



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

Stabilizzazione attiva di una cavità ottica



Simone Cialdi

Outline

- Stabilizzazione attiva di una cavità ottica
 - Schema del feedback
 - Schema del sistema sperimentale
- Analisi dei singoli elementi dello schema
 - Discriminatore
 - Modulatore elettro-ottico
 - Equazione del metodo PDH
 - Attuatore (piezo)
 - Risonanza piezo
 - Servo
 - Integratore, proporzionale e filtro
- Analisi del rumore: PSD (Power Spectral Density)



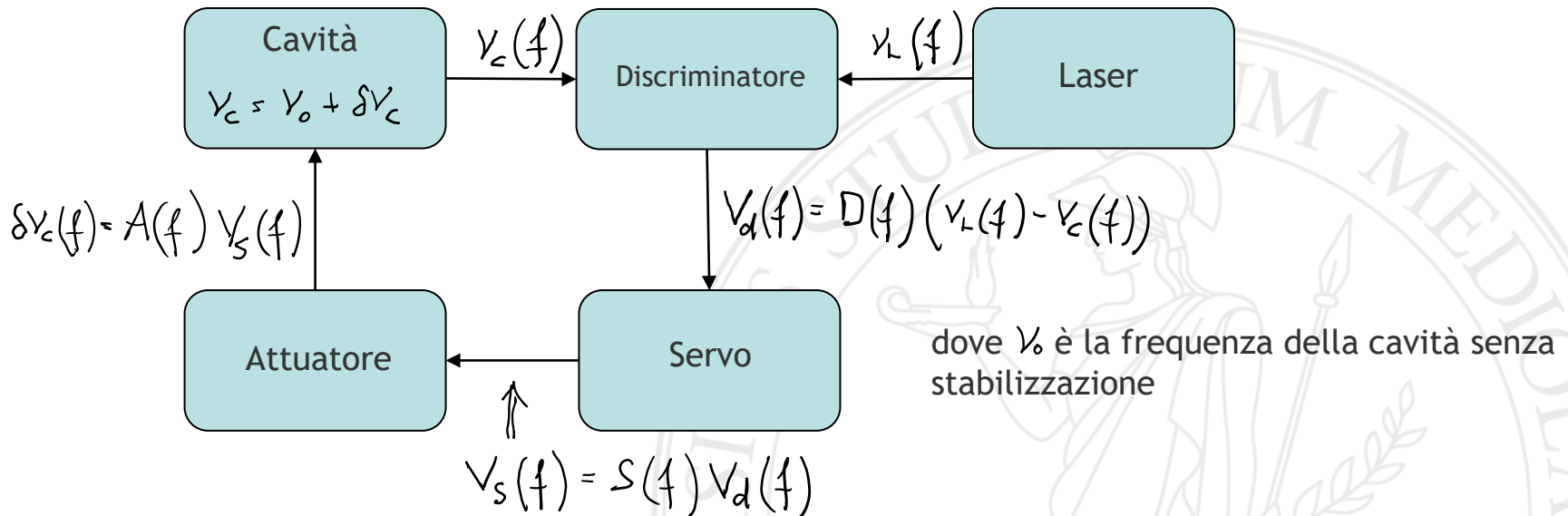
Stabilizzazione attiva di una cavità ottica

Come abbiamo visto nella lezione 8 per mantenere la risonanza tra laser e cavità è necessario controllare la lunghezza della cavità a livello sub-nanometrico. Quindi è necessario un controllo attivo della lunghezza.

Schema del sistema di feedback:

$$\begin{aligned} v_c(t) &\rightarrow v_c(f) = \int v_c(t) e^{i2\pi f t} dt \\ v_L(t) &\rightarrow v_L(f) = \int v_L(t) e^{i2\pi f t} dt \end{aligned}$$

Sono la frequenza ottica della cavità e la frequenza ottica del laser. Nel tempo fluttuano e sono caratterizzate da un spettro di rumore



$$v_c = v_0 + G(v_L - v_c) \Rightarrow v_c = \frac{v_0}{1+G} + \frac{G}{1+G} v_L \quad \text{dove} \quad G(f) = A(f)S(f)D(f)$$

$$\text{se } G \gg 1 \Rightarrow V_c = V_L$$

Quindi questo sistema serve ad accordare la cavità rispetto al laser.

$\Delta V = V_c - V_L$ è la frequenza differenza tra laser e cavità

$$|\Delta V(f)|^2 = |V_c - V_L|^2 = \left| \frac{1}{1+G} V_0 + \frac{G}{1+G} V_L - V_L \right|^2$$

↑
Spettro di rumore

ma V_0 e V_L sono segnali scorrelati, quindi:

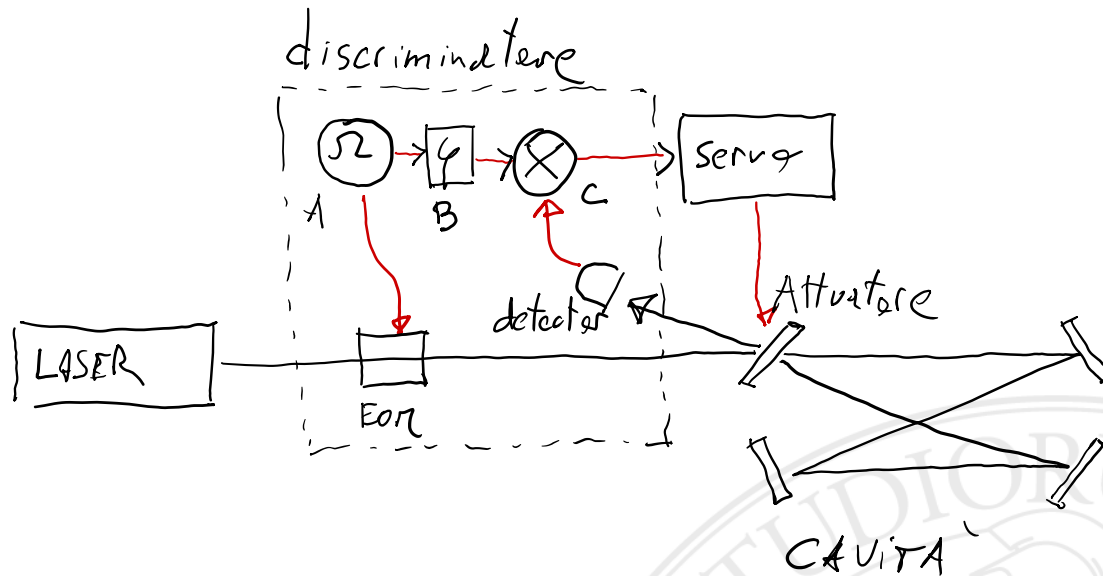
$$|\Delta V(f)|^2 = \left| \frac{1}{1+G} V_0 + \frac{1}{1+G} V_L \right|^2 = \frac{|V_0|^2}{|1+G|^2} + \frac{|V_L|^2}{|1+G|^2}$$

$$S_{\Delta V} = \frac{S_0 + S_L}{|1+G|^2}$$

dove S è il power spectral density. Quindi il sistema di feedback va a ridurre l'ampiezza di questo spettro di rumore



Schema sperimentale del sistema di feedback:



Discriminatore: è composto da un generatore di frequenza Ω (A), un phase shifter (B), un mixer (C), un rivelatore (fotodiodo) che vede il fascio riflesso della cavità e un modulatore elettro-ottico (EOM)

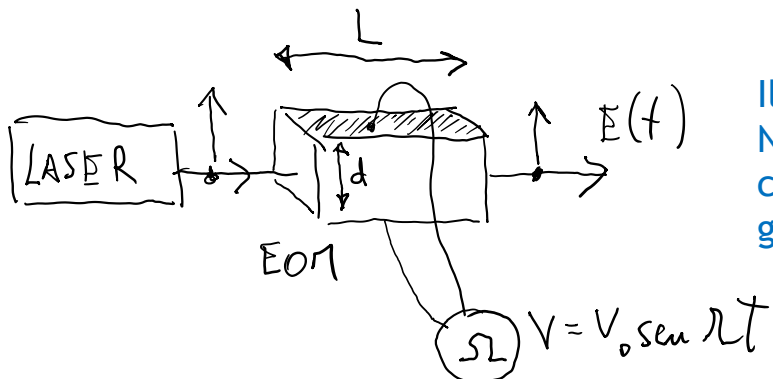
Servo: è un circuito elettrico composto da un integratore e da un proporzionale

Attuatore: è un piezo collegato ad uno degli specchi della cavità che serve a cabiare la lunghezza di questa a livello sub-nanometrico

Discriminatore:

Lo scopo del discriminatore è quello di misurare la differenza in frequenza tra laser e cavità.

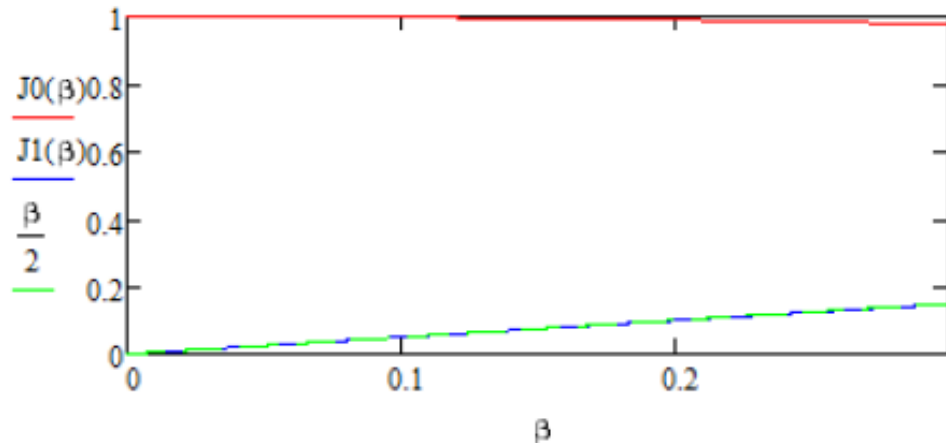
Il discriminatore è formato da diverse parti che adesso analizziamo in sequenza iniziando dal modulatore elettro-ottico (EOM):



Il fascio laser passa attraverso un cristallo di Niobato di Litio. Al cristallo viene applicato un campo elettrico oscillante per mezzo di un generatore ed elettrodi depositati sul cristallo.

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 e^{-i\omega_L t + i\beta \sin \Omega t} \approx E_0 \left(J_0(\beta) + 2i J_1(\beta) \sin \Omega t \right) e^{-i\omega_L t} \approx \\ &\approx E_0 (1 + i\beta \sin \Omega t) e^{-i\omega_L t} = E_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} e^{+i\Omega t} - \frac{\beta}{2} e^{-i\Omega t} \right) e^{-i\omega_L t} \end{aligned}$$

funzioni di Bessel



adesso dobbiamo trovare β scrivendo come l'indice di rifrazione del cristallo dipende dal campo elettrico applicato:

$$e^{ikz} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda} n \cdot L} \quad \text{dove} \quad n = n_e + \frac{1}{2} n_e^2 r_{33} \frac{V}{d}$$

$\nwarrow$ campo elettrico
 $\nearrow$ elemento del tensore B_0

sostituendo ed eliminando la fase costante ottengo:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} n_e^3 r_{33} \frac{V_0}{d} L =$$

$$= 0.015 \cdot V_0$$

LiNbO_3

$$r_{33} = 30 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}$$

$$n_e = 2.156$$

$$\lambda = 1064 \text{ nm}$$

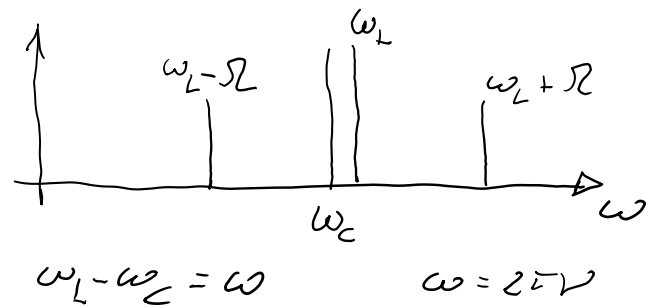
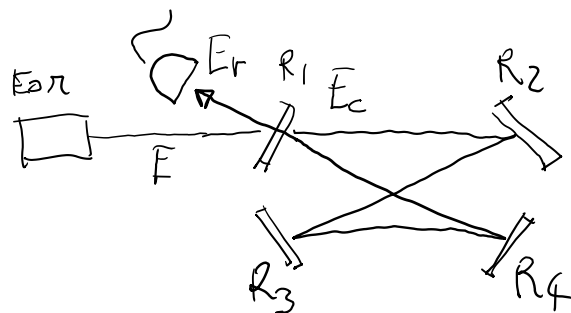
$$L = 45 \text{ mm}$$

$$d = 2.65 \text{ mm}$$

quindi il campo elettrico uscente dal cristallo è caratterizzato da due sidebands shiftate in frequenza di Ω rispetto alla portante con ampiezza $\beta/2$



la cavità riflette in modo diverso le tre componenti:



dove ω è lo shift in frequenza tra laser e cavità

$$E(t) = E_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} e^{+i\omega_r t} - \frac{\beta}{2} e^{-i\omega_r t} \right) e^{-i\omega_L t}$$

$$\Rightarrow E_r(t) = E_0 \left(r(\omega) + \frac{\beta}{2} r(\omega - \omega_r) e^{+i\omega_r t} - \frac{\beta}{2} r(\omega + \omega_r) e^{-i\omega_r t} \right) e^{-i\omega_L t}$$

dove r è la riflettività della cavità

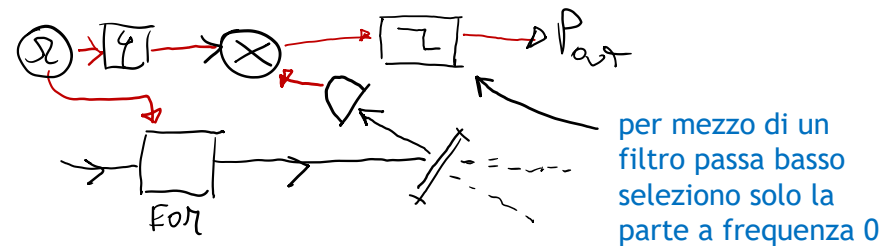
Il rivelatore vede la potenza, ovvero:

$$\begin{aligned} P = |E_r|^2 &= \text{prendo solo i termini oscillanti alla frequenza } \omega \\ &= \frac{\beta}{2} |E_0|^2 \left[A(\omega, \omega_r) e^{-i\omega_r t} + A^*(\omega, \omega_r) e^{+i\omega_r t} \right] = \\ &= \beta |E_0|^2 \left[\text{Re } A(\omega, \omega_r) \cos \omega_r t + \text{Im } A(\omega, \omega_r) \sin \omega_r t \right] \end{aligned}$$

sperimentalmente
è possibile usando
un mixer

dove la funzione A è: $A(\omega, \omega_r) = r(\omega) r^*(\omega - \omega_r) - r^*(\omega) r(\omega + \omega_r)$

riporto a 0 la frequenza Ω tramite un mixer:



$$P_{out} = P \cdot m_0 \sin(\Omega t + \varphi) =$$

$$= \beta m_0 |E_0|^2 \left[\operatorname{Re} A \cos \Omega t \sin(\Omega t + \varphi) + \operatorname{Im} A \sin \Omega t \sin(\Omega t + \varphi) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} m_0 |E_0|^2 \left[\operatorname{Re} A \sin \varphi + \operatorname{Im} A \cos \varphi \right] = \frac{\beta}{2} m_0 |E_0|^2 \operatorname{Im} A \quad \varphi = 0$$

nel caso utile con Ω più grande della larghezza di riga della cavità la parte reale di A va a zero e rimane solo la parte immaginaria che viene selezionata ponendo sperimentalmente $\varphi = 0$

Conviene sostituire al modulo quadro del campo l'uscita in Volt del rivelatore, ad esempio se il rivelatore è un fotodiodo collegato ad una resistenza R abbiamo:

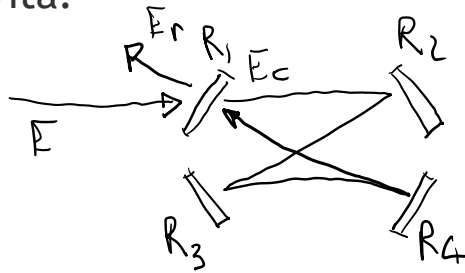
$$V_d = \frac{\beta}{2} m_0 \gamma P_L \operatorname{Im} A$$

dove P_L è la potenza del laser in W e

$$\gamma = \frac{P_R}{P_L} \leftarrow \begin{array}{l} \text{resistente} \\ \text{responsività} \end{array}$$



per capire la fisica del risultato conviene riscrivere esplicitamente la riflettività r della cavità:



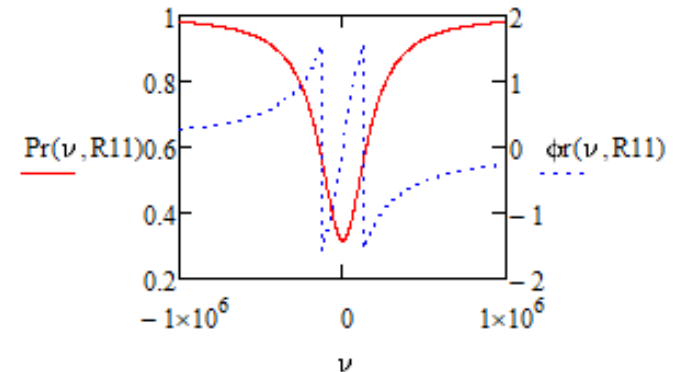
$$E_c(\nu) = \frac{\sqrt{1-R_1}}{1-\sqrt{R}e^{i\phi}} E$$

$$\phi = 2\pi \frac{\nu}{FSR} \approx \frac{\omega}{FSR}$$

$$E_r(\nu) = -\sqrt{R_1} E + \sqrt{1-R_1} \sqrt{R_2 R_3 R_4} E_c e^{i\phi} = \frac{-R_1 + \sqrt{R} e^{i\phi}}{\sqrt{R_1} (1 - \sqrt{R} e^{i\phi})}$$

dove $R = \prod_i R_i$

se le sidebands sono molto fuori rispetto alla larghezza di riga la fase, per queste la fase è nulla e la riflettività è 1, quindi:



$$\begin{aligned} A(\omega, \Omega) &= r(\omega) r^*(\omega - \Omega) - r^*(\omega) r(\omega + \Omega) \approx \\ &\approx r(\omega) - r^*(\omega) = |r(\omega)| 2i \sin \phi_r(\omega) \approx |r(\omega)| 2i \phi_r(\omega) \end{aligned}$$

$$\text{dove } r(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |r(\omega)| e^{i\phi_r(\omega)}$$

quindi rimane solo la parte immaginaria ed è una funzione dispari, ovvero, un buon segnale di errore

$$r(o) = \frac{-R_1 + \sqrt{R}}{\sqrt{R_1}(1-\sqrt{R})} \quad ; \quad \phi_r(v) = \arctan \frac{\operatorname{Im} r}{\operatorname{Re} r} \approx \frac{\sqrt{R}(1-R_1)}{(-R_1 + \sqrt{R})(1-\sqrt{R})} 2\pi \frac{v}{FSR}$$

$$\Rightarrow V_d = D \cdot Y = D \cdot (v_L - v_c)$$

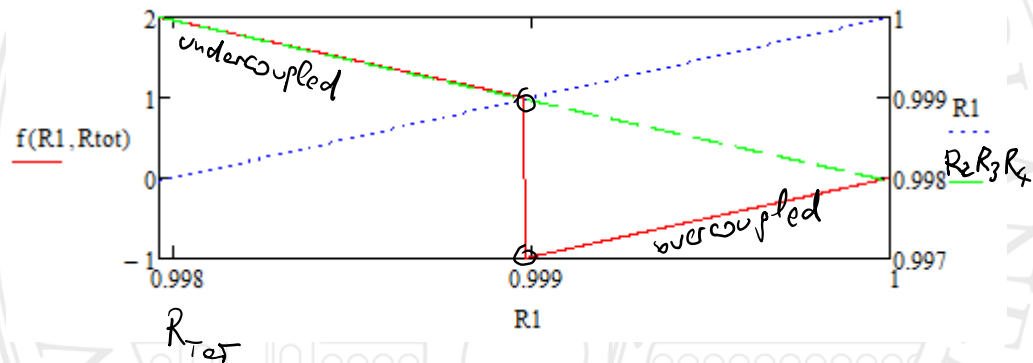
$$D = 2\beta m_o \gamma P_L \left[\operatorname{sgn}(-R_1 + \sqrt{R}) \frac{\sqrt{R}(1-R_1)}{\sqrt{R_1}(1-\sqrt{R})} \right] \frac{1}{\Delta v}$$

$$= 2\beta m_o \gamma P_L f(R_1, R) \frac{1}{\Delta v}$$

$$f(R_1, R) = \operatorname{sgn}(-R_1 + \sqrt{R}) \frac{\sqrt{R}(1-R_1)}{\sqrt{R_1}(1-\sqrt{R})}$$

$$\begin{cases} F = \frac{\pi}{1-\sqrt{R}} \\ \Delta v = \frac{FSR}{F} \end{cases}$$

$$F = 3000 \quad R_{tot} = 0.99786$$



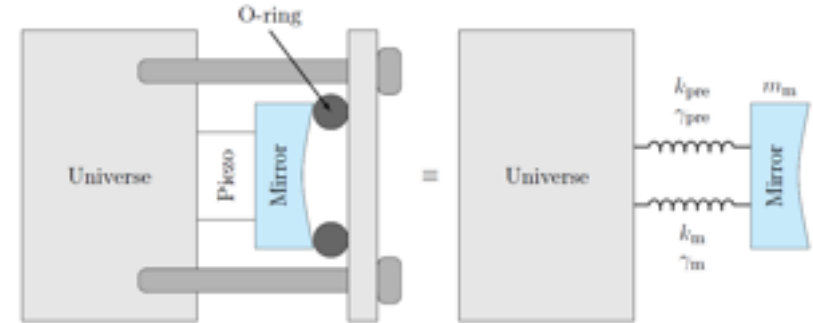
Attuatore

la lunghezza della cavità viene controllata per mezzo di un piezo collegato ad uno degli specchi



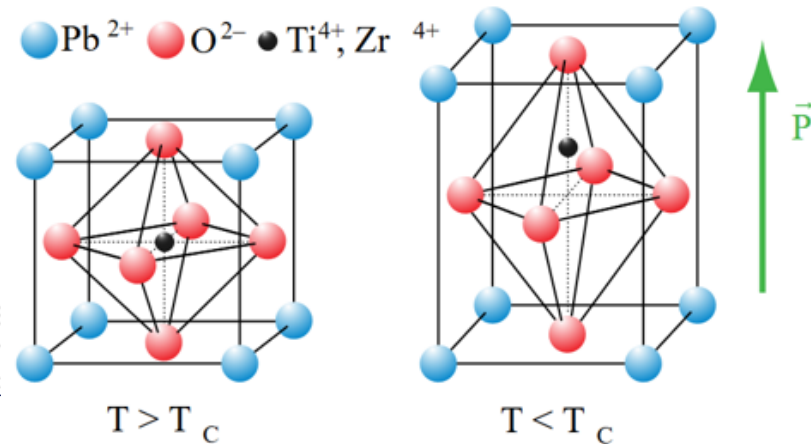
Il piezo è collegato ad un generatore di tensione a basso rumore. Tipicamente per allungare il piezo di 1nm servono 10mV.

Il piezo collegato allo specchio è l'equivalente di un oscillatore armonico smorzato



Il piezo è realizzato con una ceramica ferroelettrica

Ferroelectric material: non-centrosymmetric



$$\sim 1 \mu m / 10 V$$



Single element

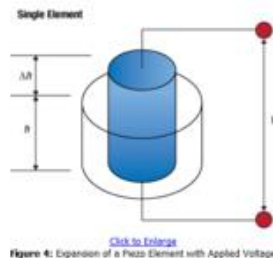


Figure 4: Expansion of a Piezo Element with Applied Voltage

Stack

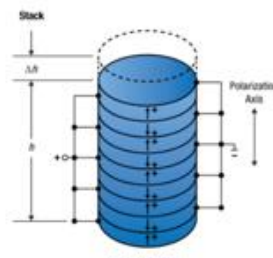


Figure 5: Stacked Piezo Design



Quindi la risposta in frequenza dell'attuatore è quella di un oscillatore armonico. Aggiungendo un preload si forma un parallelo tra due oscillatori. In questo modo si aumenta sia la costante elastica sia lo smorzamento. Vediamo perchè questo è importante:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{F}{m} \text{ costante}$$

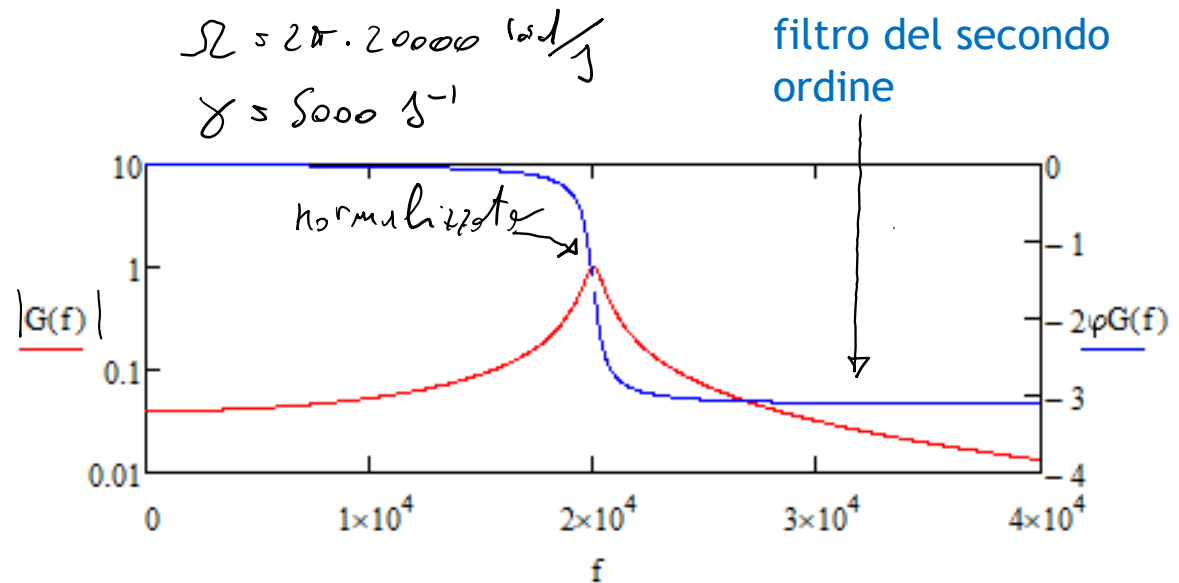
$$\Rightarrow (-\omega^2 + \Omega^2 + i\gamma\omega)\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{m}$$

$$\tilde{x} = \tilde{G} \tilde{F}$$

$$\tilde{G} = \frac{1/m}{(\Omega^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

$$|\tilde{G}| = \frac{1/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\phi_G = \arctan \frac{-\gamma\omega}{\Omega^2 - \omega^2}$$



sotto la risonanza la fase è 0 e l'ampiezza è circa costante. Quindi il segnale applicato al piezo si trasmette in modo fedele allo specchio. Sopra la risonanza l'ampiezza diminuisce e la fase si inverte.

In generale un filtro del secondo ordine (o più alto) inserito in un feedback è pericoloso perchè tende ad innescare delle oscillazioni. Ciò è dovuto al fatto che la funzione G del feedback può diventare -1 (ampiezza 1 e fase ruotata di π)

$$A(f) = \frac{A_0}{\Omega^2 - (2\pi)^2 f^2 - i 2\pi \gamma f} \quad \Rightarrow \quad G(f) = A(f) S(f) D(f) \quad \text{vedi pg. 3}$$

$$S_{AV} = \frac{S_o + S_r}{|1 + G|^2} \quad \text{vedi pg. 4}$$

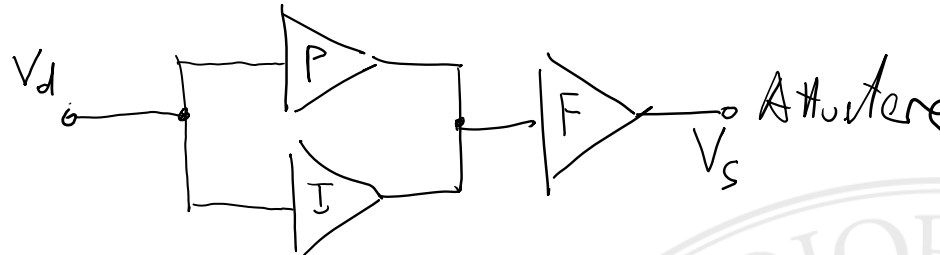
la frequenza f contenuta nel rumore del laser o della cavità per cui la G diventa -1 sarà amplificata e il feedback innescherà un'oscillazione a quella frequenza

Quindi sarà necessario aggiungere nel Servo degli opportuni filtri che evitano le risonanze del feedback



Servo

Il servo collega il discriminatore (che genera il segnale di errore) all'attuatore piezo. Di base è un circuito elettrico che contiene un integratore, un proporzionale e un filtro per evitare le risonanze.

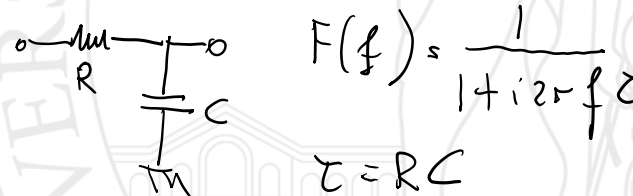


Mentre il ruolo del proporzionale è semplice (far aumentare G compatibilmente con le risonanze) il ruolo dell'integratore è meno intuitivo ma fondamentale. L'integratore ha memoria di quanto accaduto in passato e quindi continua ad applicare un segnale (ad esempio dovuto alla dilatazione termica della cavità) anche se il segnale di errore è nullo.

La risposta spettrale è:

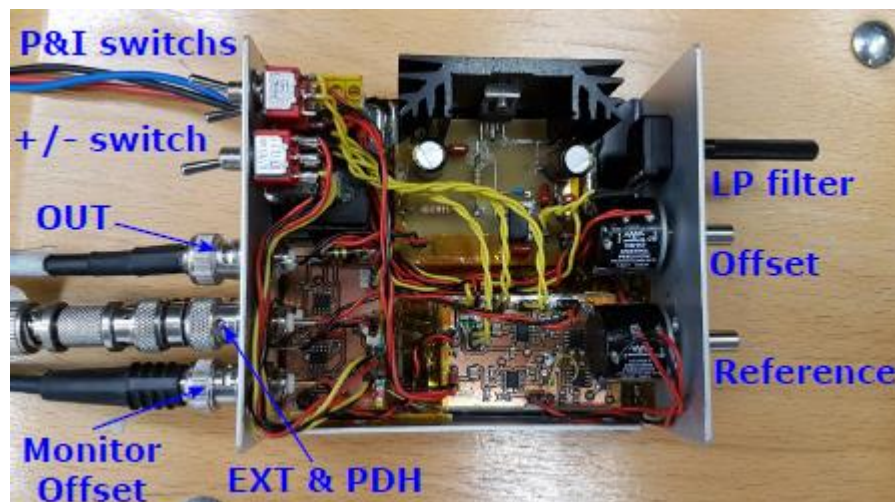
$$S(f) = \left(P_0 + \frac{I_0}{i2\pi f} \right) F(f)$$

potrebbe essere un filtro del primo ordine formato da una resistenza e da un condensatore



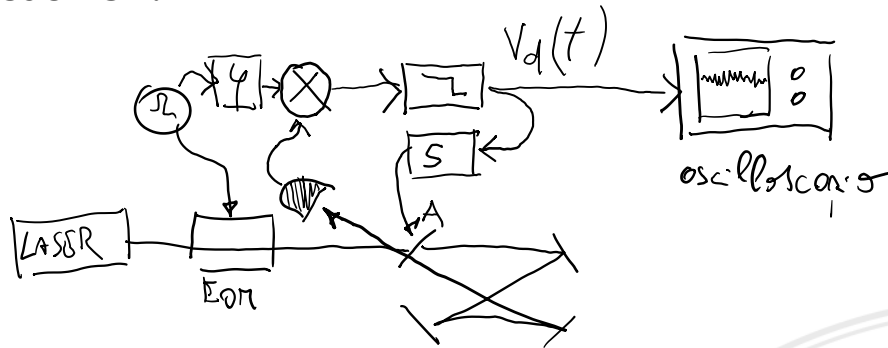
Alcune note sul servo:

- L'integratore e l'attuatore insieme forniscono una rotazione massima della fase di $3/2 \cdot \pi$, quindi aumentando il guadagno dell'integratore (I_0) è molto probabile innescare delle oscillazioni nel feedback
- Per evitare queste oscillazioni è necessario aumentare il tempo τ del filtro al primo ordine del servo in modo da tagliare via la risonanza dell'attuatore (questo va a ridurre la banda del feedback)
- Tipicamente la banda va ulteriormente ridotta quando si aumenta il guadagno del proporzionale (P_0)



Spettro di rumore: PSD (power spectral density)

consideriamo l'acquisizione di un segnale, ad esempio l'uscita del discriminatore, e determiniamo il suo PSD:



Supponiamo di acquisire il segnale $V_d(t)$ per un tempo di 1s con un campionamento di 10^6 punti s^{-1} . Come prima cosa determiniamo la sigma del segnale (questo è un dato che l'oscilloscopio digitale può fornire direttamente):

$$\sigma_{V_d}^2 = \langle V_d^2 \rangle - \langle V_d \rangle^2 \quad \text{dove la media è fatta sul tempo}$$

Sappiamo che la tensione V_d è proporzionale alla differenza tra la frequenza del laser e quella della cavità. Dalla calibrazione del discriminatore troviamo la sigma della variabile $\Delta\nu(t)$

$$\sigma_{\Delta\nu}^2 = \frac{1}{D^2} \sigma_{V_d}^2$$

Notare che in questo particolare esempio la variabile Δv è spettralmente limitata da molti filtri, in particolare dobbiamo considerare che la cavità stessa è un filtro in frequenza che taglia le frequenze superiori alla sua larghezza di riga. Torneremo su questo punto a breve.

adesso facciamo la FFT del segnale e da questo otteniamo il PSD:

$$v(f) = \int dt v(t) e^{+i2\pi f t}$$

poichè abbiamo acquisito 10^6 punti in un secondo lo step nella frequenza è 1Hz e possiamo analizzare le frequenze fino a 500kHz (2 punti per periodo). Il PSD è il modulo quadro della FFT normalizzato in modo che il suo integrale sia uguale alla varianza del segnale:

$$\text{PSD} = S_{\Delta v}(f) = \propto |v(f)|^2$$

$$\int S_{\Delta v}(f) df = \sigma_{\Delta v}^2$$



cavità ottica come filtro in frequenza:

$$E_c(t+\tau) = E_c(t) + \frac{\partial E_c}{\partial t} \tau = \sqrt{1-R_1} E(t) + \sqrt{R} e^{i 2\pi \frac{\nu(t)}{FSR}} E_c(t)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} \tau = \sqrt{1-R_1} E - E_c + \sqrt{R} \left(1 + i 2\pi \frac{\nu(t)}{FSR} \right) E_c \approx \sqrt{1-R_1} E - E_c + \sqrt{R} E_c$$

$$+ i\omega \tau \tilde{E}_c = \sqrt{1-R_1} \tilde{E} - (1-\sqrt{R}) \tilde{E}_c \quad \nu \ll \Delta\nu \text{ con la stabilizzazione attiva}$$

$$\tilde{E}_c = \tilde{B} \tilde{E}$$

$$\tilde{B} = \frac{\sqrt{1-R_1}}{(1-\sqrt{R}) + i\omega\tau} = \frac{\sqrt{1-R_1} / (1-\sqrt{R})}{1 + i \frac{2f}{FSR} \frac{\pi}{1-\sqrt{R}}} \approx \frac{C}{1 + 2i \frac{f}{\Delta\nu}} \quad \begin{array}{l} \text{filtro al} \\ \text{1° ordine} \end{array}$$

$$|\tilde{B}| = \frac{C}{\sqrt{1 + 4 \frac{f^2}{\Delta\nu^2}}}$$

$$f_{\text{TAGLIO}} = \frac{\Delta\nu}{2}$$

frequenza
lunghezza d'onda
delle
cavità

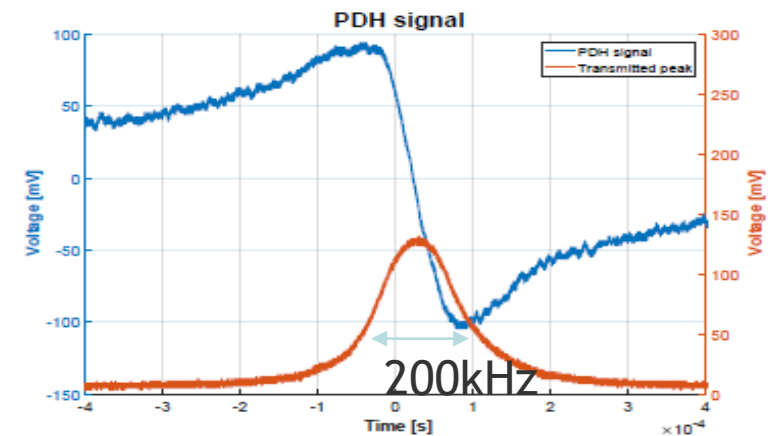
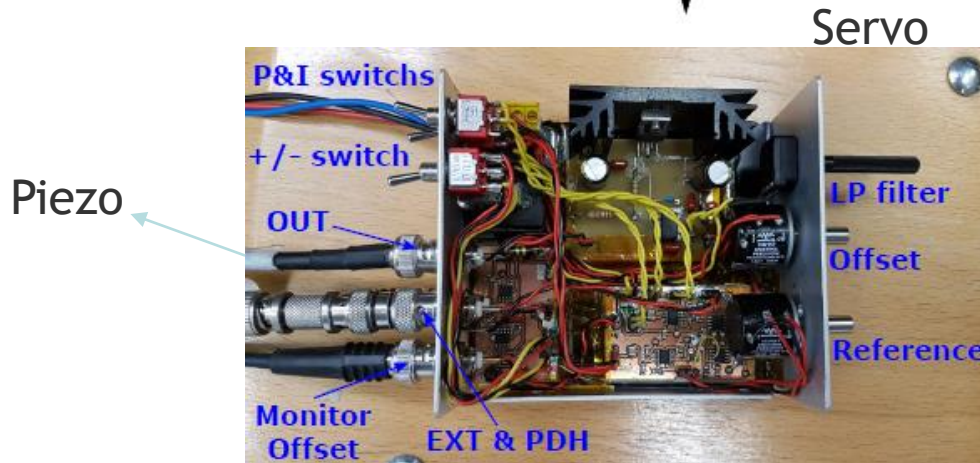
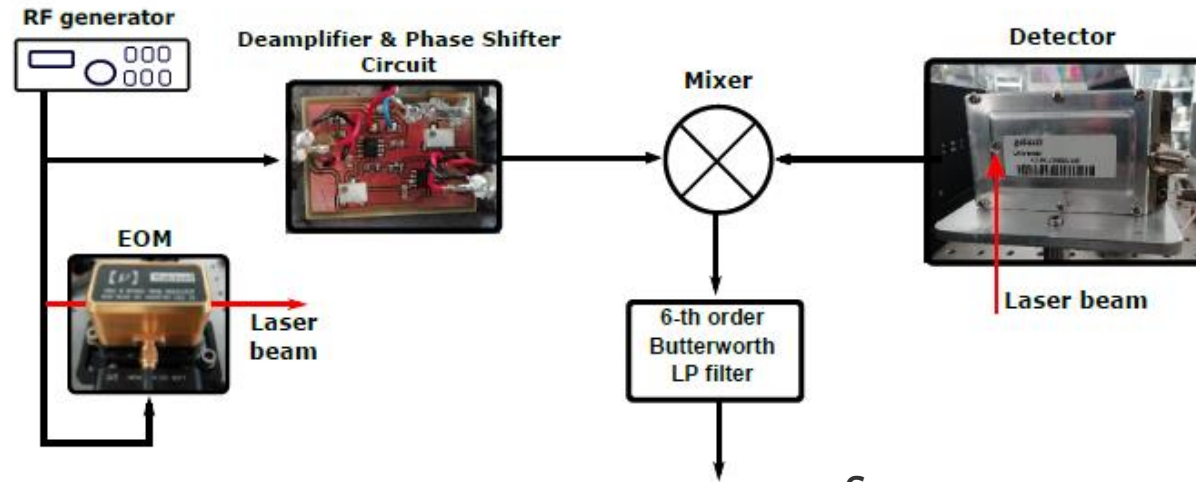


PDH method (feedback implementation)

Finesse=500, FSR=100MHz $\Rightarrow$ $\Delta\nu=200\text{kHz}$

200kHz $\Rightarrow$ $\delta L=2\text{nm}$

2nm $\Rightarrow$ 6.6 as



Implementazione del feedback: PSD

$$\delta L = 30\mu\text{m} \quad \delta V_{\text{piezo}} = 300\mu\text{V}$$

