UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Approfondimento rivelazione omodina e PDC

Simone Cialdi

Outline

- Omodina e squeezing
  - Schema apparato lab
  - Squeezing in cavità
  - Stabilizzazione della cavità ottica (PDH)
  - Modifica PDH nel caso di cavità con cristallo non lineare
  - Interpretazione della rivelazione omodina
- Entanglement via PDC (effetti di decoerenza)
  - Decoerenza spaziale e temporale
  - Compensazione decoerenza spaziale
  - Compensazione decoerenza temporale

Schema apparato lab

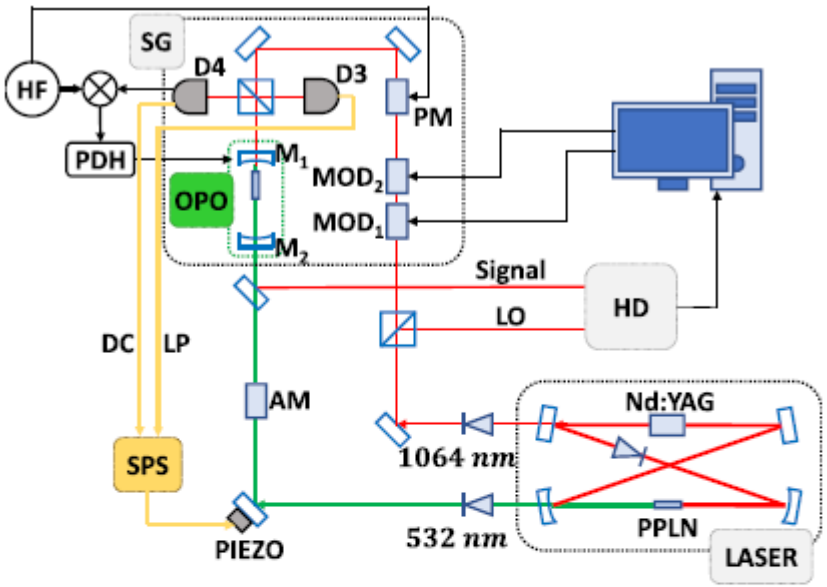


FIG. 8. Scheme of our setup. The main parts are three: a LASER which produces both the pump at 532 nm and the seed and the local oscillator (LO) at 1064 nm for the state detection; a state generation part (SG) used for quantum states generation and squeezing; a detection part based on homodyne detection (HD). An amplitude modulator (AM) is used to control the pump intensity. The OPO frequency is stabilized implementing the canonical PDH technique exploiting a high-frequency generator (HF) and a phase modulator (PM), while the seed-pump phase stabilization is performed by the seed-pump stabilizer (SPS) and it is based on our technique. See text for details.

Following the scheme in Fig. 8, the setup consists of three main blocks. A homemade laser source (LASER) is a Nd:YAG and it generates both the seed (at 1064 nm) and the pump (at 532 nm, 320 mW for the results presented) for the OPO, since it is internally frequency doubled with a PPNL crystal. The internal second-harmonic generation has a major advantage: it behaves as a damping force which suppresses the laser relaxing oscillations, dramatically decreasing its noise. Therefore, this configuration avoids the necessity of building an external cavity for the second-harmonic generation and of introducing other elements for the noise suppression [18]. The second block, the state generation (SG), is composed of two modulators (MOD_1 and MOD_2), which create quantum states on 3 MHz sidebands, and an OPO used for squeezing. A 10-mm-long $MgO:LiNbO_3$ crystal with antireflection coating is placed inside the cavity. States are then detected with a conventional homodyne detection scheme (HD), the third block of the setup, where a fraction of the source laser serves as the local oscillator (LO).

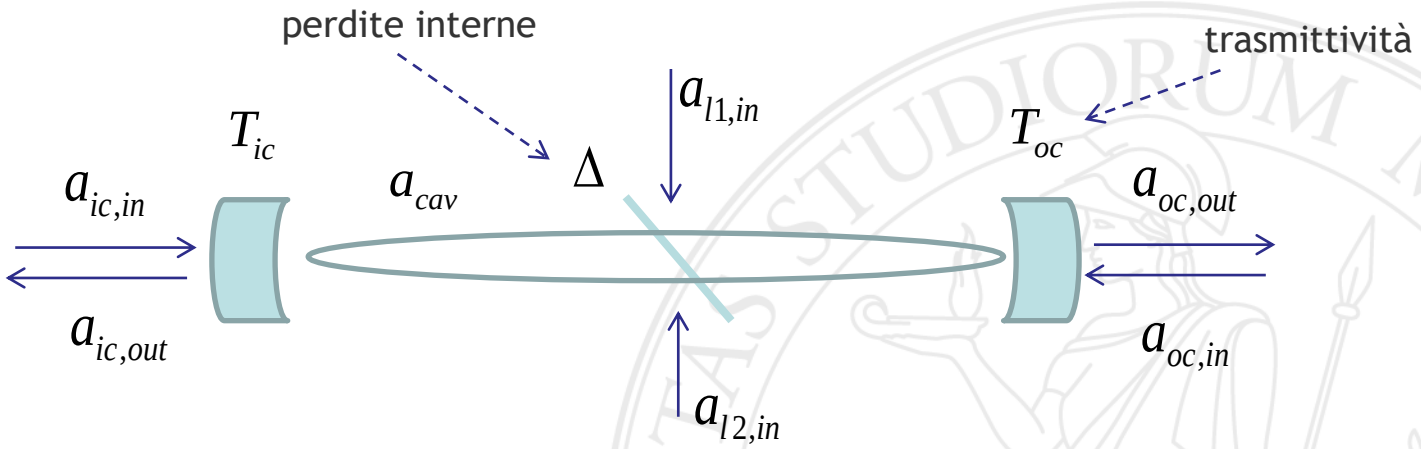
Both generation and detection are controlled by a computer. The OPO is stabilized by using a standard PDH technique [8,17], while the pump phase stabilization is performed with our method (SPS) based on the theoretical considerations given in Sec. II. As shown in Fig. 8, the detector D3 monitors the laser amplitude fluctuations (LP), so that the SPS error signal (DC) can be compensated for them. This error signal is manipulated with a proportional-integral controller (PI) and applied to a piezoelectric which varies the pump path length, resulting in a change of its phase in the OPO. The laser has a free spectral range of 200 MHz, while OPO of 3025 MHz (cavity length 37 mm).

PHYSICAL REVIEW A **104**, 053706 (2021)

PHYSICAL REVIEW LETTERS **124**, 163601 (2020)

1) Ricavo prima le equazioni per il modo in cavità senza interazione non lineare:

Per il momento indico con a(t) l'ampiezza complessa classica del campo nel riferimento rotante alla frequenza di risonanza della cavità (in un secondo momento applicherò la quantizzazione canonica).



I due specchi della cavità hanno trasmittività T_{ic} e T_{oc}. Le perdite interne della cavità sono schematizzate con un BS con riflettività Δ.

Adesso trovo l'equazione per la cavità seguendo il campo a_{cav} lungo un round-trip (τ è il tempo di round-trip) (attenzione: prendo con il segno + le riflessioni interne alla cavità) :

$$a_{cav}(t+\tau) = a_{cav}(t)\boxed{\sqrt{1-T_{ic}}\sqrt{1-T_{oc}}\sqrt{1-\Delta}\sqrt{1-\Delta}}^{*} +$$

$$+ a_{ic,in}\sqrt{T_{ic}} +$$

$$+ a_{oc,in}\sqrt{T_{oc}}\sqrt{\underline{1-T_{ic}}}\sqrt{1-\Delta} +$$

$$+ a_{l1}\sqrt{\Delta}\sqrt{\underline{1-T_{oc}}}\sqrt{\underline{1-T_{ic}}}\sqrt{1-\Delta} +$$

$$+ a_{l2}\sqrt{\Delta}\sqrt{\underline{1-T_{ic}}} \approx a_{cav}(t) + \dot{a}_{cav}\tau$$

I termini sottolineati in blu possono essere approssimati a 1 grazie al fatto che domina il termine di perdità dovuto al delta o alla bassa trasmittività

Perché i tempi di evoluzione di a sono molto più lunghi del tempo di round trip

* Inoltre posso approssimare:

$$\sqrt{1-T_{ic}}\sqrt{1-T_{oc}}\sqrt{1-\Delta}\sqrt{1-\Delta} \approx 1 - \frac{T_{ic}}{2} - \frac{T_{oc}}{2} - \frac{2\Delta}{2}$$

Quindi considerando tutte le approssimazioni fatte posso riscrivere l'equazione per a_{cav} nel seguente modo:

$$\dot{a}_{cav}(t) \approx -a_{cav}(t)\left(\frac{T_{ic}}{2\tau}+\frac{T_{oc}}{2\tau}+\frac{2\Delta}{2\tau}\right)+a_{ic,in}\frac{\sqrt{T_{ic}}}{\tau}+a_{oc,in}\frac{\sqrt{T_{oc}}}{\tau}+a_{l1}\frac{\sqrt{\Delta}}{\tau}+a_{l2}\frac{\sqrt{\Delta}}{\tau}$$

Definisco i rate di perdita:

$$\gamma=\gamma_{ic}+\gamma_{oc}+2\gamma_{l}=\frac{T_{ic}}{2\tau}+\frac{T_{oc}}{2\tau}+\frac{2\Delta}{2\tau}$$

Definisco l'ampiezza complessa a(t) nel seguente modo:

$$\boxed{a(t)\overset{df}{=}\sqrt{\tau}\,a_{cav}(t)}$$

Mi serve per far apparire i rate di perdita nell'equazione finale (vedi pg seguente)

E sostituendo nella precedente ottengo:

$$\dot{a}(t) = -\gamma\, a(t) + \sqrt{2\gamma_{ic}}\, a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\, a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_l}\, a_{l1} + \sqrt{2\gamma_l}\, a_{l2}$$

Se il modo a non è sul picco della risonanza della cavità dobbiamo aggiungere un termine (considero solo la parte di evoluzione della fase lungo un round trip)

$$a(t+\tau) = a(t) + \dot{a}(t)\tau = a(t)e^{i\phi} \approx a(t)(1+i\phi)$$

$$\dot{a}(t) \approx i\frac{\phi}{\tau} a(t) = i\frac{\omega_{cav}\tau - \omega\tau}{\tau} a(t) = i\Omega a(t)$$

ritardo di fase del modo non risonante

Quindi l'equazione completa è:

$$\boxed{\dot{a}(t) = -(\gamma - i\Omega)a(t) + \sqrt{2\gamma_{ic}}\, a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\, a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_l}\, a_{l1} + \sqrt{2\gamma_l}\, a_{l2}}$$

Adesso definisco le condizioni al contorno:

Per poter scrivere i campi all'uscita della cavità in funzione dei campi in ingresso devo aggiungere le condizioni al contorno:

$$a_{k,out} = -a_{k,in} + \sqrt{T_k}\, a_{cav} \qquad k = \{ic,\ oc\}$$

La riflessione esterna alla cavità porta ad un cambio di segno

Attenzione: per scrivere la precedente equazione ho approssimato ad 1 tutti i termini del tipo: $\sqrt{1-\delta}$

Adesso introduco la definizione di a(t):

$$\boxed{a_{k,out} \approx -a_{k,in} + \sqrt{2\gamma_k}\, a}$$

Quindi ricapitolando abbiamo:

$$\dot{a}(t) = -(\gamma - i\Omega)a(t) + \sqrt{2\gamma_{ic}}\,a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\,a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{l}}\,a_{l1} + \sqrt{2\gamma_{l}}\,a_{l2}$$

$$a_{ic,out} = -a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{ic}}\,a$$

$$a_{oc,out} = -a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\,a$$

La precedente può essere quantizzata immediatamente sostituendo al campo classico a(t) l'operatore a(t) ottenendo così l'equazione di Langevin. Per questo operatore abbiamo:

$$\left[a(t), a^{+}(t')\right] = \delta(t - t')$$

Oppure una funzione con una larghezza temporale pari all'inverso delle spettro raccolto dall'apparato di misura.

$$\left[a(t), a(t')\right] = 0$$

$$\left[a^{+}(t), a^{+}(t')\right] = 0$$

2) Aggiungo i termini relativi all'interazione non lineare con il cristallo che sta all'interno della cavità

Scrivo l'Hamiltoniana di interazione:

$$H = \frac{i\hbar\chi_2}{2}\left(b_{cav}{}^{+} a_{cav}^{2} - b_{cav}\, a_{cav}^{+}{}^{2}\right)$$

Dove b è il modo della seconda armonica (la pompa)

La sostituisco nell'equazione: $\frac{dO}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, O]$

E ottengo:

$$\frac{da_{cav}}{dt} = -\chi_2 b_{cav} a_{cav}^{+}$$

$$\frac{db_{cav}}{dt} = \frac{\chi_2}{2} a_{cav}^{2}$$

$$\frac{da}{dt} = -\chi_2 \frac{b}{\sqrt{\tau}} a^{+} \overset{df}{=} -\chi b a^{+}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\chi_2}{2\sqrt{\tau}} a^{2} \overset{df}{=} \frac{\chi}{2} a^{2}$$

Trovo la soluzione considerando solo la parte di interazione non lineare (mi sarà utile nel seguito)

Se considero una condizione di non depletion della pompa (b) e considero questa classica e dunque b è un c-numero, per le due quadrature del campo ottengo:

$$\boxed{\frac{dX_{1,2}}{dt} = \mp \tilde{\chi}\, X_{1,2}}$$

Con questa definizione il vuoto ha varianza 1

Dove: $\tilde{\chi} = \chi b$ $\quad X_1 = (a + a^+)$ $\quad X_2 = \frac{1}{i}(a - a^+)$

$$X_1^{out} = e^{-\tilde{\chi} t}\, X_1^{in} = \sqrt{S}\, X_1^{in} \qquad \left\langle \Delta X_1^{out\,2} \right\rangle = S$$

$$X_2^{out} = e^{+\tilde{\chi} t}\, X_2^{in} = \sqrt{\frac{1}{S}}\, X_2^{in} \qquad \left\langle \Delta X_2^{out\,2} \right\rangle = \frac{1}{S}$$

3) Scrivo le equazioni complete per a e b in cavità

$$\dot{a}(t) = -(\gamma - i\Omega)a(t) - \chi b a^{+} + \sqrt{2\gamma_{ic}}\,a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\,a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{l}}\,a_{l1} + \sqrt{2\gamma_{l}}\,a_{l2}$$

$$\dot{b}(t) = -(\gamma_2 - i\Omega_2)b(t) - \frac{\chi}{2}a^2 + \sqrt{2\gamma_{2ic}}\,b_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{2oc}}\,b_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{2l}}\,b_{l1} + \sqrt{2\gamma_{2l}}\,b_{l2}$$

$$a_{ic,out} = -a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{ic}}\,a$$

$$a_{oc,out} = -a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\,a$$

$$b_{ic,out} = -b_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{2ic}}\,b$$

$$b_{oc,out} = -b_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{2oc}}\,b$$

Attenzione, i rate di perdita sono quelli relativi alla seconda armonica

Nota: non farò le trasformate di Fourier del campo perché sperimentalmente quello che vedo è X(t) che a sua volta è l'integrale su tutte le componenti spettrali che passano nel filtro passa banda finale (quasi monocromatico ma non proprio monocromatico…)

Nel seguito prenderò sempre il caso di non-depletion per la pompa (classica). Inoltre considero il caso in cui le trasmittività degli specchi sono del 100% per la pompa. Quindi b è un c-numero costante. Inoltre mi metto nella condizione di risonanza (Ω=0).

Infine pongo sempre la condizione di equilibrio per cui considero nulla la derivata rispetto al tempo di a(t).

Riassumendo ottengo sempre:

$$\cancel{\dot{a}(t)} = -(\gamma - \cancel{i\Omega})a(t) - \chi b a^{+} + \sqrt{2\gamma_{ic}}\,a_{ic,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\,a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{l}}\,a_{l1} + \sqrt{2\gamma_{l}}\,a_{l2}$$

$$a_{oc,out} = -a_{oc,in} + \sqrt{2\gamma_{oc}}\,a$$

Prendo solo questa condizione al contorno perché osservo il campo solo dopo l'accoppiatore di uscita

Quindi sostituendo la condizione al contorno nella prima equazione ottengo:

$$a_{oc,out} = -\frac{\tilde{\chi}}{\gamma}\left(a^{+}_{oc,out} + a^{+}_{oc,in}\right) + \frac{1}{\gamma}\left((\gamma_{oc} - \gamma_{ic} - 2\gamma_{l})a_{oc,in} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_{ic}}\,a_{ic,in} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_{l}}\,a_{l1} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_{l}}\,a_{l2}\right)$$

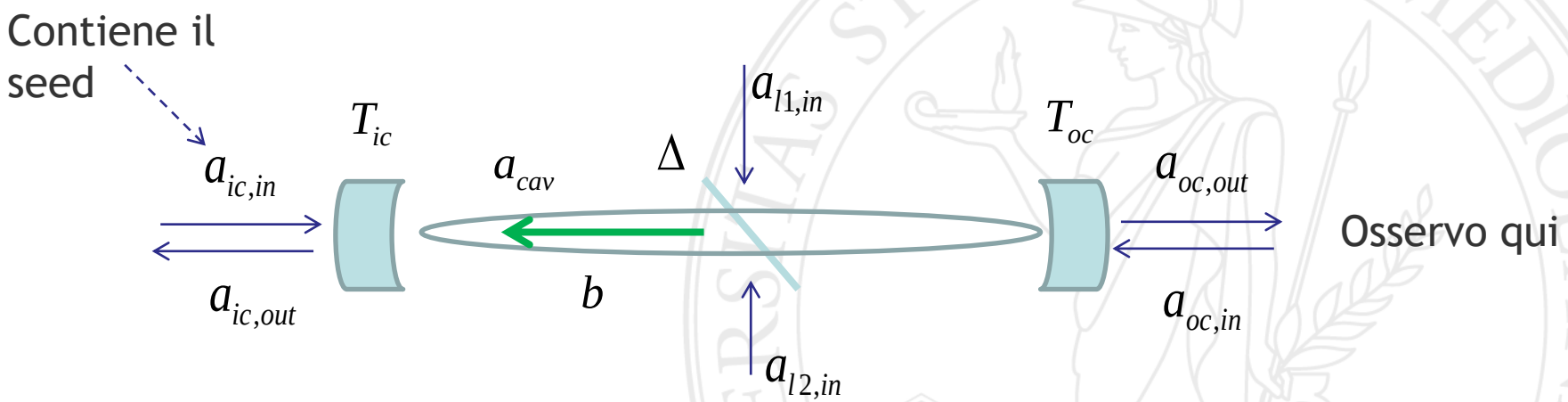
Partendo dalla precedente equazione posso scrivere direttamente le equazioni per X1 e X2. dopo qualche passaggio, facendo attenzione ai segni, ottengo le equazioni finali:

$$X1_{oc,out} = \frac{\left((\gamma_{oc} - \gamma_{ic} - 2\gamma_l - \tilde{\chi})X1_{oc,in} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_{ic}}\,X1_{ic,in} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_l}\,X1_{l1} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_l}\,X1_{l2}\right)}{\gamma + \tilde{\chi}}$$

$$X2_{oc,out} = \frac{\left((\gamma_{oc} - \gamma_{ic} - 2\gamma_l + \tilde{\chi})X2_{oc,in} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_{ic}}\,X2_{ic,in} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_l}\,X2_{l1} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_l}\,X2_{l2}\right)}{\gamma - \tilde{\chi}}$$

4) Analizzo il nostro caso con perdite interne e perdite dell'accoppiatore di ingresso piccole ma <u>non</u> trascurabili (l'efficienza di escape della cavità non è il 100%)

$$X_{1,2_{oc,out}} = \frac{1}{\gamma \pm \tilde{\chi}} \left\{ \left(\gamma_{oc} - \gamma_{ic} - 2\gamma_l \mp \tilde{\chi}\right) X_{1,2_{oc,in}} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_{ic}}\, X_{1,2_{ic,in}} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_l}\, X_{1,2_{l1}} + \sqrt{4\gamma_{oc}\gamma_l}\, X_{1,2_{l2}} \right\}$$



Per quanto riguarda le varianze di X1 e X2 abbiamo (considerando che è 1 su tutti gli ingressi):

$$\left\langle \Delta X^2_{1,2_{oc,out}} \right\rangle = \frac{1}{(\gamma \pm \tilde{\chi})^2}\left\{\left(\gamma_{oc} - \gamma_p \mp \tilde{\chi}\right)^2 + 4\gamma_{oc}\gamma_p\right\} \qquad \gamma_p = \gamma_{ic} + 2\gamma_l$$

A numeratore dentro parentesi aggiungo e tolgo: $\pm 4\gamma_{oc}\tilde{\chi}$

Ricavo:

$$\boxed{\left\langle \Delta X^2_{1,2_{oc,out}} \right\rangle = 1 \mp \frac{4\gamma_{oc}\tilde{\chi}}{(\gamma \pm \tilde{\chi})^2} = 1 \mp \eta_{esc}\frac{4d}{(1 \pm d)^2}}$$

$$\eta_{esc} = \frac{\gamma_{oc}}{\gamma}$$

E' il rapporto tra le perdite dovute all'accoppiatore di uscita e quelle complessive

$$d \overset{df}{=} \frac{\tilde{\chi}}{\gamma} = \sqrt{\frac{P}{P_{th}}}$$

Potenza di soglia dell'OPO

Come si vede lo stato non è più a minima indeterminazione.

$$\left\langle \Delta X^2_{1_{oc,out}} \right\rangle = S_1 \qquad \left\langle \Delta X^2_{2_{oc,out}} \right\rangle = \frac{1}{S_2} \qquad \text{dove:} \qquad S_1 \neq S_2$$

Confronto squeezing passaggio singolo e squeezing in cavità

$Rin := 0.9988 \qquad Rout := 0.917 \qquad \Delta := 2.4 \cdot 10^{-3}$

$Tin := 1 - Rin \qquad Tout := 1 - Rout$

$\tau := \frac{1}{3025 \cdot 10^{6}} \qquad c := 3 \cdot 10^{8} \qquad n := 2.2 \qquad L := 10^{-2}$

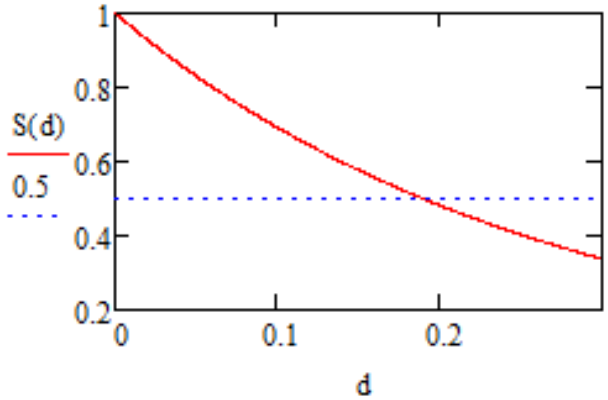
Lunghezza cristallo (noibato di litio) in m

$\gamma := \frac{Tin}{2 \cdot \tau} + \frac{Tout}{2 \cdot \tau} + \frac{\Delta}{\tau} \qquad \gamma out := \frac{Tout}{2 \cdot \tau}$

$\eta esc := \frac{\gamma out}{\gamma} = 0.933$

$S(d) := 1 - \eta esc \cdot \frac{4 \cdot d}{(1 + d)^{2}}$

3dB di squeezing in cavità



$d1 := 0.192$

$\chi tilde := 0.192 \cdot \gamma$

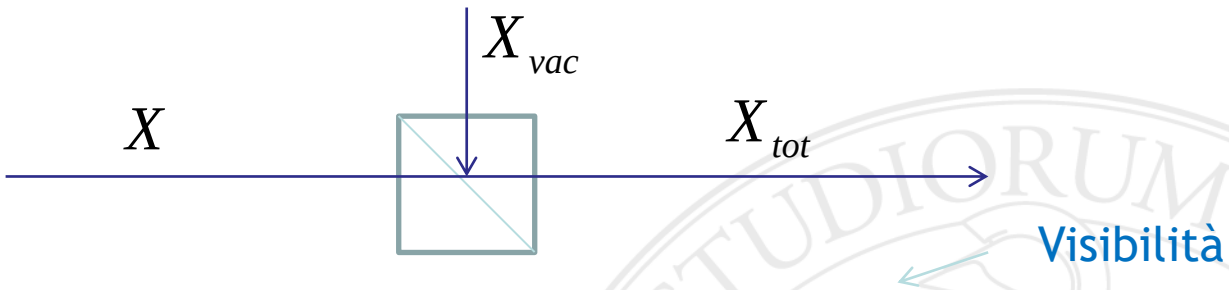
Singolo passaggio

$Ssingolo := e^{-\chi tilde \cdot \frac{L}{c} \cdot n} = 0.998$

$Ssingolo := e^{-\chi tilde \cdot \frac{L}{c} \cdot n \cdot 360} = 0.505$

5) Ricavo le varianze per X1 e X2 aggiungendo le altre efficienze dell'apparato

Devo considerare la QE dei rivelatore e l'efficienza dell'omodina. Quindi il campo è sottoposto ad una perdita e dunque entra del vuoto. Il tutto può essere schematizzato come segue:



$$\eta = \eta_{\text{hom}}\eta_{\text{det}} = V^2\eta_{\text{det}}$$

$$X_{tot} = \sqrt{\eta}X + \sqrt{1-\eta}X_{vac}$$

$$V_{1,2_{tot}}(\omega) = \eta\left(1 \mp \eta_{esc}\frac{4d}{(1\pm d)^2}\right) + (1-\eta) = 1 \mp \eta_{tot}\frac{4d}{(1\pm d)^2}$$

Dove: $\eta_{tot} = \eta_{esc}\eta = \eta_{esc}\eta_{\text{hom}}\eta_{\text{det}}$

Stabilizzazione attiva di una cavità ottica

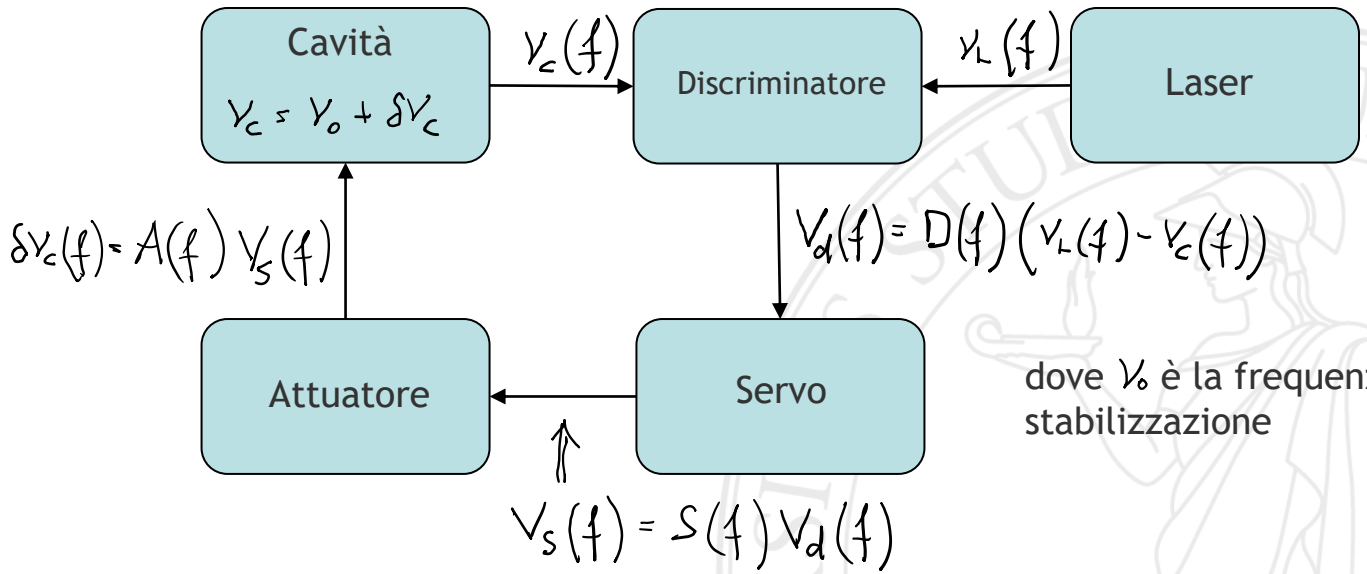
Per mantenere la risonanza tra laser e cavità è necessario controllare la lunghezza della cavità a livello sub-nanometrico. Qundi è necessario un controllo attivo della lunghezza.

Schema del sistema di feedback:

$$\nu_c(t) \longrightarrow \nu_c(f) = \int \nu_c(t)\, e^{i2\pi f t} dt$$

$$\nu_L(t) \longrightarrow \nu_L(f) = \int \nu_L(t)\, e^{i2\pi f t} dt$$

Sono la frequenza ottica della cavità e la frequenza ottica del laser. Nel tempo fluttuano e sono caratterizzate da un spettro di rumore



dove ν_0 è la frequenza della cavità senza stabilizzazione

$$\nu_c = \nu_0 + G(\nu_L - \nu_c) \Rightarrow \boxed{\nu_c = \frac{\nu_0}{1+G} + \frac{G}{1+G}\nu_L}$$

dove $G(f) = A(f)\, S(f)\, D(f)$

se $G \gg 1 \Rightarrow \nu_c = \nu_L$

Quindi questo sistema serve ad accordare la cavità rispetto al laser.

$\Delta\nu = \nu_c - \nu_L$ è la frequenza differenza tra laser e cavità

$$|\Delta\nu(f)|^2 = |\nu_c - \nu_L|^2 = \left| \frac{1}{1+G}\nu_0 + \frac{G}{1+G}\nu_L - \nu_L \right|^2$$

spettro di rumore

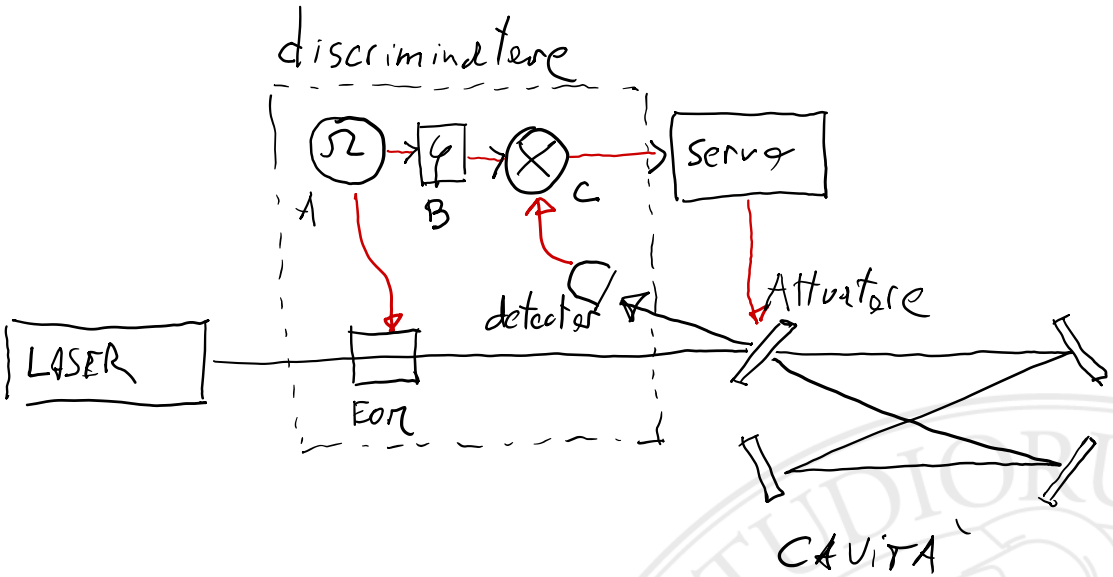
ma ν_0 e ν_L sono segnali scorrelati, quindi:

$$|\Delta\nu(f)|^2 = \left| \frac{1}{1+G}\nu_0 + \frac{1}{1+G}\nu_L \right|^2 = \frac{|\nu_0|^2}{|1+G|^2} + \frac{|\nu_L|^2}{|1+G|^2}$$

$$S_{\Delta\nu} = \frac{S_0 + S_L}{|1+G|^2}$$

dove S è il power spectral density. Quindi il sistema di feedback va a ridurre l'ampiezza di questo spettro di rumore

Schema sperimentale del sistema di feedback:



Discriminatore: è composto da un generatore di frequenza Ω (A), un phase shifter (B), un mixer (C), un rivelatore (fotodiodo) che vede il fascio riflesso della cavità e un modulatore elettro-ottico (EOM)

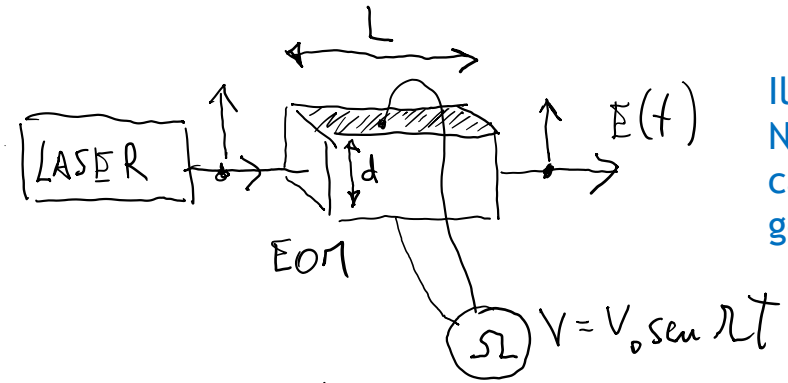
Servo: è un circuito elettrico composto da un integratore e da un proporzionale

Attuatore: è un piezo collegato ad un degli specchi della cavità che serve a cabiare la lunghezza di questa a livello sub-nanometrico

Discriminatore:

Lo scopo del discriminatore è quello di misurare la differenza in frequenza tra laser e cavità.

Il discrimatore è formato da diverse parti che adesso analiziamo in sequenza iniziando dal modulatore elettro-ottico (EOM):

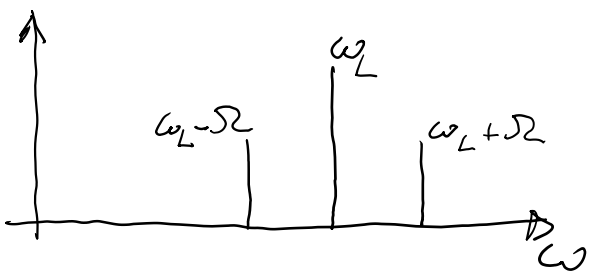


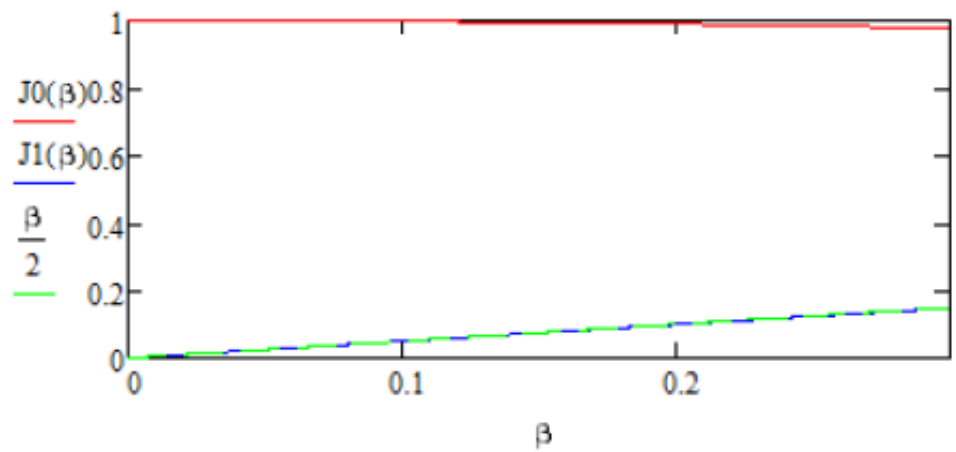
Il fascio laser passa attraverso un cristallo di Niobato di Litio. Al cristallo viene appricato un campo elettrico oscillante per mezzo di un generatore ed elettrodi depositati sul cristallo.

funzioni di Bessel

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega_L t + i\beta \operatorname{sen} \Omega t} \approx E_0 \left(J_0(\beta) + 2i J_1(\beta) \operatorname{sen} \Omega t \right) e^{-i\omega_L t} \approx$$

$$\approx E_0 \left(1 + i\beta \operatorname{sen} \Omega t\right) e^{-i\omega_L t} = E_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} e^{+i\Omega t} - \frac{\beta}{2} e^{-i\Omega t}\right) e^{-i\omega_L t}$$





adesso dobbiamo trovare β scrivendo come l'indice di rifrazione del cristallo dipende dal campo elettrico applicato:

$$e^{ikz} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}n\cdot L} \quad \text{dove} \quad n = n_e + \frac{1}{2}n_e^2 r_{33}\frac{V}{d}$$

campo elettrico

elemento del tensore BO

eliminando la fase costate ottengo:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{33} \frac{V_0}{d} L =$$

$$= 0.015 \cdot V_0$$

$LiNbO_3$

$r_{33} = 30 \cdot 10^{-12}\ m/V$

$n_e = 2.156$

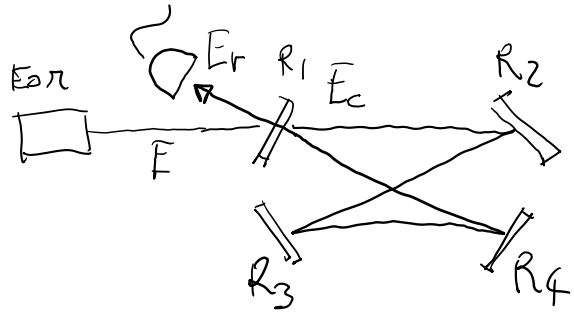
$L = 45\,mm$

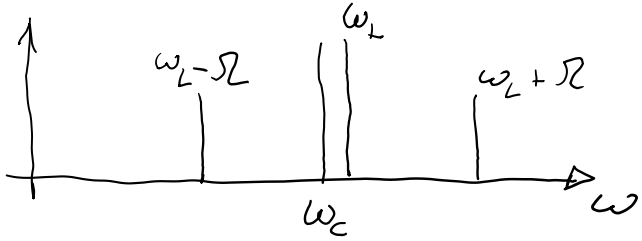
$d = 2.65\,mm$

$\lambda = 1064\,nm$

quindi il campo elettrico uscente dal cristallo è caratterizzato da due sidebands shiftate in frequenza di Ω rispetto alla portante con ampiezza β/2

la cavità riflette in modo diverso le tre componenti:





$\omega_L - \omega_c = \omega \qquad \omega = 2\pi\nu$

dove w è lo shift in frequenza tra laser e cavità

$$E(t) = E_0\left(1 + \frac{\beta}{2} e^{+i\Omega t} - \frac{\beta}{2} e^{-i\Omega t}\right) e^{-i\omega_L t}$$

$$\Rightarrow E_r(t) = E_0\left(r(\omega) + \frac{\beta}{2} r(\omega-\Omega) e^{+i\Omega t} - \frac{\beta}{2} r(\omega+\Omega) e^{-i\Omega t}\right) e^{-i\omega_L t}$$

dove r è la riflettività della cavità

Il rivelatore vede la potenza, ovvero:

sperimentalmente è possibile usando un mixer

$$P = |E_r|^2 =$$

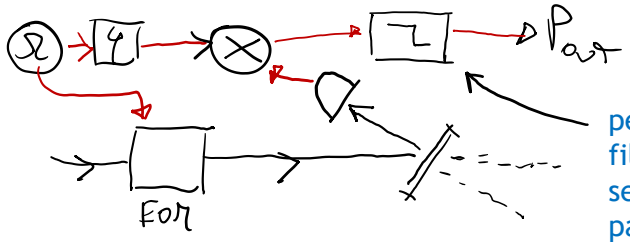
prendo solo i termini oscillanti alla frequenza Ω

$$= \frac{\beta}{2} |E_0|^2 \left[A(\omega,\Omega) e^{-i\Omega t} + A^*(\omega,\Omega) e^{+i\Omega t}\right] =$$

$$= \beta |E_0|^2 \left[\mathrm{Re}\, A(\omega,\Omega) \cos\Omega t + \mathrm{Im}\, A(\omega,\Omega) \operatorname{sen} \Omega t\right]$$

dove la funzione A è: $A(\omega,\Omega) = r(\omega) r^*(\omega-\Omega) - r^*(\omega) r(\omega+\Omega)$

riporto a 0 la frequenza Ω tramite un mixer:



per mezzo di un filtro passa basso seleziono solo la parte a frequenza 0

$$P_{out} = P \cdot m_0 \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) =$$

$$= \beta m_0 |E_0|^2 \left[\operatorname{Re} A \cos \Omega t \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) + \operatorname{Im} A \operatorname{sen} \Omega t \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} m_0 |E_0|^2 \left[\operatorname{Re} A \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{Im} A \cos \varphi \right] = \frac{\beta}{2} m_0 |E_0|^2 \operatorname{Im} A \qquad \varphi = 0$$

nel caso utile con Ω più grande della larghezza di riga della cavità la parte reale di A va a zero e rimane solo la parte immaginaria che viene selezionata ponendo sperimentalmente $\varphi = 0$

Conviene sostituire al modulo quadro del campo l'uscita in Volt del rivelatore, ad esempio se il rivelatore è un fotodiodo collegato ad una resistenza R abbiamo:

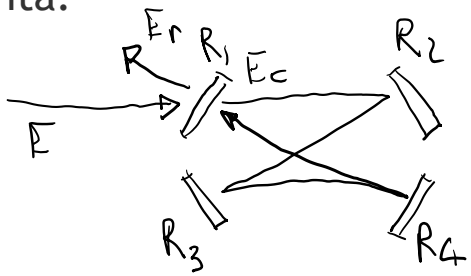
$$V_d = \frac{\beta}{2} m_0 \eta P_L \operatorname{Im} A$$

dove P_L è la potenza del laser in W e

$\eta = \rho R$ ← resistenza

↖ responsività

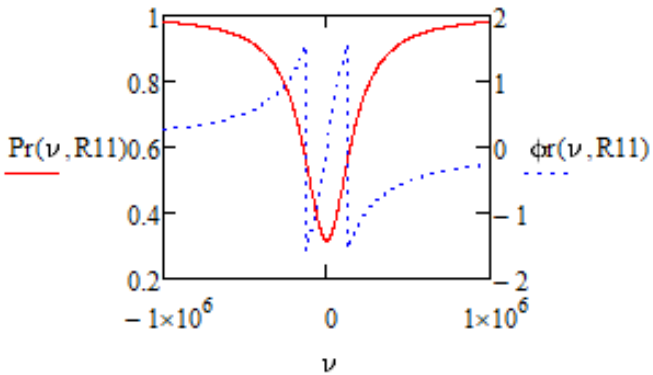
per capire la fisica del risultato conviene riscrivere esplicitamente la riflettività r della cavità:



$$E_c(\nu) = \frac{\sqrt{1-R_1}}{1-\sqrt{R}\,e^{i\phi}}\,E \qquad \phi = 2\pi\frac{\nu}{FSR} = \frac{\omega}{FSR}$$

$$E_r(\nu) = -\sqrt{R_1}\,E + \sqrt{1-R_1}\sqrt{R_2R_3R_4}\,E_c\,e^{i\phi} = \frac{-R_1+\sqrt{R}\,e^{i\phi}}{\sqrt{R_1}\left(1-\sqrt{R}\,e^{i\phi}\right)}$$

dove $R = \prod_i R_i$



se le sidebands sono molto fuori rispetto alla larghezza di riga la fase, per queste la fase è nulla e la riflettività è 1, quindi:

$$A(\omega,\Omega) = r(\omega)\,r^*(\omega-\Omega) - r^*(\omega)\,r(\omega+\Omega) \approx$$

$$\approx r(\omega) - r^*(\omega) = |r(\omega)|\,2i\,\mathrm{sen}\,\phi_r(\omega) \approx |r(0)|\,2i\,\phi_r(\omega)$$

dove $r(\omega) \overset{df}{=} |r(\omega)|\,e^{i\phi_r(\omega)}$

quindi rimane solo la parte immaginaria ed è una funzione dispari, ovvero,un buon segnale di errore

$$r(0) = \frac{-R_1 + \sqrt{R}}{\sqrt{R_1}\left(1-\sqrt{R}\right)} \quad ; \quad \phi_r(\nu) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} r}{\operatorname{Re} r} \approx \frac{\sqrt{R}\left(1-R_1\right)}{\left(-R_1+\sqrt{R}\right)\left(1-\sqrt{R}\right)}\, 2\pi \frac{\nu}{FSR}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_d = D\, Y = D\cdot\left(V_L - V_C\right)}$$

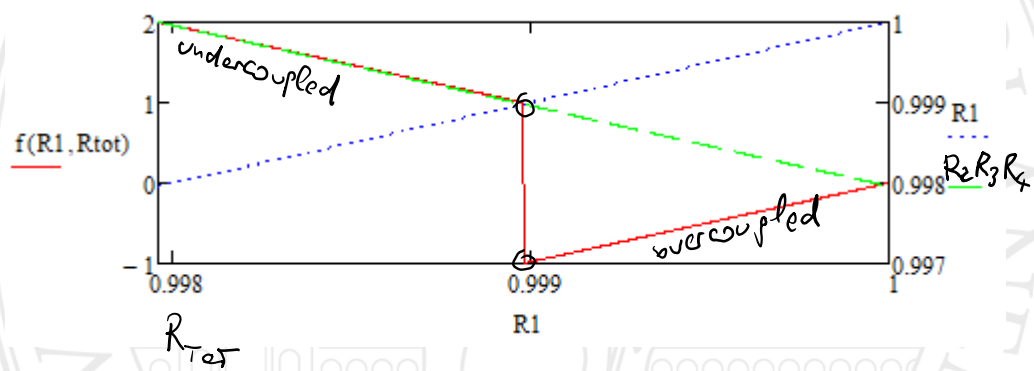
$$D = 2\beta m_0 \eta P_L \left[\operatorname{sgn}\left(-R_1+\sqrt{R}\right)\frac{\sqrt{R}\left(1-R_1\right)}{\sqrt{R_1}\left(1-\sqrt{R}\right)}\right]\frac{1}{\Delta\nu}$$

$$= 2\beta m_0 \eta P_L\, f(R_1, R)\,\frac{1}{\Delta\nu}$$

$$\begin{cases} F = \dfrac{\pi}{1-\sqrt{R}} \\ \Delta\nu = \dfrac{FSR}{F} \end{cases}$$

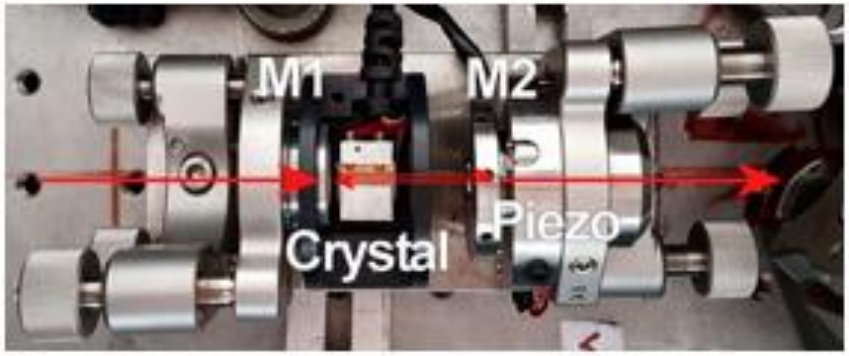
$$f(R_1, R) = \operatorname{sgn}\left(-R_1+\sqrt{R}\right)\frac{\sqrt{R}\left(1-R_1\right)}{\sqrt{R_1}\left(1-\sqrt{R}\right)}$$

$F = 3000 \qquad R_{tot} = 0.99796$

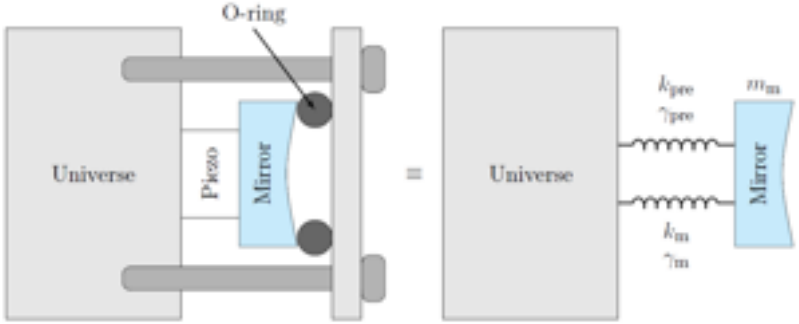


Attuatore

la lungezza della cavità viene controllata per mezzo di un piezo collegato ad uno degli specchi



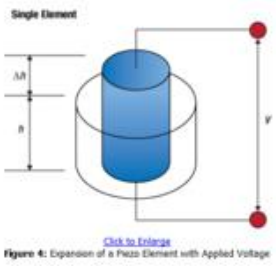
Il piezo collegato allo specchio è l'equivalente di un oscillatore armonico smorzato



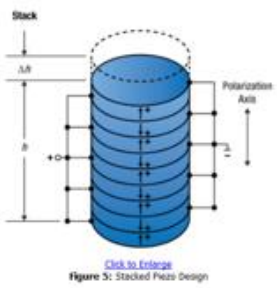
Il piezo è collegato ad un generatore di tensione a basso rumore. Tipicamente per allungate il piezo di 1nm servono 10mV.

Il piezo è realizzato con una ceramica ferroelettrica

Single element

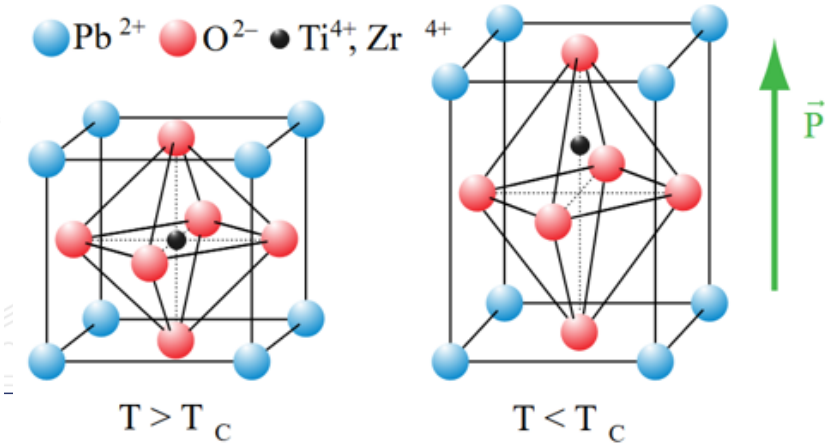


Stack



$\sim 1\mu m / 10V$

Ferroelectric material: non-centrosymmetric



Qndi la risposta in frequenza dell'attuatore è quella di un oscillatore armonico. Aggiungendo un preload si forma un parallelo tra due oscillatori. In questo modo si aumenta sia la costante elastica sia lo smorzamento. Vediamo perchè questo è importante:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{F}{m}$$ forzante

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 + \Omega^2 + i\gamma\omega\right)\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{m}$$

$$\tilde{x} = \tilde{G}\,\tilde{F}$$

$$\tilde{G} = \frac{1/m}{(\Omega^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

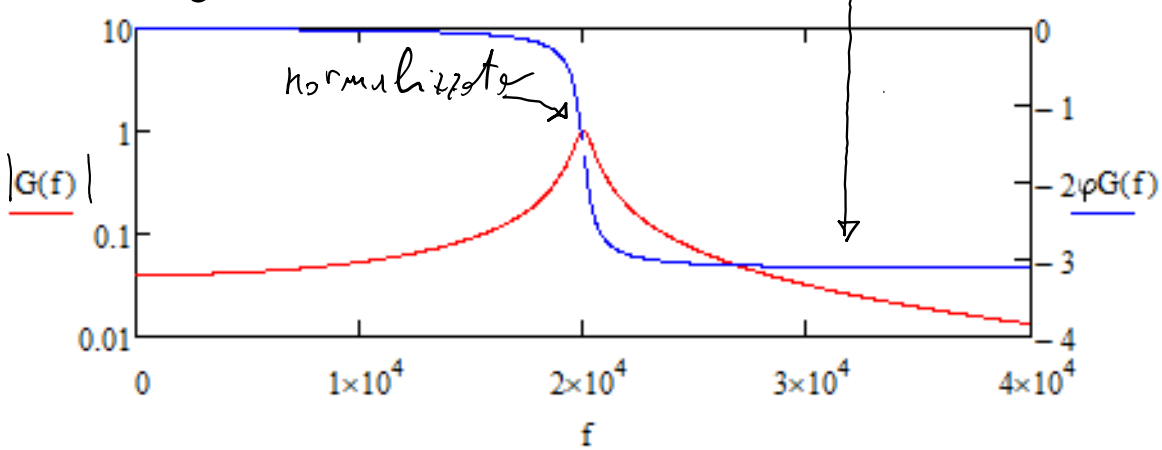
$$|\tilde{G}| = \frac{1/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

$$\varphi_G = \operatorname{arctg} \frac{-\gamma\omega}{\Omega^2 - \omega^2}$$

$\Omega = 2\pi \cdot 20000$ rad/s

$\gamma = 5000\ s^{-1}$

filtro del secondo ordine



sotto la risonanza la fase è 0 e l'ampiezza è circa costante. Qundi il segnale applicato al piezo si trasmette in modo fedele allo specchio. Sopra la risonanza l'ampiezza diminuisce e la fase si inverte.

In generale un filtro del secondo ordine (o più alto) inserito in un feedback è pericoloso perchè tende ad innescare delle oscillazioni. Ciò è dovuto al fatto che la funzione G del feedbak può diventare -1 (ampiezza 1 e fase ruotata di π)

$$A(f) = \frac{A_0}{\Omega^2 - (2\pi)^2 f^2 - i 2\pi \gamma f} \Longrightarrow G(f) = A(f) S(f) D(f)$$

vedi pg. 3

$$S_{\Delta V} = \frac{S_0 + S_L}{|1+G|^2}$$

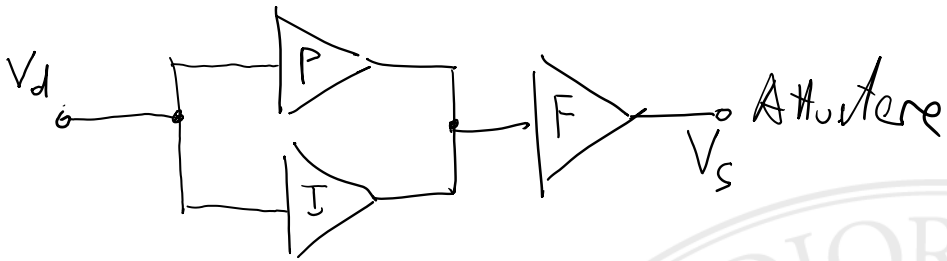
vedi pg. 4

la frequenza f contenuta nel rumore del laser o della cavità per cui la G diventa -1 sarà amplificata e il feedback innescherà un'oscillazione a quella frequenza

Quindi sarà necessario aggiungere nel Servo degli opportuni filtri che evitano le risonanze del feedback

Servo

Il servo collega il discriminatore (che genera il segnale di errore) all'attuatore piezo. Di base è un cricuito elettrico che contiene un interatore, un proporzionale e un filtro per evitare le risonanze.

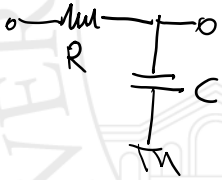


Mentre il ruolo del proporzionale è sempice (far aumentare G compatibilmente con le risonanze) il ruolo dell'integratore è meno intuitivo ma fondamentale. L'integratore ha memoria di quanto accaduto in passato e quindi continua ad applicare un segnale (ad esempio dovuto alla dilatazione termica della cavità) anche se il segnale di errore è nullo.

La risposta spettrale è:

$$S(f) = \left(P_0 + \frac{I_0}{i2\pi f}\right) F(f)$$

potrebbe essere un filtro del primo ordine formato da una resistenza e da un condensatore

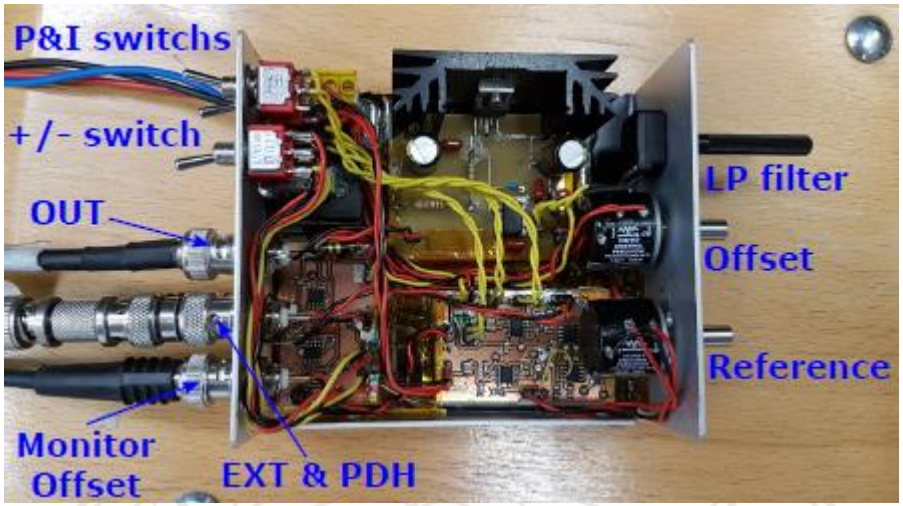


$$F(f) = \frac{1}{1 + i2\pi f \tau}$$

$$\tau = RC$$

Alcune note sul servo:

- L'integratore e l'attuatore insieme forniscono una rotazione massima della fase di $3/2 \cdot \pi$, quindi aumentando il guadagno dell'integratore (I_0) è molto probabile innescare delle oscillazioni nel feedback
- Per evitare queste oscillazioni è necessario aumentare il tempo τ del filtro al primo ordine del servo in modo da tagliare via la risonanza dell'attuatore (questo va a ridurre la banda del feedback)
- Tipicamente la banda va ulteriormente ridotta quando si aumenta il guadagno del proporzionale (P_0)



Modifica PDH nel caso di cavità con cristallo non lineare

$$E_c(t+\tau) = \sqrt{1-R_1}E_{in} + \sqrt{R}e^{i\phi}E_c(t),$$

Senza cristallo

$$\frac{dE_c}{dt}\tau = \sqrt{1-R_1}E_{in} + (\sqrt{R}e^{i\phi} - 1)E_c + i\gamma E_c^*.$$

Approx 1° ordine e aggiunta cristallo

$$(1-\sqrt{R}e^{i\phi})E_c - i\gamma E_c^* = \sqrt{1-R_1}E_{in}.$$

Equilibrio

$$E_c = \sqrt{1-R_1}\frac{1-\sqrt{R}e^{-i\phi} + i|\gamma|e^{i\phi_p}}{1+R-2\sqrt{R}\cos\phi - |\gamma|^2},$$

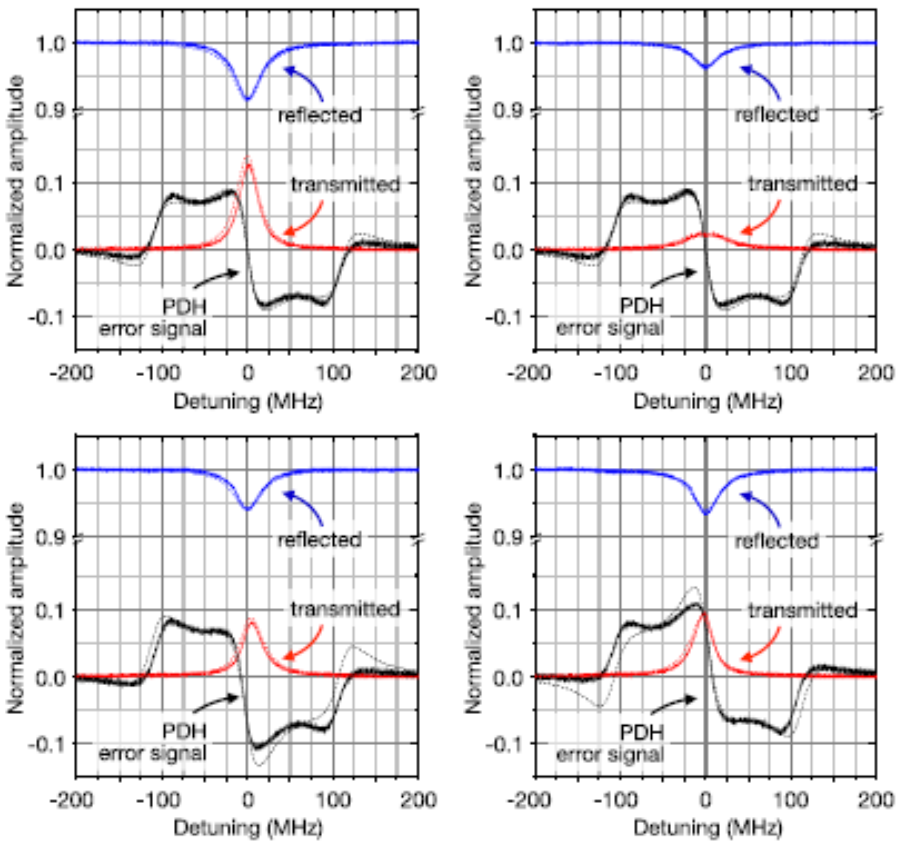
where $\gamma = |\gamma|e^{i\phi_p}$, ϕ_p being the pump phase relative to the seed phase.

Now, we turn our attention to the reflected beam E_R (see Fig. 1), since it will be used to obtain two different error signals for the stabilization of the OPO frequency and the stabilization of the seed-pump relative phase. The reflected beam E_R is the sum of the field directly reflected from the input coupler, with an additive π phase, and the transmitted one through M_1, thus it can be written as (we still set $E_{in} = 1$):

$$E_R = -\sqrt{R_1} + \frac{\sqrt{1-R_1}}{\sqrt{R_1}}(\sqrt{R}e^{i\phi}E_c + i|\gamma|e^{i\phi_p}E_c^*).$$

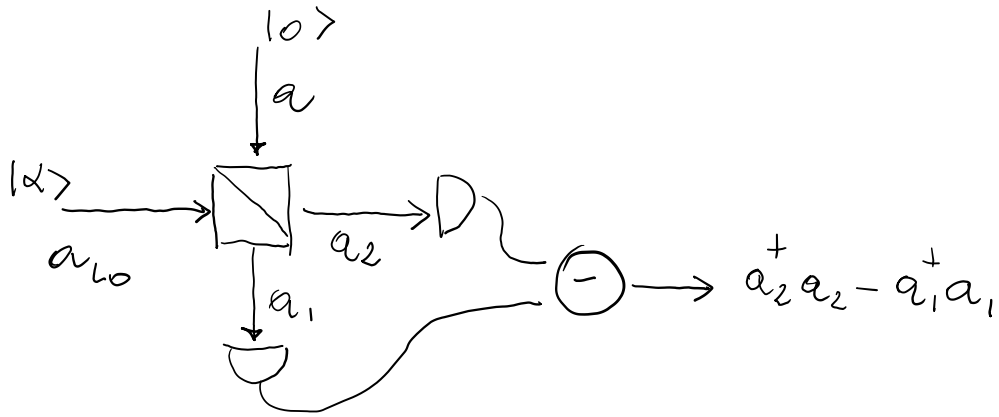
Amplificazione

Deamplificazione



PHYSICAL REVIEW A **104**, 053706 (2021)

Interpretazione della rivelazione omodina



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_{LO} \end{pmatrix}$$

$$a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1 = i a a_{LO}^+ - i a^+ a_{LO}$$

1) a_{LO} classico (risp. di Heisenberg)

$a_{LO} = |\alpha| e^{-i\omega_0 t + i\phi}$ $\Rightarrow$ $i a a_{LO}^+ - i a^+ a_{LO} = |\alpha| \left(a e^{-i\theta} + a^+ e^{+i\theta} \right) =$

$= |\alpha| X(\theta)$ dove la parte $a(t) = a e^{-i\omega_0 t}$; $\theta = \phi - \frac{\pi}{2}$

$\langle 0 | \Delta X^2 | 0 \rangle = 1$ vedo il rumore di vuoto di $|0\rangle$

modello semiclassico

2) a_{LO} quantistico [rapp. di Heisenberg]

$$\hat{y} = i a a_{LO}^{+} - i a^{+} a_{LO} \qquad \langle 0|\langle\alpha|\hat{y}|\alpha\rangle|0\rangle = 0$$

$$\Delta y^2 = \langle 0|\langle\alpha|\hat{y}^2|\alpha\rangle|0\rangle =$$

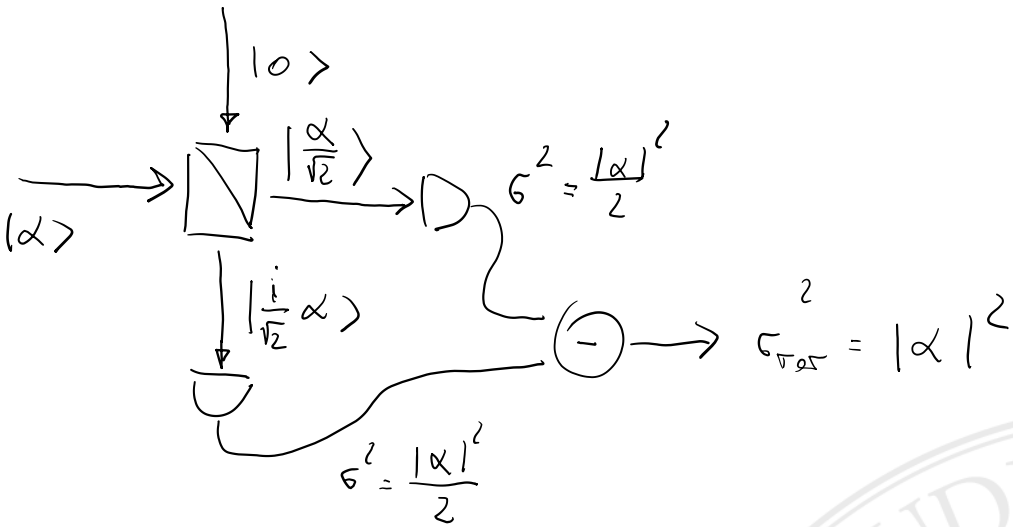
$$= \langle 0|\langle\alpha|(1+a^{+}a)a_{LO}^{+}a_{LO}|\alpha\rangle|0\rangle + \langle 0|\langle\alpha|a^{+}a(1+a_{LO}^{+}a_{LO})|\alpha\rangle|0\rangle$$

$$\Downarrow \qquad\qquad = 0$$

a) $|\alpha|^2 \langle 0|1+a^{+}a|0\rangle = |\alpha|^2$ vedo il vuoto

b) $\langle\alpha|a_{LO}^{+}a_{LO}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ vedo il numero del LO

3) α_{LO} quantistico [Exp. di Schrodinger]



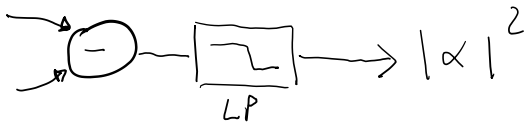
Vedo il rumore poissoniano di $|\alpha\rangle$

---

per la dimostrazione:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$



Quanto è il rumore in V ?

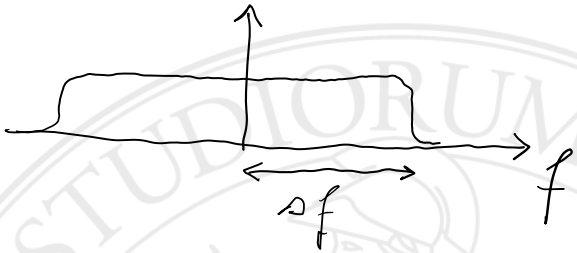
$$I = q\frac{n_e}{\Delta t} \Rightarrow \sigma_I^2 = \frac{q^2}{\Delta t^2}\sigma_e^2 = \frac{q^2}{\Delta t^2} n_e = \frac{q^2}{\Delta t^2}\frac{I\cdot\Delta t}{q} = qI\frac{1}{\Delta t}$$

$\Uparrow$ P.B.

NOTA:

$$\sigma_I^2 = qI\frac{1}{\Delta t} = 2qI\Delta f$$

$\Uparrow$



$$PSD = 2qI \left[\frac{A^2}{Hz}\right]$$

$\uparrow$

Power Spectral Density

Contribuiscono sia frequenze maggiori (positive) che minori (negative) rispetto alla portante. Se voglio integrare solo sulle frequenze positive devo mettere un 2

Considero una potenza di 10mW, una resposività di 1A/W e una banda di 100kHz:

$$I = \mathbb{R}\, P = 1 \cdot 10^{-2}\ A \Rightarrow PSD = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}$$

quindi $\sigma_I^2 = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{5} \Rightarrow \sigma_I = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ A$

Se osservo ai capi di una resistenza da 10k ottengo:

$$\sigma_V = 1{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{4} = 180\ \mu V$$

segnale che deve essere amplificato prima di andare all'oscilloscopio

Questo segnale deve essere confrontato con il rumore termico della resistenza:

$$PSD_{th} = \frac{4KT}{R}\left[A^2/Hz\right] \Rightarrow \sigma_{I_{th}}^2 = \frac{4KT}{R}\Delta f \Rightarrow \sigma_{V_{th}}^2 = R^2 \frac{4KT}{R}\Delta f$$

$$\sigma_{V_{tot}}^2 = 4KTR\,\Delta f + 2qIR^2\,\Delta f$$

Stati entangled generati via PDC: decoerenza spaziale e temporale

Assuming a balanced pump's state, i.e. $\theta = 45°$, and defining for the sake of simplicity $\xi \equiv (\zeta_p, \zeta, \theta_s, \theta_i)$, the final entangled state of the PDC is

$$|\psi\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi f(\xi) \left[|\xi, H, H\rangle + e^{i\phi(\xi)} |\xi, V, V\rangle \right]$$

where $|\xi, H, H\rangle \equiv |\zeta, \theta_s, H\rangle_s |\zeta_p - \zeta, \theta_i, H\rangle_i$ and $|\xi, V, V\rangle \equiv |\zeta, \theta_s, V\rangle_s |\zeta_p - \zeta, \theta_i, V\rangle_i$. The corresponding density operator is

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_E = |\psi\rangle_{EE} \langle\psi| = \frac{1}{2} \int d\xi d\xi' f(\xi) f^*(\xi') \Big[& |\xi, H, H\rangle \langle\xi', H, H| \\ & + |\xi, H, H\rangle \langle\xi', V, V| e^{-i\phi(\xi')} \\ & + |\xi, V, V\rangle \langle\xi', H, H| e^{i\phi(\xi)} \\ & + |\xi, V, V\rangle \langle\xi', V, V| e^{i(\phi(\xi) - \phi(\xi'))} \Big].\end{aligned}$$

We can focus on the polarization-entangled marginal, coming from the partial trace on the degrees of freedom represented by ξ,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{PE} &= \mathrm{tr}_\xi(\hat{\rho}_E) \\ &= \int d\xi'' \langle\xi''| \hat{\rho} |\xi''\rangle \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & p \\ p^* & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

where $\int d\xi |f(\xi)|^2 = 1$, assuming normalized states, and the matrix is written on the basis $\{|HH\rangle, |VV\rangle\}$, in which $|HH\rangle = (1,0)^T$ and $|VV\rangle = (0,1)^T$. We defined

$$p = \int d\xi |f(\xi)|^2 e^{-i\phi(\xi)}$$

We will show that the main contribution to $\phi(\xi)$ is linear in ξ, i.e. $\phi(\xi) \simeq a\xi$, and then it is an odd function; it follows that,

$$\mathrm{Re}\{p\} = \int d\xi |f(\xi)|^2 \cos(\phi(\xi)) \simeq p$$

$$\mathrm{Im}\{p\} = \int d\xi |f(\xi)|^2 \sin(\phi(\xi)) \simeq 0$$

since $\mathrm{Im}\{p\}$ is the integral of an odd function over all the possible values of ξ. Therefore

$$\hat{\rho}_{PE} \simeq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix} = p \cdot \hat{\rho}_{ent} + (1-p)\hat{\rho}_{mix}$$

where

$$\hat{\rho}_{ent} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_{mix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

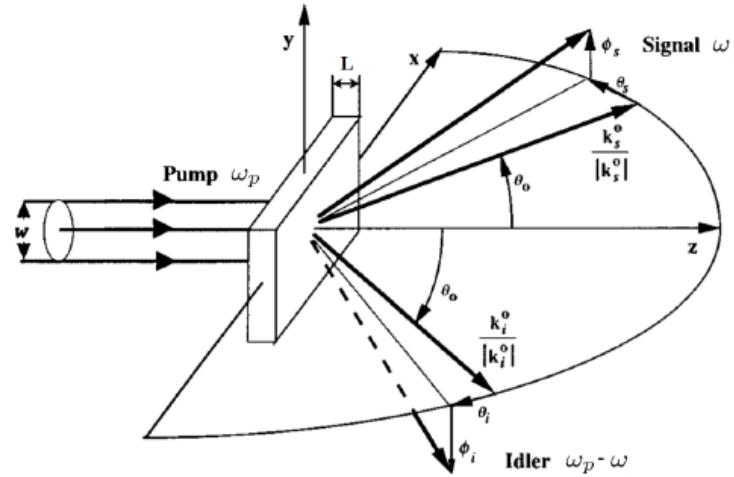
we can define the visibility function

$$V = \frac{\mathrm{Max} - \mathrm{Min}}{\mathrm{Max} + \mathrm{Min}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{p\} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{p\}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{p\} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{p\}} = \mathrm{Re}\{p\} \simeq p$$

whose value can be found experimentally putting two polarizers before the detectors on signal and idler, and observing the coincidence counting: when the polarizers are both at 45°, we observe a maximum in the number of coincidence, i.e. we measure $\mathrm{Max}_{P_{|45°,\alpha\rangle}}$; when the polarizers are at 45° and 135°, we observe a minimum in the number of coincidence, i.e. we measure $\mathrm{Min}_{P_{|45°,\alpha\rangle}}$.

Quindi dobbiamo trovare le funzioni f e ϕ

$$f(\zeta_p, \zeta, \theta_s, \theta_i, \phi_s, \phi_i) \simeq A_p(\omega_p^0 + \zeta_p)\tilde{A}(\Delta k_\perp)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta k_\parallel}{2}L\right)$$



$$\begin{cases} \Delta k_\parallel \simeq k_p - k_s \cos\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_s}{n_o(\omega_s)}\right) - k_i \cos\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_i}{n_o(\omega_i)}\right) \\ \Delta k_x \simeq k_s \sin\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_s}{n_o(\omega_s)}\right) - k_i \sin\left(\dfrac{\theta_0 + \theta_i}{n_o(\omega_i)}\right) \\ \Delta k_y \simeq k_s \sin\left(\dfrac{\phi_s}{n_o(\omega_s)}\right) - k_i \sin\left(\dfrac{\phi_i}{n_o(\omega_i)}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_p \equiv k_p\left(\omega_p^0 + \zeta_p\right) \simeq k_p^0 + \dfrac{1}{v_{g,p}}\zeta_p + \boxed{\dfrac{1}{2}D_p\zeta_p^2} \\ k_s \equiv k_s\left(\dfrac{\omega_p^0}{2} + \zeta_s\right) \simeq k^0 + \dfrac{1}{v_g}\zeta_s + \boxed{\dfrac{1}{2}D\zeta_s^2} \\ k_i \equiv k_i\left(\dfrac{\omega_p^0}{2} + \zeta_i\right) \simeq k^0 + \dfrac{1}{v_g}\zeta_i + \boxed{\dfrac{1}{2}D\zeta_i^2} \end{cases}$$

Effetto trascurabile

$$\frac{1}{v_{g,p}} = \left.\frac{\partial k_p}{\partial \omega}\right|_{\omega_p^0}$$

$$\frac{1}{v_g} = \left.\frac{\partial k_s}{\partial \omega_s}\right|_{\frac{\omega_p^0}{2}} = \left.\frac{\partial k_i}{\partial \omega_i}\right|_{\frac{\omega_p^0}{2}}$$

$$D_p = \left.\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0}$$

$$D = \left.\frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_s^2}\right|_{\frac{\omega_p^0}{2}} = \left.\frac{\partial^2 k_i}{\partial \omega_i^2}\right|_{\frac{\omega_p^0}{2}}.$$

knowing that $k^0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o$, the first order of $\Delta k_{\parallel}$ is

$$\Delta k_{\parallel}^{(1)} = \left[\frac{1}{v_{g,p}} - \frac{1}{v_g}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{2n_o^2}\right)\right]\zeta_p + \frac{2\pi\theta_0}{\lambda_0 n_o}(\theta_s + \theta_i)$$

$$\Delta k_x^{(1)} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\theta_s - \theta_i) + \frac{\theta_0}{v_g n_o}(2\zeta - \zeta_p)$$

$$\Delta k_y \simeq \frac{2\pi}{\lambda_0}(\phi_s - \phi_i)$$

$$\Longrightarrow \quad A(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \Longrightarrow \tilde{A}(\Delta k_\perp) = e^{-\frac{w^2(\Delta k_x^2 + \Delta k_y^2)}{4}} = e^{-\frac{\pi^2 w^2(\theta_-^2 + \phi_-^2)}{\lambda_0^2}}$$

Walk-off:

$$A(x,y) = A_x(x)A_y(y)$$

$$A_x(x - \delta(z)) = A_x(x - \sin(\rho)z) \simeq \boxed{A_x(x - \rho z)}$$

Angolo di walk-off (sto considerando il cristallo dove il walk-off è lungo x)

Per scrivere l'Hamiltoniana integro sul volume quindi su x,y e z

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx A_x(x - \delta(z)) e^{i\Delta k_x x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx A_x(x) e^{i\Delta k_x (x + \delta(z))} \propto \tilde{A}_x(\Delta k_x) e^{i\Delta k_x \delta(z)}$$

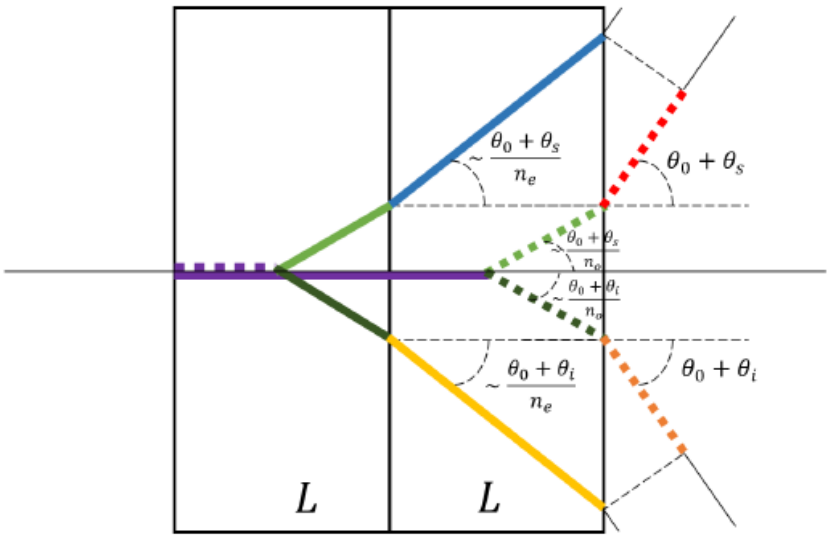
$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\, e^{i\Delta k_\parallel z} \tilde{A}_x(\Delta k_x) e^{i\Delta k_x \rho z} = \mathrm{sinc}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\Delta k_\parallel L + \tfrac{1}{2}\Delta k_x \rho L}_{\text{effetto trascurabile}}\Big) e^{i\frac{1}{2}\Delta k_\parallel L} \tilde{A}_x(\Delta k_x) e^{i\frac{1}{2}\Delta k_x \rho L}$$

$$|\psi\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi f(\xi) \left[e^{i\Delta k_y \delta_y} |\xi, H, H\rangle + e^{i\Delta k_x \delta_x} e^{i\phi'(\xi)} |\xi, V, V\rangle \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi f(\xi) \left[|\xi, H, H\rangle + e^{i(\Delta k_x \delta_x - \Delta k_y \delta_y + \phi'(\xi))} |\xi, V, V\rangle \right]$$

dove $\delta_{x,y} = \frac{1}{2} \rho L$

Rimane da trovare ϕ

$$|\psi\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi f(\xi) \left[e^{i(\phi_{sh}+\phi_{ih}+\phi_{pv})} |\xi, H, H\rangle + e^{i(\phi_{sv}+\phi_{iv}+\phi_{ph})} e^{i\phi''(\xi)} |\xi, V, V\rangle \right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\xi f(\xi) \left[|\xi, H, H\rangle + e^{i(\phi_{sv}+\phi_{iv}+\phi_{ph}-\phi_{sh}-\phi_{ih}-\phi_{pv}+\phi''(\xi))} |\xi, V, V\rangle \right]$$



Generating crystals of length L. Solid lines with different colours highlight different contributions to the optical path of the light's vertically polarized component: ϕ_{pv} in violet, ϕ_{sv} in blue and ϕ_{iv} in yellow. Dashed lines with different colours refer to the horizontally polarized component: ϕ_{ph} in violet, ϕ_{sh} in red and ϕ_{ih} in orange. The vertically and horizontally polarized paths in light green are equal, and so those in dark green, then they don't contribute to the dephasing.

pump

$$\phi_{ph} = k_p^e \frac{L}{2}$$

$$\phi_{pv} = k_p^o L + k_p^e \frac{L}{2}$$

$$\phi_p = \phi_{ph} - \phi_{pv} = -k_p^o L \simeq -\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o L - \frac{L}{v_{g,p}^o} \zeta_p$$

where $k_p^o \equiv k_p^o \left(\omega_p^0 + \zeta_p\right)$.

$$\phi_{sv} \simeq k_s^e \frac{L}{\cos\left(\frac{\theta_0+\theta_s}{n_e}\right)} \simeq \frac{\pi}{\lambda_0} n_e L \left(1+\frac{1}{2}\frac{\theta_0^2}{n_e^2}\right) + \left[\frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{\theta_0}{n_e}\theta_s + \frac{L}{v_g^e}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\theta_0^2}{n_e^2}\right)\zeta\right]$$

$$\phi_{iv} \simeq k_i^e \frac{L}{\cos\left(\frac{\theta_0+\theta_i}{n_e}\right)} \simeq \frac{\pi}{\lambda_0} n_e L \left(1+\frac{1}{2}\frac{\theta_0^2}{n_e^2}\right) + \left[\frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{\theta_0}{n_e}\theta_i + \frac{L}{v_g^e}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\theta_0^2}{n_e^2}\right)(\zeta_p - \zeta)\right]$$

$$\phi_{sh} \simeq k_s L \tan\left(\frac{\theta_0+\theta_s}{n_e}\right)\sin(\theta_0+\theta_s) \simeq \frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{\theta_0^2}{n_e} + \left[\frac{1}{c} L \frac{\theta_0^2}{n_e}\zeta + \frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{2\theta_0}{n_e}\theta_s\right]$$

$$\phi_{ih} \simeq k_i L \tan\left(\frac{\theta_0+\theta_i}{n_e}\right)\sin(\theta_0+\theta_i) \simeq \frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{\theta_0^2}{n_e} + \left[\frac{1}{c} L \frac{\theta_0^2}{n_e}(\zeta_p - \zeta) + \frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{2\theta_0}{n_e}\theta_i\right]$$

the overall dephasing is

$$\boxed{\phi_{sv} + \phi_{iv} + \phi_p - \phi_{sh} - \phi_{ih} = \alpha + \beta_1(\underline{\theta_s + \theta_i}) + \beta_2 \underline{\zeta_p} \quad \text{+ walk-off}}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} L \left(n_e - n_o - \frac{\theta_0^2}{2n_e}\right)$$

Fase costante: per compensarla si può aggiungere una fase sulla pompa e sulla PDC (lamina o SLM)

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{\theta_0}{n_e} - \frac{\pi}{\lambda_0} L \frac{2\theta_0}{n_e} = -\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{L\theta_0}{n_e}$$

Decoerenza angolare: per compensarla va aggiunta una fase lineare negli angoli (SLM)

$$\beta_2 = \frac{L}{v_g^e}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\theta_0^2}{n_e^2}\right) - \frac{L}{v_{g,p}^o} - \frac{L\theta_0^2}{cn_e}$$

Decoerenza temporale: per compensarla si usano cristalli birifrangenti sulla pompa

Walk off

Decoerenza per walk-off: si aggiungono cristalli birifrangenti sulla pompa per compensare il walk-off oppure si introduce una fase lineare negli angoli (SLM)

Ad esempio il contributo a p relativo allo spettro della pompa (decoerenza temporale) è:

$$p_p = \int d\xi_p \, |A_p(\xi_p)|^2 \, e^{i\beta_2 \xi_p} = \tilde{F}(\text{power spectrum})$$

$$\tau$$

Compensazione della decoerenza angolare:

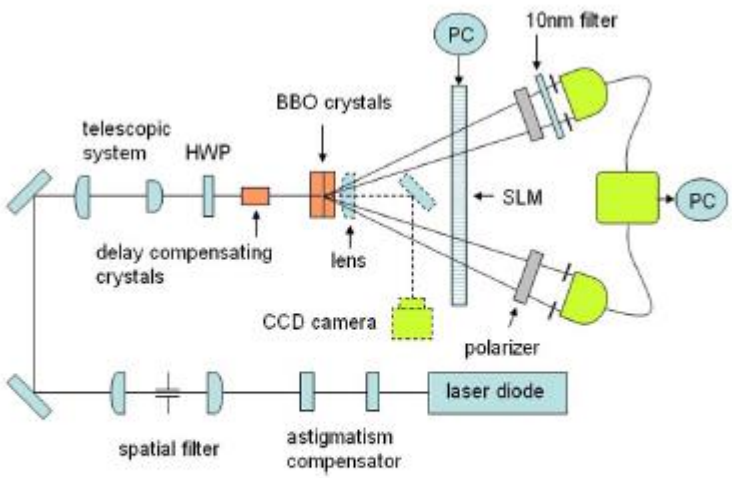


Fig. 1. (Color online) Schematic diagram of the experimental setup. The dashed part is used to measure the Fourier transform of the pump beam, and it is not present during measurements on the PDC output.

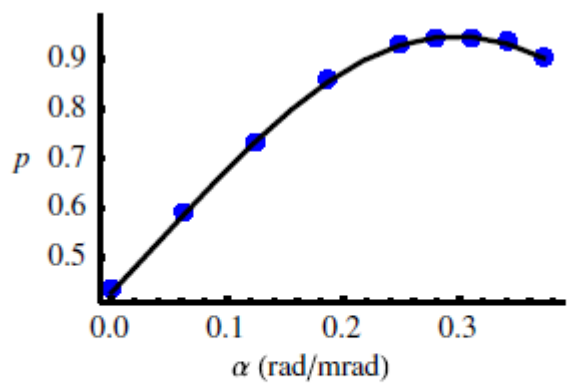


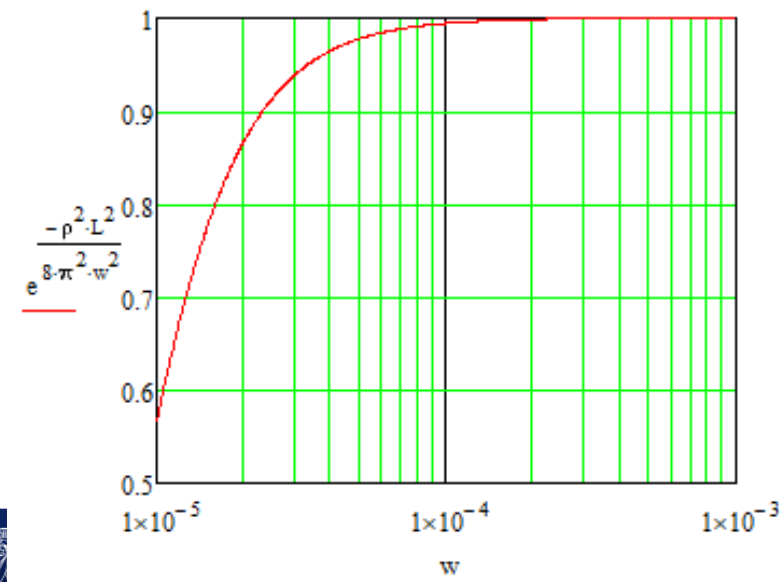
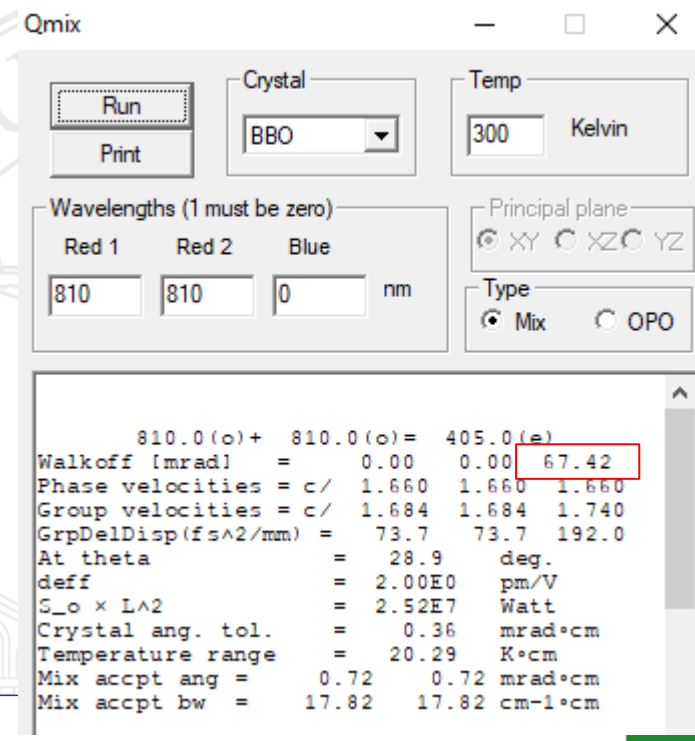
Fig. 2. (Color online) Purity (visibility) as a function of α for a beam with spot of 220 μm. The phase function imposed by the SLM is given by $\Phi_a = -\phi_0 - \alpha\theta_+$. Error bars on the experimental values are within the points. The solid black line is the theoretical prediction.

Decoerenza per walk-off

$$P_{w0} = \int d\phi_- \left|\tilde{A}_y(\Delta k_y)\right|^2 e^{i\frac{1}{2}\Delta k_y \rho L} = \int d\phi_- \left|\tilde{A}_y\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\phi_-\right)\right|^2 e^{i\frac{\pi}{\lambda_0}\phi_- \rho L} =$$

$$= \int d\phi_- \, e^{-\frac{\phi_-^2}{\Delta^2}} e^{i\alpha\phi} \quad \text{dove} \quad \Delta^2 = \frac{\lambda_0^2}{2\pi^2 w^2} \; ; \; \alpha = \frac{\pi}{\lambda_0}\rho L$$

$$\propto e^{-\frac{\rho^2 L^2}{8\pi^2 w^2}}$$

$L = 1\,mm$

$\rho = 67.42\,mrad$