical delay lines to adjust the synchronization of the different pulses are not shown here for the sake of clarity. (B) The conditional preparation of a SPACS takes place whenever a "click"' is registered on the single-photon detector placed in the output idler mode. Each of these detection events triggers the acquisition in the balanced homodyne detector analyzing the output signal mode (*17*).

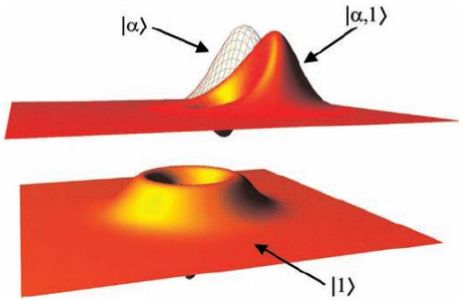


Fig. 1. Theoretical Wigner functions for some of the quantum states of light discussed in the text. Upper surface, SPACS $|\alpha,1\rangle$; wire-frame surface, original unexcited coherent state $|\alpha\rangle$; lower surface, single-photon Fock state $|1\rangle$. The horizontal plane coordinates represent two orthogonal quadratures of the field. The single-photon Wigner function is centered at the origin of the phase space. A value of $|\alpha|^2 = 1$ is used.

22 OCTOBER 2004 VOL 306 SCIENCE www.sciencemag.org

Probing Quantum Commutation Rules by Addition and Subtraction of Single Photons to/from a Light Field

Valentina Parigi,[1] Alessandro Zavatta,[2] Myungshik Kim,[3] Marco Bellini[1,4]*

The possibility of arbitrarily "adding" and "subtracting" single photons to and from a light field may give access to a complete engineering of quantum states and to fundamental quantum phenomena. We experimentally implemented simple alternated sequences of photon creation and annihilation on a thermal field and used quantum tomography to verify the peculiar character of the resulting light states. In particular, as the final states depend on the order in which the two actions are performed, we directly observed the noncommutativity of the creation and annihilation operators, one of the cardinal concepts of quantum mechanics, at the basis of the quantum behavior of light. These results represent a step toward the full quantum control of a field and may provide new resources for quantum information protocols.

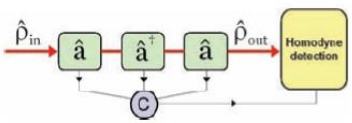


Fig. 1. Schematic of the sequence of modules representing specific quantum operators acting on a quantum light field (denoted by its density matrix $\hat{\rho}_{in}$). A module for single-photon creation (denoted by $\hat{a}^\dagger$) is placed between two modules for single-photon annihilation (denoted by $\hat{a}$). The final state $\hat{\rho}_{out}$ is conditionally prepared and analyzed by the homodyne detector whenever a specific sequence of "clicks" arrives from the modules and is passed on by the logic circuit (C). Single-click events herald the production of a "photon-added" or "photon-subtracted" state. Double-click events herald the production of a quantum state that has undergone the sequence of photon addition and subtraction or vice versa. Double photon-subtraction events are not considered in the present experiment.

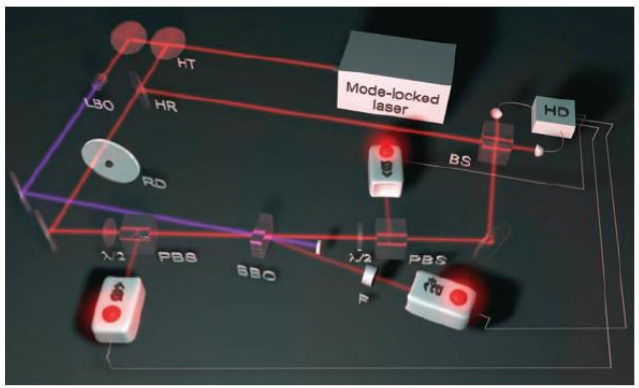


Fig. 2. Experimental setup. Pulses at a wavelength of 786 nm are emitted at a repetition rate of 82 MHz from a mode-locked picosecond Ti:sapphire laser. They are split by a high-transmission (HT) and a high-reflectivity (HR) beam splitter to serve as (i) the pump for parametric down-conversion in a 3-mm-thick, type-I beta-barium borate (BBO) crystal after frequency-doubling in a lithium triborate (LBO) crystal; (ii) the seed thermal field, after scattering off a rotating ground glass disk (RD) and spatial cleaning by a single-mode optical fiber (not shown); and (iii) the local oscillator field for balanced homodyne detection (HD) after mixing with the investigated states in a 50% beam splitter (BS). F is a combination of spectral and spatial filters made of a pair of etalon interference filters with a narrow (50 GHz) spectral width, and a single-mode optical fiber directly connected to an on/off photodetector (Perkin-Elmer SPCM AQR-14, denoted by $\hat{a}^\dagger$). Pairs of half-wave plates ($\lambda/2$) and polarizing beam splitters (PBS) serve to implement the photon-subtraction modules together with fiber-coupled on/off photodetectors (denoted by $\hat{a}$).

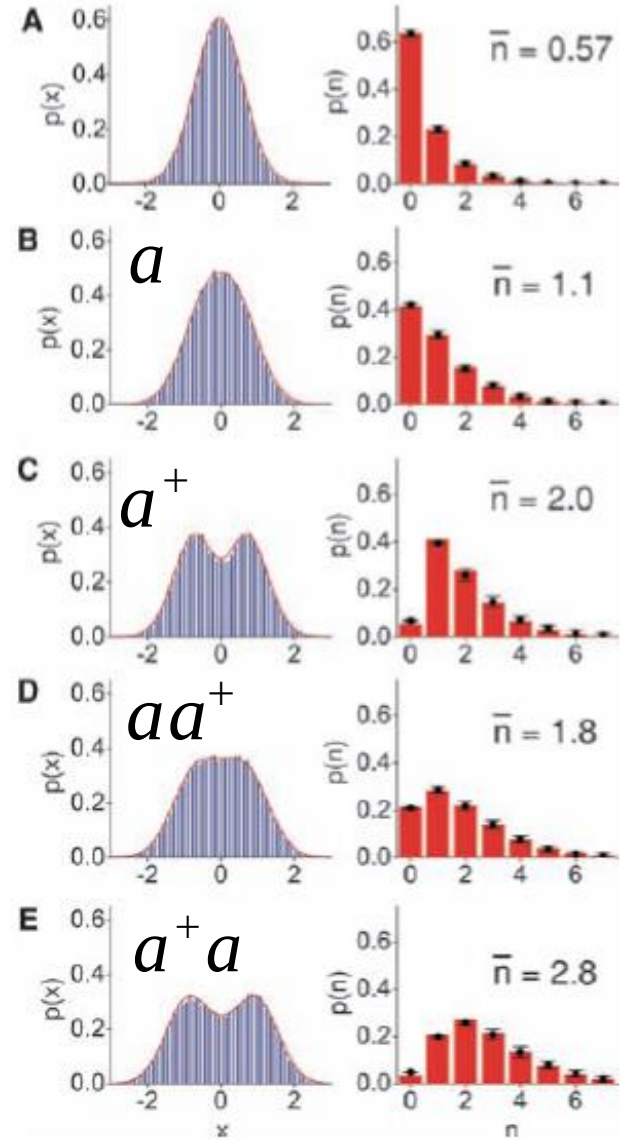


Fig. 3. Experimental quadrature distribution histograms and theoretical curves (superposed solid lines) for (**A**) the original thermal state; (**B**) the photon-subtracted state; (**C**) the photon-added state; (**D**) the photon-added-then-subtracted state; (**E**) the photon-subtracted-then-added state. The second column shows the corresponding theoretical (red bars) and experimentally reconstructed (solid circles with error bars) photon number distributions. States resulting from a final photon addition present a very small vacuum contribution, which makes them highly nonclassical. The residual vacuum term derives from imperfections in the preparation of the states and is satisfactorily accounted for by the theoretical model (*2*). The mean photon number in the state is also shown as calculated from the reconstructed distributions.

FISICHE E NATURALI

Quantum Homodyne Tomography of a Two-Photon Fock State

Alexei Ourjoumtsev, Rosa Tualle-Brouri, and Philippe Grangier
Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS UMR 8501, 91403 Orsay, France
(Received 20 December 2005; published 1 June 2006)

We present a continuous-variable experimental analysis of a two-photon Fock state of free-propagating light. This state is obtained from a pulsed nondegenerate parametric amplifier, which produces two intensity-correlated twin beams. Counting two photons in one beam projects the other beam in the desired two-photon Fock state, which is analyzed by using a pulsed homodyne detection. The Wigner function of the measured state is clearly negative. We developed a detailed analytic model which allows a fast and efficient analysis of the experimental results.

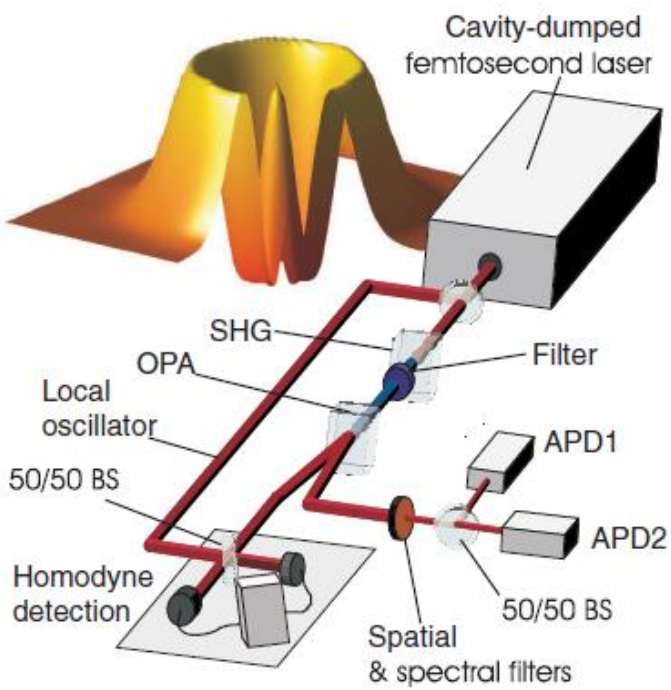


FIG. 1 (color online). Experimental setup and Wigner function of the two-photon state propagating in the experiment (corrected for homodyne detection losses, see text).

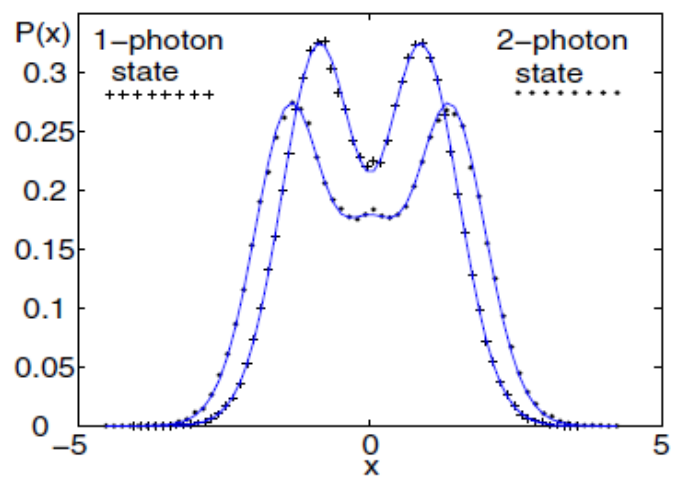


FIG. 2 (color online). Experimental quadrature measurements and quadratures reconstructed using our model (see text).