

verifica così in modo analitico che è infinito il tempo necessario per raggiungere un punto di equilibrio instabile lungo la separatrice.

- Osservazione. Sia $S(E)$ l'area racchiusa entro una curva di fase chiusa (corrispondente ad esempio ad una librazione del pendolo; vedi Fig. 9), e sia T_E il corrispondente periodo. Allora vale

$$T_E = m \frac{dS}{dE}.$$

Ciò si vede nel modo seguente: siano $x_0 = x_0(E)$, $x_1 = x_1(E)$ i due punti di inversione. Allora per la (1.18) si ha $T_E = 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}$. D'altra parte, se denotiamo con $v(E, x)$ la funzione che dà la linea di livello nello spazio delle fasi corrispondente al valore E , è evidentemente $S(E) = 2 \int_{x_0}^{x_1} v(E, x) dx = 2 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} dx$. Basta allora eseguire la derivata rispetto ad E per verificare il risultato.³³⁾

1.3 Studio locale attorno ai punti singolari

1.3.1 Classificazione dei punti singolari nel piano

Si è visto che nei sistemi meccanici autonomi conservativi, descritti da equazioni del tipo $\ddot{x} = f(x)$, i punti di equilibrio si trovano per $f(x) = 0$, e dunque, tipicamente, in corrispondenza dei minimi o dei massimi locali dell'energia potenziale $V(x)$, intorno ai quali l'equazione approssima rispettivamente quella di un oscillatore armonico o di un repulsore armonico;³⁴⁾ i punti corrispondenti nel piano di fase sono stati chiamati centro e colle (o sella) rispettivamente, il primo essendo stabile ed il secondo instabile.

Si può poi considerare il caso più generale di forza dipendente dalla velocità, $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, o anche il generico caso *autonomo piano*, della forma

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (1.19)$$

E' spontaneo dunque domandarsi anche in tale caso più generale quale sia la forma approssimata più semplice attorno a un punto di equilibrio.³⁵⁾

Supponiamo dunque che esista una soluzione di equilibrio $x(t) = c$, ovvero un punto c tale che $f(c) = 0$ (*punto singolare* del campo vettoriale f). Si considera allora l'approssimazione lineare del sistema (1.19) attorno a c , scrivendo $x = c + \xi$ (sicché

³³⁾ Nell'eseguire la derivazione, si tenga presente che anche gli estremi di integrazione x_0 , x_1 dipendono da E ; si verifica facilmente che i due termini corrispondenti non contribuiscono a $\frac{dS}{dE}$.

³⁴⁾ Ci restringiamo qui al caso generico $V''(x) \neq 0$.

³⁵⁾ Si veda la già citata memoria di H. Poincaré.

$$** \quad \dot{x} = A x = A T(t) u$$

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(T(t)u) = u \dot{T}$$

$$* \quad f(c+\xi) = f(c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(c) \xi_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(c) \xi_i \xi_j + o(\xi)$$

1.31

$\dot{x} = \dot{\xi}$, e si esegue uno sviluppo di Taylor per $f(c + \xi)$ arrestato al primo ordine in ξ ; poiché il termine di ordine zero $f(c)$ è nullo, si ottiene

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = f(c + \xi) = A\xi + O(|\xi|^2), \quad * \quad (1.20)$$

avendo indicato con A la matrice jacobiana di f valutata in c :

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c). \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

In tal modo ci si riduce allo studio del sistema lineare $\dot{\xi} = A\xi$, ovvero, con un cambiamento di nome della variabile ξ , al sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1.22)$$

dove A è un generico operatore lineare (una matrice, nella base scelta), reale (perché il campo vettoriale $f(x)$ era stato supposto reale esso stesso). L'equazione (1.22) con A data dalla (1.21) si dice equazione alle variazioni (*variational equation*) per l'equazione (1.19), relativa alla soluzione particolare $x = 0$.³⁶⁾

Per il sistema (1.22) cominciamo col ricercare se esistano eventualmente delle soluzioni di forma speciale (o soluzioni particolari, come di solito si dice), della forma³⁷⁾

$$x(t) = T(t)u, \quad (u = \text{cost}). \quad (1.23)$$

Le eventuali soluzioni (1.23) sono speciali, in quanto entrambe le componenti x_1, x_2 di x evolvono con la medesima legge temporale, ovvero la soluzione $x(t)$ si mantiene sempre parallela ad un vettore fissato u (è proporzionale ad u).³⁸⁾ Per la linearità dell'operatore A , vale $AT(t)u = T(t)Au$, e d'altra parte, per la linearità dell'operatore di derivazione, vale $\frac{d}{dt}(T(t)u) = \dot{T}(t)u$; dunque deve essere $\dot{T}(t)u = T(t)Au$. Ciò è possibile se e solo se i vettori u e Au sono paralleli, ovvero si ha³⁹⁾

$$Au = \lambda u \quad (1.24)$$

³⁶⁾ Più in generale, si può definire una equazione alle variazioni relativamente a una qualsiasi soluzione $x = x(t)$ di un'equazione $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$. Se $x(t)$ è soluzione, si richiede che $x(t) + \xi(t)$ sia soluzione al primo ordine in ξ , e si ottiene allora che $\xi(t)$ soddisfa l'equazione lineare non autonoma $\dot{\xi} = A(t)\xi$, dove $A = A(t)$ è la matrice definita da $A_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x(t))$.

³⁷⁾ Cerchiamo, naturalmente, soluzioni non banali, ovvero non identicamente nulle; si vede allora facilmente, per la (1.22), che la funzione T non si annulla mai.

³⁸⁾ Questo procedimento basato sulla ricerca di soluzioni particolari *fattorizzate* è molto comune; si veda, più avanti, lo studio dei *modi normali di oscillazione* di un sistema attorno a una configurazione di equilibrio stabile. Per le equazioni alle derivate parziali tale procedimento corrisponde al metodo di *separazione delle variabili*; le soluzioni fattorizzate rappresentano, ad esempio, le cosiddette *onde stazionarie* per l'equazione della corda vibrante, e gli *stati stazionari* per l'equazione di Schroedinger. Nel caso della corda vibrante, ad es., si assume per l'elongazione la forma $u(x, t) = T(t)X(x)$.

³⁹⁾ In altre parole, dividendo per $T(t)$ (che non si annulla mai), si ha $Au = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}u$, e dunque, poiché il primo membro è indipendente dal tempo, segue necessariamente che il rapporto $\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}$ è uguale a una costante λ ; la conclusione è immediata. Nell'analogo procedimento di separazione delle variabili, λ è chiamata *costante di separazione*.

$$* \int \frac{T(t)}{T(t)} dt = \ln T(t) = \int \lambda dt = \lambda t \Rightarrow \ln\left(\frac{T(t)}{T(0)}\right) = \lambda t \Rightarrow \frac{T(t)}{T(0)} = e^{\lambda t} \Rightarrow T(t) = T(0) e^{\lambda t}$$

1.32

con un opportuno numero reale λ , e quindi anche

$$\dot{T}(t) = \lambda T(t). \quad (1.25)$$

La (1.24) si dice *equazione agli autovalori* per l'operatore lineare A ; u si dice *autovettore* e λ il corrispondente *autovalore*.⁴⁰⁾ Per ogni autovalore λ , l'evoluzione temporale del fattore $T(t)$ si ottiene allora subito integrando la (1.25) e si ha $T(t) = Ce^{\lambda t}$, con un'arbitraria costante $C = T(0)$. Si è così dimostrata la seguente

Proposizione 1.3: Per l'equazione lineare $\dot{x} = Ax$ si hanno soluzioni particolari fattorizzate della forma

$$x(t) = Ce^{\lambda t}u \quad (1.26)$$

in corrispondenza ad ogni autovettore u di A , essendo λ il corrispondente autovalore: $Au = \lambda u$.

Ora, per la linearità dell'equazione $\dot{x} = Ax$, vale il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, per cui ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione; dunque la soluzione generale della (1.22) si conoscerà quando si avranno due soluzioni particolari della forma (1.26) che siano linearmente indipendenti. Riportiamo qui di seguito la discussione nel caso particolarmente semplice, detto *caso generico*, in cui la matrice A ammetta due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entrambi non nulli; la discussione dei casi rimanenti è svolta nell'Appendice B. Siano dunque $u^{(1)}, u^{(2)}$ gli autovettori nel caso generico, cioè si abbia

$$Au^{(1)} = \lambda_1 u^{(1)}, \quad Au^{(2)} = \lambda_2 u^{(2)}, \quad 0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0; \quad (1.27)$$

come è ben noto, $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ sono allora linearmente indipendenti. Autovalori e autovettori sono in generale complessi; per la realtà della matrice A si hanno tuttavia per gli autovalori due soli casi possibili:

- 1) λ_1, λ_2 reali
- 2) λ_1, λ_2 complesso-coniugati.

Caso 1 (autovalori λ_1, λ_2 reali). In questo caso anche gli autovettori $u^{(1)}, u^{(2)}$ possono essere presi reali (cioè con componenti reali), e la soluzione generale (reale) può scriversi nella forma

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} u^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} u^{(2)}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (1.28)$$

Si hanno allora i tre sottocasi illustrati nella Fig. 12.

- **Esercizio 1.5:** si dimostri che, nel caso dei nodi, la generica traiettoria è tangente nell'origine all'autovettore con autovalore minore in modulo.

Caso 2 (autovalori λ_1, λ_2 complesso-coniugati). Denotiamo $\lambda_1 = \lambda$, $u^{(1)} = u$. Allora si ha $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ (complesso coniugato di λ), e coniugando l'equazione $Au = \lambda u$ segue (per la realtà di A) $u^{(2)} = \bar{u}$ (ovvero $\bar{u}$ è autovettore di A , e proprio con autovalore

⁴⁰⁾ Inglese *eigenvalue*, tedesco *eigenwert*, francese *valeur propre*.

Com'è facile vedere il
percorso per l'origine.

Com'è facile vedere.

1.33

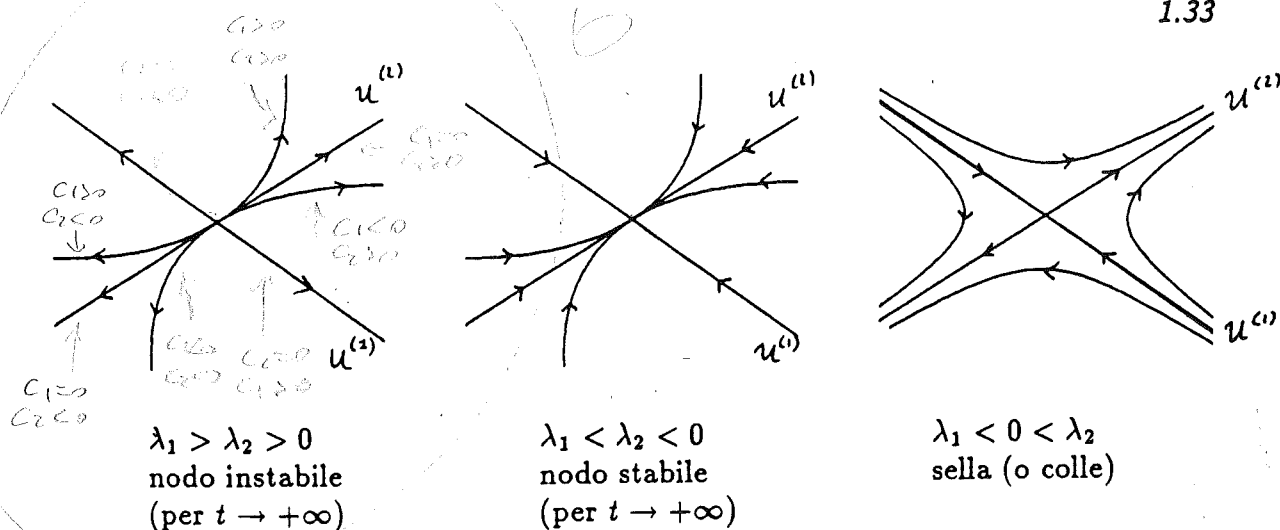


Fig. 1.12

Caso degli autovalori reali

$\bar{\lambda}$). In analogia col caso precedente, la soluzione generale complessa può scriversi nella forma

$$x(t) = C e^{\lambda t} u + D e^{\bar{\lambda} t} \bar{u}, \quad C, D \in \mathbb{C}, \quad (1.29)$$

ed essa è reale per $D = \bar{C}$. Si pone allora il problema di scrivere la soluzione reale $x(t)$ senza far intervenire vettori e coefficienti complessi, come è nella (1.29). A tal fine basta decomporre il vettore u ed il numero λ in parti reali e immaginarie

$$u = v^{(1)} + i v^{(2)}, \quad \lambda = \alpha + i\beta, \quad v^{(i)} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.30)$$

e scrivere C in forma esponenziale

$$C = \rho e^{i\gamma} \quad (1.31)$$

Si ottiene allora $x(t) = \rho e^{\alpha t} [e^{i(\beta t + \gamma)}(v^{(1)} + i v^{(2)}) + e^{-i(\beta t + \gamma)}(v^{(1)} - i v^{(2)})]$ ovvero, con le formule di Eulero,

$$x(t) = \eta_1(t) v^{(1)} + \eta_2(t) v^{(2)} \quad (1.32)$$

dove

$$\eta_1(t) = 2\rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma), \quad \eta_2(t) = -2\rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma) \quad (1.33)$$

Dunque si ha ancora, per la soluzione generale, una decomposizione (1.32) analoga a quella (1.28) del caso degli autovalori reali. Ora però la decomposizione è sulla base reale $v^{(1)}, v^{(2)}$, parti reale e immaginaria dell'autovettore complesso u (che si mostrano facilmente essere linearmente indipendenti);⁴¹⁾ si osservi che si hanno esponenziali reali coinvolgenti la parte reale dell'autovalore λ , e funzioni oscillanti (seni e coseni) coinvolgenti la parte immaginaria di λ . Le costanti ρ, γ sono le costanti arbitrarie

⁴¹⁾ Infatti, sia per assurdo $v^{(2)} = \mu v^{(1)}$, μ reale non nullo; allora si avrebbe $u^{(1)} = v^{(1)} + i v^{(2)} = (1 + i\mu)v^{(1)}$ e analogamente $u^{(2)} = (1 - i\mu)v^{(1)}$, sicché sarebbe $u^{(2)} = \frac{1-i\mu}{1+i\mu} u^{(1)}$, contro l'indipendenza lineare degli autovettori complessi $u^{(i)}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A x = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I) x = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = a d - a \lambda d - b c \lambda + b \lambda d = 0$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A = 0$$

1.34

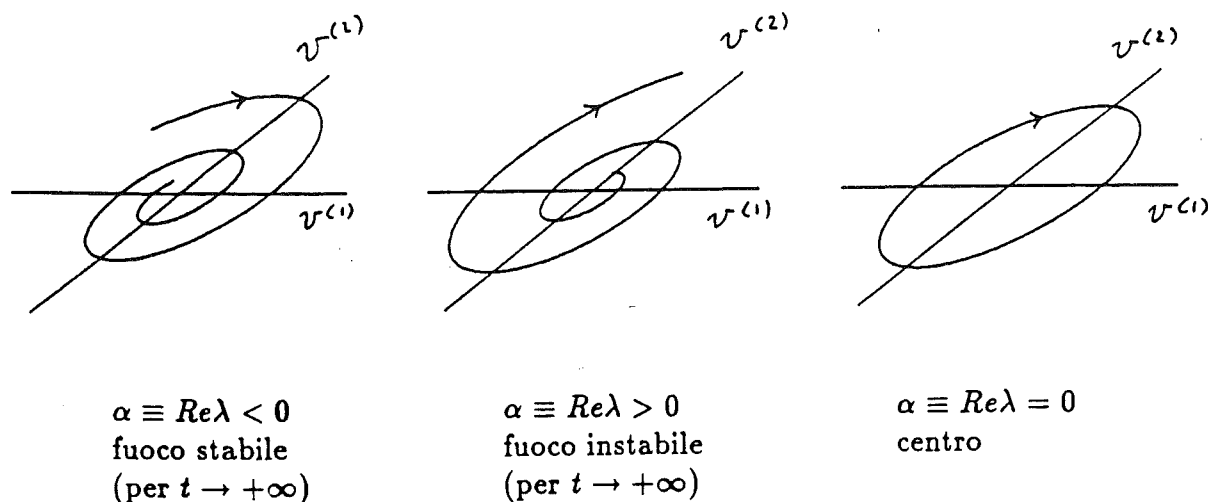


Fig. 1.13

Caso degli autovalori complesso-coniugati

della soluzione generale. Si hanno pertanto ancora tre sottocasi come illustrato nella Fig. 13.

E' molto facile distinguere tra tutti i sei casi sopra descritti, anche senza calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice A , semplicemente considerandone la traccia e il determinante.⁴²⁾ Infatti, come si verifica immediatamente, l'equazione per λ è

$$\lambda^2 - (\text{Tr } A)\lambda + \det A = 0;$$

allora, dalla formula risolutiva

$$2\lambda = \text{Tr } A \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = (\text{Tr } A)^2 - 4 \det A$$

si vede subito che si hanno i seguenti casi possibili:

- i) autovalori reali di segno opposto, e dunque un punto di sella, se $\det A < 0$;
- ii) autovalori reali concordi (dello stesso segno di $\text{Tr } A$), e dunque un nodo stabile o un nodo instabile, se $\det A > 0$ e $\Delta > 0$;
- iii) autovalori complesso-coniugati (con parte reale dello stesso segno di $\text{Tr } A$), e dunque un fuoco stabile o un fuoco instabile (o un centro se $\text{Tr } A = 0$), se $\Delta < 0$.

Pertanto è significativo fare riferimento al piano con coordinate $(\text{Tr } A, \det A)$, (Fig. 14). Tale piano risulta naturalmente diviso in regioni aperte dalle curve seguenti: $\det A = 0$ (asse orizzontale); $\text{Tr } A = 0$ con $\det A > 0$ (semiasse verticale positivo); $\Delta = 0$ (parabola riportata in figura), e ad ognuna di tali regioni aperte corrisponde un comportamento qualitativo ben preciso.

Resterebbero ancora da considerare i casi $\det A = 0$ (in cui un autovalore è nullo) e $\Delta = 0$ (in cui i due autovalori coincidono). Queste due curve del piano $(\text{Tr } A, \det A)$ corrispondono ai casi "non generici" che avevamo escluso. L'origine, punto di incontro di tali due curve, può dirsi in qualche modo "doppiamente non generico".

⁴²⁾ Come è ben noto, tali quantità $\text{Tr } A$ e $\det A$ sono invarianti per trasformazioni lineari.

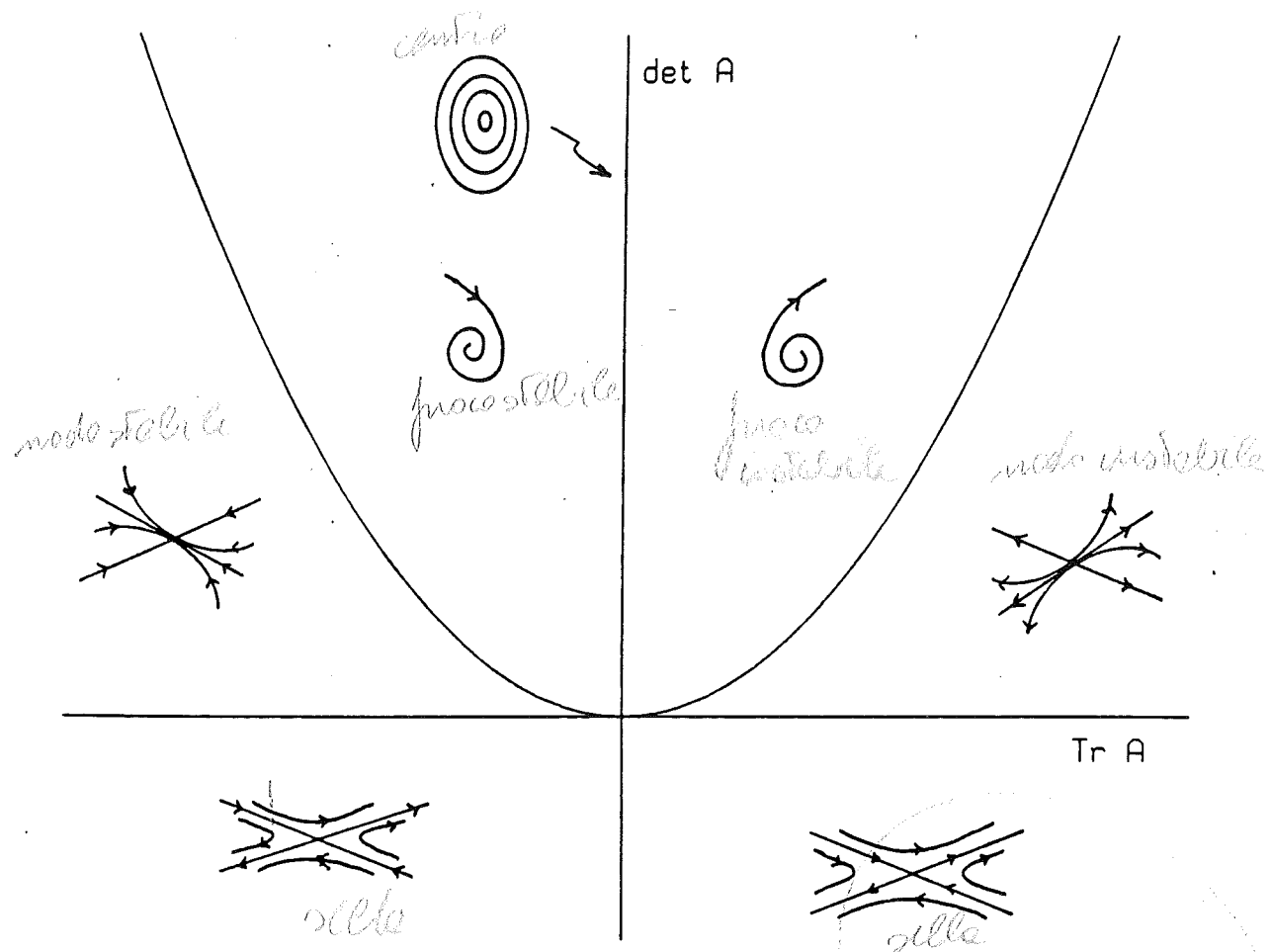


Fig. 1.14

Diagramma di biforcazione per i punti singolari
dell'equazione lineare nel piano

Un caso particolarmente importante è quello meccanico retto dall'equazione $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ ovvero $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$, con $f(0, 0) = 0$. La matrice A ha allora la forma

I) $\dot{x} = y$
 II) $\dot{y} = f(x, y)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial y} \\ \frac{\partial II}{\partial x} & \frac{\partial II}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

corrispondente all'equazione linearizzata $\ddot{x} - \beta\dot{x} - \alpha x = 0$, e si ha semplicemente

$$\text{Tr } A = \beta, \quad \det A = -\alpha.$$

In particolare nel caso conservativo (equazione $\ddot{x} = f(x)$, $\beta = 0$), si ha un colle per $\alpha = f'(0) > 0$ (massimo dell'energia potenziale, repulsore armonico) e un centro per $\alpha < 0$ (minimo dell'energia potenziale, oscillatore armonico). Si osservi come i sistemi conservativi, essendo rappresentati nel piano $(\text{Tr } A, \det A)$ da una linea (cioè

Tr $A = 0$), siano da considerarsi eccezionali tra i sistemi lineari in due variabili.⁴³⁾

• **Esercizio 1.6:** verificare che:

- a) per l'oscillatore armonico smorzato ($\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2x = 0$) si ha un fuoco stabile nel caso di debole smorzamento ($\mu < \omega$), e un nodo stabile nel caso di grande smorzamento ($\mu > \omega$);
- b) per il sistema di Lotka-Volterra l'origine è un colle, mentre il punto di equilibrio non banale è un centro;
- c) per l'equazione di Van der Pol l'origine è un nodo instabile per $\beta > 2$, e un fuoco instabile per $\beta < 2$;
- d) per sistemi di tipo meccanico, cioè descritti da $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$, nel caso dei nodi si ha che le direzioni principali (gli autovettori della matrice A) non sono disposti arbitrariamente nel piano delle fasi: nel caso stabile (per $t \rightarrow +\infty$) essi giacciono nel secondo e nel quarto quadrante, mentre nel caso instabile essi giacciono nel primo e nel terzo.

• **(Osservazione.** Se ci limitiamo a considerare le sole proprietà di stabilità dell'origine per l'equazione lineare $\dot{x} = Ax$, è evidente che esse dipendono solo dal segno della parte reale degli autovalori (che è il segno degli autovalori stessi, nel caso reale). Precisamente si ha:

- i) stabilità asintotica per tempi positivi, se entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa (pozzo); *(modo stabile / fuoco stabile)*
- ii) stabilità asintotica per tempi negativi, se entrambi gli autovalori hanno parte reale positiva (sorgente); *(modo instabile / fuoco instabile)*
- iii) instabilità per tempi positivi (negativi), se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa).

Si potrebbe dimostrare che queste proprietà di stabilità si mantengono anche nel caso, sopra non considerato, di autovalori coincidenti. Nel caso invece di $\text{Re } \lambda = 0$, se $\text{Im } \lambda \neq 0$ si ha il centro, che è stabile per tutti i tempi; invece, se gli autovalori sono entrambi nulli si ha instabilità (come per la particella libera), salvo il caso banale $A = 0$. Come si vedrà sotto per l'analogo problema in $\mathbb{R}^n$, nei tre casi sopra messi in evidenza le proprietà di stabilità permangono poi anche per l'originario sistema nonlineare $\dot{x} = f(x)$, di cui $\dot{x} = Ax$ rappresenta l'equazione alle variazioni. Viceversa, come è illustrato dall'esercizio seguente, se $\text{Re } \lambda = 0$, allora il comportamento qualitativo dell'equazione nonlineare non è a priori determinato.

⁴³⁾ Ma, mentre nella meccanica i sistemi conservativi, per quanto eccezionali, hanno in linea di principio un ruolo di particolare importanza (perché si assume per ipotesi che i modelli microscopici siano conservativi, e ci si ripromette poi di "dedurre" gli aspetti dissipativi a partire dalle equazioni microscopiche conservative, al limite di sistemi con infiniti gradi di libertà), ciò non avviene ad esempio nell'ambito dei modelli matematici in biologia o in economia. Per questo motivo è alquanto spontaneo pensare di generalizzare il sistema di Lotka-Volterra a un sistema le cui proprietà qualitative siano stabili rispetto a piccole variazioni dei parametri (stabilità strutturale). Tale generalizzazione fu compiuta da Kolmogorov in un bellissimo articolo scritto originariamente in italiano: A. Kolmogorov, *Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza*, *Giornale Italiano degli Attuari* II, 2, 74-80 (1934).

- **Esercizio 1.7:** si studi l'equazione $\ddot{x} + 2\mu x^2 \dot{x} + \omega^2 x = 0$, $\mu > 0$. Utilizzando il teorema di Ljapunov (con la condizione b'') si dimostri che l'origine, pur essendo un centro, è asintoticamente stabile.
- **Osservazione (il problema delle biforcazioni).** In molti casi avviene che si debba considerare una equazione differenziale dipendente da parametri, nel caso più semplice da un parametro reale, diciamo μ . Così, se il sistema presenta un punto di equilibrio, la matrice A , che descrive la linearizzazione del sistema attorno a quel punto, dipenderà in generale da μ , e dunque ne dipenderà anche la natura del punto singolare stesso (centro, colle, ...). E' quindi significativo considerare la curva γ descritta dal corrispondente punto rappresentativo nel piano $\text{Tr } A, \det A$. Quando essa attraversa una delle curve $\det A = 0$, $\text{Tr } A = 0$ con $\det A > 0$, $(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A = 0$, cambierà la natura del punto singolare, e quindi anche il comportamento qualitativo del sistema. Tale fenomeno è detto *biforcazione*. Le regioni in cui la natura qualitativa del sistema non varia, che sono degli aperti di dimensione due, si dicono *aperti di stabilità*,⁴⁴⁾ mentre le curve di codimensione uno attraverso le quali si hanno le biforcazioni si dicono *chiusi di biforcazione*. Alcuni esempi significativi di biforcazioni in sistemi meccanici sono riportati nell'Appendice C.

1.3.2 Punti singolari in $\mathbb{R}^n$, e cenno al problema nonlineare

La classificazione dettagliata dei punti singolari, che come si è visto è abbastanza semplice in $\mathbb{R}^2$, diviene quantomeno complicata al crescere della dimensione dello spazio delle fasi. Tuttavia, alcuni elementi essenziali si trasportano in modo semplice e naturale al caso di dimensione n qualsiasi. Innanzitutto, data un'equazione differenziale in $\mathbb{R}^n$,

$$\dot{x} = f(x),$$

se $c \in \mathbb{R}^n$ è punto di equilibrio (o singolare), ovvero $f(c) = 0$, è immediato scrivere anche in questo caso l'equazione alle variazioni

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.34)$$

ove A è un operatore in $\mathbb{R}^n$ (corrispondente, nella base scelta, alla matrice $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$).

E' poi ancora possibile cercare soluzioni fattorizzate, della forma $x(t) = T(t)u$, riportando così lo studio dell'equazione alle variazioni al problema agli autovalori $Au = \lambda u$ (ora evidentemente in $\mathbb{R}^n$), con la corrispondente soluzione particolare $x(t) = Ce^{\lambda t}u$, per ogni autovettore u e corrispondente autovalore λ . Poiché A è reale, gli autovalori di A o sono reali, oppure compaiono in coppie complesso-coniugate.

⁴⁴⁾ Si tratta qui di una stabilità in senso alquanto diverso di quello della stabilità di un punto di equilibrio: in questo caso infatti si considera la stabilità del comportamento qualitativo del sistema, al variare di un parametro. Tale proprietà, qui enunciata in maniera euristica, fu formalizzata da Andronov e chiamata *stabilità strutturale*. Si veda A. Andronov, A. Vitt e S. Khaikin, *Theory of oscillators*, Pergamon Press (1960).

Nel caso generico in cui la matrice A ammetta n autovalori distinti non nulli, e dunque n autovettori linearmente indipendenti, lo spazio $\mathbb{R}^n$ si decompone nella somma diretta di sottospazi unidimensionali, corrispondenti ciascuno a un autovalore reale, o bidimensionali, corrispondenti ciascuno a una coppia complesso-coniugata; su ciascuno di tali sottospazi si hanno andamenti temporali analoghi a quelli visti precedentemente nel caso di $\mathbb{R}^2$.

Per quanto riguarda le proprietà di stabilità, del tutto in generale (cioè anche in presenza di autovalori multipli), si ha la seguente

Proposizione 1.4: *Si consideri l'equazione lineare $\dot{x} = Ax$ in $\mathbb{R}^n$. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa (positiva), allora l'origine è asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi). Se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa), allora l'origine è instabile per tempi positivi (negativi).*

La dimostrazione è immediata nel caso generico di autovalori distinti e non nulli (si scrive esplicitamente la soluzione generale, come combinazione lineare di quelle particolari indicate sopra). Per il caso generale, si veda un trattato sulle equazioni differenziali ordinarie o sulla teoria dei sistemi, ad esempio il già citato libro di Hirsch e Smale.

Resta poi il problema alquanto più delicato di stabilire il comportamento qualitativo dei sistemi nonlineari prossimi a quelli lineari qui considerati, in prossimità dei punti singolari, o, come si dice, localmente. Come si è già osservato sopra (si veda l'esercizio 1.7), la corrispondenza tra il comportamento dell'equazione nonlineare $\dot{x} = f(x)$ e quello della relativa equazione alle variazioni $\dot{x} = Ax$ non è sempre garantita. Tuttavia si può dimostrare che, nei casi considerati nella proposizione 1.4, le proprietà di stabilità del problema nonlineare coincidono con quelle del corrispondente problema lineare. Precisamente si ha la

Proposizione 1.5: *Si considerino l'equazione nonlineare $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, e la corrispondente equazione linearizzata $\dot{x} = Ax$ relativa a un punto singolare c . Allora, se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa (positiva), c è asintoticamente stabile per tempi positivi (negativi); se uno almeno degli autovalori ha parte reale positiva (negativa), c è instabile per tempi positivi (negativi).*

Per la dimostrazione si vedano, ad esempio, i testi sopra indicati. Anche in $\mathbb{R}^n$ si usa la terminologia di *pozzi e sorgenti*, per indicare i punti singolari in cui gli autovalori hanno tutti parte reale negativa o rispettivamente positiva. E' poi particolarmente significativa la classe dei punti singolari con autovalori tutti a parte reale non nulla, detti *punti iperbolici*: tale classe comprende dunque i pozzi e le sorgenti, ma ad esempio anche i punti di sella. Per i punti iperbolici si ha l'importante *teorema di Grobman-Hartman*, secondo il quale le orbite del sistema nonlineare e quelle del sistema linearizzato sono inviate localmente le une nelle altre da un omeomorfismo (stabilità strutturale locale dei punti iperbolici).

1.4 Le oscillazioni forzate

Come già si è accennato nel paragrafo introduttivo, capita spesso di aver a che fare con sistemi *non autonomi*, cioè con forze che dipendono esplicitamente dal tempo. Un esempio tipico è quello di un sistema oscillante soggetto a una forza che abbia carattere periodico; il modello più semplice è allora quello di un oscillatore armonico che obbedisce all'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t), \quad (1.35)$$

ove F è una funzione regolare periodica, di periodo T : $F(t+T) = F(t)$; la corrispondente pulsazione Ω è allora definita da $T = 2\pi/\Omega$. L'equazione (1.35), assieme a quella che si ottiene includendo un eventuale attrito viscoso,

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = F(t), \quad (1.36)$$

interviene in molte situazioni fisiche, in pratica ovunque vi siano sistemi vibranti, meccanici o elettrici. In questi due casi le corrispondenti equazioni omogenee associate sono lineari a coefficienti costanti: l'integrale generale si ottiene perciò come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, che già conosciamo, e di una soluzione particolare, che dobbiamo trovare.

1.4.1 Oscillatore armonico con forzante sinusoidale

Cominciamo con lo studio del caso semplice di attrito nullo e F sinusoidale, precisamente

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C \cos \Omega t, \quad \Omega \geq 0, \quad (1.37)$$

ove C è una costante, e consideriamo innanzitutto il caso generico

$$\Omega^2 \neq \omega^2.$$

In tal caso si trova facilmente una soluzione particolare con la stessa pulsazione del termine forzante, $x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$; infatti, si verifica subito che questa è una soluzione se $\varphi = 0$ e $(\omega^2 - \Omega^2)A = C$. L'integrale generale della (1.37) è allora

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (1.38)$$

con a e b costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali.⁴⁵⁾ Il moto risulta così sovrapposizione di due oscillazioni di frequenza ω e Ω (Fig. 15).

Se introduciamo esplicitamente i dati iniziali x_0, v_0 nella soluzione (1.38), è immediato verificare che risulta $a = x_0 - C/(\omega^2 - \Omega^2)$, $b = v_0/\omega$, e dunque si ottiene per la soluzione l'espressione

$$x(t) = \frac{C}{\omega^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega t) + x_1(t), \quad (1.39)$$

⁴⁵⁾ In particolare, per $\Omega = 0$ si ha l'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = C$, con soluzione $x(t) = \frac{C}{\omega^2} + a \cos \omega t + b \sin \omega t$, in cui la soluzione particolare è quella di equilibrio $x = \frac{C}{\omega^2}$.

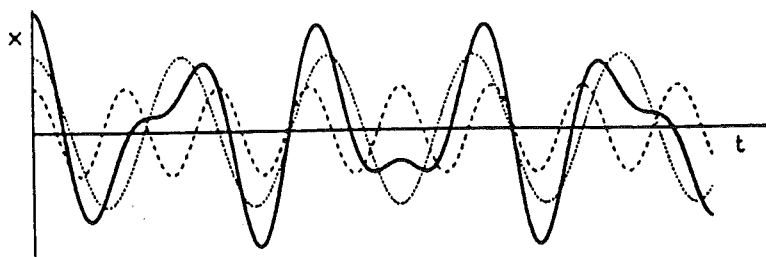


Fig. 1.15
Le oscillazioni forzate

avendo indicato con

$$x_l(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

il moto libero, che vi sarebbe con le medesime condizioni iniziali in assenza di forzante. Questa espressione è interessante perché mostra la soluzione come sovrapposizione del moto libero e di un termine aggiuntivo, indipendente dai dati iniziali dell'oscillatore e proporzionale all'ampiezza C del termine forzante; questo termine rappresenta dunque le *oscillazioni forzate*, dovute alla forza oscillante $F(t) = C \cos \Omega t$.

La (1.39) può anche essere utilizzata per studiare il caso $\Omega = \omega$ (caso *risonante*, con risonanza 1-1). Ad ogni t fissato, infatti, la (1.39) ammette limite per $\Omega \rightarrow \omega$, precisamente (regola dell'Hospital)

$$x(t) = \frac{C}{2\omega} t \sin \omega t + x_l(t). \quad (1.40)$$

Inoltre tale limite è soluzione dell'equazione (1.37) per $\Omega = \omega$. La verifica diretta è immediata; tuttavia ciò è garantito a priori dal teorema di esistenza e unicità, nella parte relativa alla continuità della soluzione rispetto alla variazione dei parametri, in questo caso Ω . Si noti che la continuità per $\Omega \rightarrow \omega$ non traspare invece dalla (1.38), ove son tenuti fissi non i dati iniziali, ma le costanti a e b .

L'espressione (1.40) mostra che, per $\Omega = \omega$, l'ampiezza delle oscillazioni cresce indefinitamente, cosicché il comportamento asintotico per $t \rightarrow \infty$ è qualitativamente diverso dal caso $\Omega \neq \omega$ (e ciò non è in contrasto con il teorema di esistenza e unicità, perché questo garantisce la continuità rispetto ai parametri per ogni tempo *fissato*). E' questo l'esempio più semplice di un fenomeno importante, chiamato *risonanza*; con questo nome ci si riferisce, in generale, alla presenza di rapporti razionali tra le frequenze che intervengono in un sistema (qui $\Omega/\omega = 1$), e agli effetti spesso "drammatici" che ne conseguono. L'effetto della risonanza è, in questo caso, la presenza nella soluzione di un termine non periodico o *secolare*, importante soprattutto per tempi lunghi (la ricerca di eventuali termini secolari, associati alle risonanze, è uno dei temi dominanti della meccanica celeste a cavallo tra '700 e '800).

E' interessante analizzare la soluzione (1.39) in prossimità della risonanza, ovvero quando $\Omega \simeq \omega$, $\Omega \neq \omega$. Limitiamoci a considerare il caso con dati iniziali $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$; dall'identità trigonometrica $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$, si vede che

tale soluzione si può allora scrivere nella forma

$$x(t) = -\frac{2C}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \frac{\Omega + \omega}{2} t \sin \frac{\Omega - \omega}{2} t.$$

E' allora utile introdurre le pulsazioni $\bar{\omega}$ ed ε definite da $\bar{\omega} = \frac{\Omega + \omega}{2}$, $\varepsilon = \frac{\Omega - \omega}{2}$. Infatti, se $|\Omega - \omega| \ll \Omega + \omega$ si ha allora $\bar{\omega} \simeq \omega$, $|\varepsilon| \ll \bar{\omega}$, cioè si hanno due pulsazioni caratteristiche di cui una è "grande" (è la frequenza tipica del sistema) e l'altra è "piccola" (*disaccordo* o *detuning*). E' dunque significativo riscrivere la soluzione nella forma

$$x(t) = A(t) \sin \bar{\omega} t, \quad A(t) = \frac{C}{2\bar{\omega}} \frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon t,$$

in cui la soluzione appare come un'oscillazione *modulata*, cioè il prodotto di un'oscillazione relativamente rapida (*portante*) di pulsazione $\bar{\omega}$, per una "ampiezza lentamente variabile" $A(t)$ (*modulante*). È questo il fenomeno dei *battimenti*, tipico della sovrapposizione di oscillazioni di frequenza poco diversa, e comunemente usato per accordare gli strumenti musicali: si percepisce il battimento della modulante, il cui periodo diventa sempre più lungo al decrescere del disaccordo (il battimento "scompare" quando le due frequenze sono "praticamente uguali"). La Fig. 16 illustra il fenomeno dei battimenti, e il passaggio alla risonanza esatta quando, per $\Omega \rightarrow \omega$ (cioè $\varepsilon \rightarrow 0$), il periodo dell'oscillazione lenta tende all'infinito, mentre l'ampiezza dell'oscillazione modulata cresce linearmente col tempo.

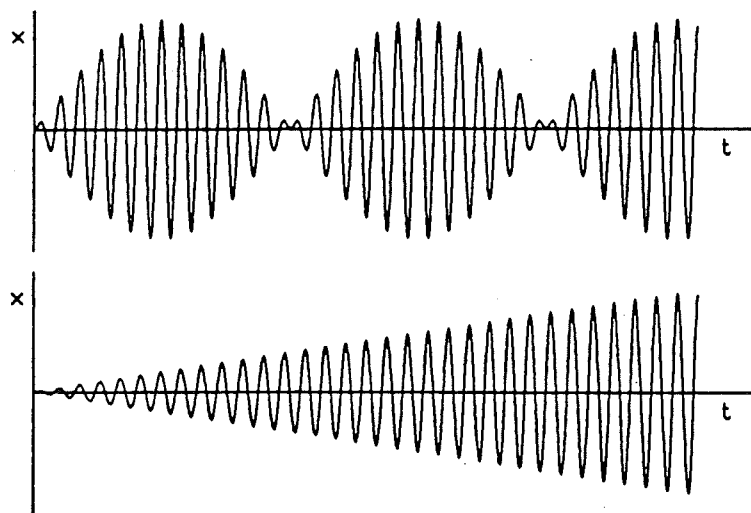


Fig. 1.16
Battimenti e risonanza

1.4.2 Oscillazioni forzate con attrito viscoso

Abbiamo sopra visto che per un oscillatore armonico non smorzato, forzato con un termine sinusoidale, l'ampiezza delle oscillazioni può essere molto elevata quando le due frequenze sono vicine, e addirittura diverge (per $t \rightarrow \infty$) nel caso di risonanza.

Tale comportamento singolare scompare, come ora vedremo, in presenza di attrito viscoso.

Consideriamo dunque l'equazione

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = C \cos \Omega t \quad \omega, \mu > 0. \quad (1.41)$$

Cerchiamo ancora una soluzione particolare armonica con la stessa frequenza del termine forzante, cioè della forma

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (1.42)$$

con A e φ costanti da determinare; procedendo per sostituzione, con banali calcoli si ottiene che A e φ sono determinati dalle equazioni

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega^2)A \cos \varphi - 2\mu\Omega A \sin \varphi &= C \\ (\omega^2 - \Omega^2)A \sin \varphi + 2\mu\Omega A \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

(infatti, si ottiene un'equazione del tipo $\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t = 0$, sicché deve essere $\alpha = 0, \beta = 0$). Queste equazioni sono risolte da

$$A = \frac{C}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}}, \quad \tan \varphi = -\frac{2\mu\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (1.44)$$

con determinazione dell'angolo tra $-\pi$ e 0 . Si osservi che la soluzione trovata ha significato anche in caso di risonanza, $\Omega = \omega$; in tal caso è $\varphi = -\pi/2$. Per ricavare la soluzione (1.44) si può naturalmente procedere nella maniera più elementare, cioè ottenere A quadrando e sommando, e poi ottenere $\tan \varphi$ dalla seconda;⁴⁶⁾ chi ha una minima esperienza di geometria, riconosce che si deve determinare una rotazione di un angolo φ che porti a sovrapporre al vettore $(C, 0)$ il vettore $((\omega^2 - \Omega^2)A, 2\mu\Omega A)$; dall'uguaglianza dei moduli dei due vettori segue allora la prima delle (1.44), dalla seconda delle (1.43) si ottiene $\tan \varphi$, e dalla posizione dei due vettori si riconosce $\varphi \in [-\pi, 0]$. Alla soluzione (1.42) così ottenuta, si deve ovviamente aggiungere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (1.41); questo termine tuttavia non è molto interessante, almeno per tempi lunghi (o, come si suol dire, *a regime*), perché, come si è visto trattando l'oscillatore armonico smorzato, esso tende a zero per $t \rightarrow +\infty$.

La (1.44) mostra a colpo che, al variare di ω , l'ampiezza A ha un massimo per $\omega = \Omega$ e che tale massimo vale $C/(2\mu\Omega)$, e dunque è tanto più elevato quanto più piccolo è il coefficiente di attrito. Inoltre, lo sfasamento φ , al variare di ω e Ω , varia con continuità tra 0 e $-\pi$ (lo sfasamento è sempre negativo, ossia le oscillazioni ritardano rispetto alla forza agente). Ancora, la divergenza di A a regime, per $\mu \rightarrow 0$ in risonanza, corrisponde al fatto che per $\mu = 0$ in risonanza le oscillazioni forzate hanno ampiezza che cresce indefinitamente col tempo.

- **Esercizio 1.8:** si studi l'andamento dell'ampiezza A per fissato ω al variare di Ω .

⁴⁶⁾ La determinazione dell'angolo si ottiene, ad esempio, ricavando $\cos \varphi$ dalla seconda, e sostituendo nella prima.

- **Esercizio 1.9:** si scriva l'integrale generale della (1.41) per $\Omega = \omega$ e $\mu < \omega$, facendo riferimento esplicito ai dati iniziali x_0 e v_0 . Si osservi che per $\mu \rightarrow 0$ a t fissato non vi sono divergenze, ma si riottiene la (1.40).
- **Esercizio 1.10:** si determini il moto di un oscillatore armonico, con o senza attrito viscoso, soggetto a una forza dipendente dal tempo della forma seguente: (a) $F(t) = Ce^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$; (b) $F(t) = Ce^{-\lambda t} \cos \Omega t$; (c) $F(t) = Ct$, con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Applicazione: l'oscillatore forzato come "filtro".

E' innanzitutto evidente che se conosciamo n soluzioni particolari $x_1(t), \dots, x_n(t)$ della (1.35) o della (1.36), corrispondenti alle forzanti $F_1(t), \dots, F_n(t)$, allora $x(t) = x_1(t) + \dots + x_n(t)$ è soluzione della medesima equazione, corrispondente alla forzante $F(t) = F_1(t) + \dots + F_n(t)$. Consideriamo allora in particolare l'equazione (1.36), supponendo che $F(t)$ sia somma di n termini sinusoidali $F_k(t) = C_k \cos(\Omega_k t + \psi_k)$, $k = 1, \dots, n$. Con banale generalizzazione di quanto visto a proposito della (1.41), si vede che una soluzione particolare (anzi, la soluzione di regime) corrispondente al singolo termine F_k è $x_k(t) = A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k)$, ove

$$A_k = \frac{C_k}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2 + 4\mu^2 \Omega_k^2}}, \quad \varphi_k = \psi_k - \arctan \frac{2\mu \Omega_k}{(\omega^2 - \Omega_k^2)}$$

(la generalizzazione sta solo nella presenza della fase $\psi_k \neq 0$). La soluzione di regime della (1.36) corrispondente a $F(t) = F_1(t) + \dots + F_n(t)$ è allora sovrapposizione di n moti armonici, precisamente

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k).$$

Nel caso μ sia molto piccolo (rispetto a tutte le frequenze in gioco), l'ampiezza di ciascuno di questi moti dipende sensibilmente, oltre che dall'ampiezza C_k del corrispondente termine forzante, anche dalla frequenza propria ω dell'oscillatore: in particolare, per $\omega = \Omega_l$ (e ampiezze C_k non eccessivamente diverse tra loro), risulta $A_l \gg A_k$, $k \neq l$, cosicché $x(t)$ segue praticamente la sola forzante F_l . In questa particolare situazione di risonanza, l'oscillatore si comporta come un filtro, che risponde selettivamente (tanto più selettivamente, quanto più piccolo è μ) alle sollecitazioni esterne, può selezionarne una, e ad esempio seguirne il lento variare dell'ampiezza nel tempo. Sostanzialmente su questo principio si basano i circuiti di sintonia dei comuni apparecchi radio (alla manopola della sintonia corrisponde la variazione di ω ; il lento variare dell'ampiezza della forzante è il segnale che si vuol ricevere.)

1.4.3 Il caso di una generica forzante periodica

Consideriamo ora l'equazione (1.35), $\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$, nel caso in cui F sia una generica funzione periodica, di periodo $T = 2\pi/\Omega$. Come è noto, sotto modeste

condizioni di regolarità (per le quali si rinvia ai testi di analisi) F può essere sviluppata in *serie di Fourier*:

$$F(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t + \psi_k), \quad (1.45)$$

e la serie converge uniformemente nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Consideriamo dapprima il caso di non risonanza, cioè in cui sia $\omega \neq k\Omega$, $k = 1, 2, 3 \dots$. Procedendo come si è fatto nel paragrafo precedente, e ricordando che la convergenza uniforme garantisce la derivabilità termine a termine della serie, otteniamo per l'equazione (1.35) la soluzione particolare

$$x(t) = \frac{C_0}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\omega^2 - k^2\Omega^2} \cos(k\Omega t + \psi_k),$$

per la quale la convergenza uniforme è ancora garantita. Aggiungendo a questa l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, troviamo l'integrale generale della (1.36); introducendo esplicitamente le condizioni iniziali, questo si scrive, come è facile verificare,

$$x(t) = x_l(t) + \frac{C_0}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\omega^2 - k^2\Omega^2} \left[\cos(k\Omega t + \psi_k) - \cos(\omega t + \psi_k) + \left(\frac{k\Omega}{\omega} - 1 \right) \sin \omega t \sin \psi_k \right].$$

Se invece, per un particolare valore di k , vale la relazione di risonanza $k\Omega = \omega$, allora compare il termine secolare

$$\frac{C_k}{2\omega} t \sin(\omega t + \psi_k),$$

che per tempi lunghi diventa dominante, anche se la costante C_k è piccola; si comprende così il ruolo delicato delle risonanze nel determinare la soluzione del sistema.

Esattamente allo stesso modo possiamo trattare il caso di attrito viscoso, cioè l'equazione (1.36) $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = F(t)$ con $F(t)$ periodica di periodo $T = 2\pi/\Omega$. In corrispondenza di ogni termine della serie di F abbiamo una soluzione particolare $x_k(t) = A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k)$, con

$$A_k = \frac{C_k}{\sqrt{(\omega^2 - k^2\Omega^2)^2 + 4k^2\mu^2\Omega^2}}$$

$$\varphi_k = \psi_k - \arctan \frac{2\mu k\Omega}{\omega^2 - k^2\Omega^2};$$

sommando queste soluzioni troviamo la soluzione di regime della (1.36):

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k).$$

Se per un valore di k risulta $\omega = k\Omega$, il termine corrispondente ha ampiezza $A_k = C_k/(2\mu\omega)$, ed esso è grande, per piccolo attrito, se C_k non è troppo piccolo.

A questo proposito è importante ricordare una proprietà notevole dei coefficienti di Fourier C_k di una funzione periodica $F(t)$: precisamente, quanto più regolare è F , tanto più rapidamente decrescono, con k , i suoi coefficienti di Fourier C_k : in particolare, se F è analitica, allora si ha $|C_k| \leq D e^{-\lambda k}$, con opportune costanti $D, \lambda > 0$. In pratica, in presenza di attrito viscoso, solo le risonanze con k basso giocano un ruolo rilevante. Invece, in totale assenza di attrito, tutte le risonanze sono importanti, anche se la risonanza relativa a un certo indice k diventa rilevante solo a tempi che crescono con k ; infatti essa diviene rilevante quando si ha $|C_k|t > 1$, ovvero $t > D^{-1} e^{\lambda k}$, che è un tempo lunghissimo per k elevato.

1.4.4 Cenni al caso di forzante non periodica

Ci limitiamo a considerare la sola equazione (1.35), senza però supporre che $F(t)$ sia periodica in t . Il proposito è quello di scrivere la soluzione in forma analoga alla (1.39), cioè come somma dell'oscillazione libera che si avrebbe in assenza di forzante, e di un contributo (che risulterà anche qui indipendente dai dati iniziali) dovuto al termine forzante. A tale scopo sostituiamo all'equazione del secondo ordine (1.35) una coppia di equazioni del primo ordine, per le variabili complesse $z(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t)$ e $w(t) = \dot{x}(t) - i\omega x(t)$. Tali equazioni risultano disaccoppiate, e si possono risolvere separatamente: risulta infatti $\dot{z} = \bar{z} + i\omega z$, e dunque, usando la (1.35) per sostituire $\bar{z}$ e raccogliendo $i\omega$, si ha

$$\dot{z} = i\omega z + F(t); \quad (1.46)$$

allo stesso modo si trova $\dot{w} = -i\omega w + F(t)$. Se tuttavia F e i dati iniziali sono reali, allora le variabili z e w , e le rispettive equazioni, sono l'una la complesso-coniugata dell'altra: perciò per risolvere la (1.35) è sufficiente considerarne una sola, ad esempio la (1.46), scrivendo poi $x(t) = \omega^{-1} \text{Im } z(t)$.

Per $F = 0$ la soluzione della (1.46), corrispondente al dato iniziale $z_0 = v_0 + i\omega x_0$, è $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$, come si verifica immediatamente; non è poi difficile verificare che per F qualsiasi la soluzione della (1.46), corrispondente al medesimo dato iniziale z_0 , è data da⁴⁷⁾

$$z(t) = e^{i\omega t} \left[z_0 + \int_0^t e^{-i\omega s} F(s) ds \right];$$

in forma reale, è facile vedere che si ha allora

$$x(t) = x_l(t) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t F(s) \sin[\omega(t-s)] ds.$$

In questo modo la soluzione della (1.46) è riportata a una *quadratura*, cioè all'esecuzione di un integrale ordinario (operazione questa sostanzialmente più elementare della risoluzione di un'equazione differenziale, anche se F è complicata e l'integrale non si sa scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari). Questa soluzione è

⁴⁷⁾ La deduzione si può ottenere con il classico *metodo di variazione delle costanti*. Avendo in mente la soluzione $z_0 e^{i\omega t}$ corrispondente a $F = 0$, si ricerca una soluzione della forma $z(t) = \zeta(t) e^{i\omega t}$; si trova allora $\dot{\zeta} = F(t) e^{-i\omega t}$, e quindi $\zeta(t)$ per integrazione.

precisamente della forma che stavamo cercando. Maggiori informazioni sulla soluzione possono aversi soltanto a seguito di particolari scelte di F .

Una buona trattazione delle oscillazioni forzate, comprendente il caso (bellissimo) di oscillatori forzati non lineari, e anche equazioni non autonome del tipo $\ddot{x} + \omega^2(1 + \epsilon \cos \Omega t)x = 0$ (che conducono all'interessante fenomeno della *risonanza parametrica*), si può trovare nel testo di Landau e Lifšitz.⁴⁸⁾ Equazioni, lineari o meno, ove un parametro varia lentamente nel tempo (ad esempio $\ddot{x} + \omega^2(\epsilon t) \sin x = 0$, con $\omega(\tau)$ assegnata e ϵ piccolo) conducono invece all'importantissimo fenomeno, ancora oggetto di ricerca, degli *invarianti adiabatici*, interessante anche in relazione alla quantizzazione dei sistemi di oscillatori. Per questo fenomeno si rimanda ai testi di V.I. Arnold più volte citati.

1.5 Cicli limite e oscillazioni di rilassamento

1.5.1 Un semplice esempio di ciclo limite

Il pendolo matematico non descrive adeguatamente il comportamento di un pendolo reale, perché si deve tener conto dello smorzamento (dovuto all'aria e ad altri attriti) che lo frena; per bilanciare questo effetto occorre dunque un meccanismo che fornisca sistematicamente dell'energia. Un altro aspetto considerevole è il fatto che nel pendolo matematico si ha un continuo di moti periodici, il cui periodo dipende tuttavia dall'ampiezza delle oscillazioni, mentre per un orologio si richiede che esso presenti un solo periodo, eventualmente regolabile con un parametro esterno; inoltre occorre che l'orologio si porti rapidamente ad oscillare con quel periodo, in maniera largamente indipendente dalla particolare scelta dei dati iniziali. Occorre pertanto che il sistema dinamico descrivente un orologio presenti un'orbita periodica "isolata", e che questa "attragga" i movimenti che partono abbastanza vicini. A orbite di questo tipo fu dato da Poincaré il nome di *ciclo limite*.⁴⁹⁾ Il più semplice esempio è forse quello di un modello non differenziabile, introdotto da A. Andronov, A. Vitt e S. Khaikin, *Theory of oscillators* (Pergamon Press, 1960). Si tratta di un oscillatore armonico debolmente smorzato, forzato impulsivamente, come ora passiamo a descrivere.

Ricordiamo che l'oscillatore armonico debolmente smorzato $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2x = 0$, con $0 < \mu < \omega$, è il prototipo di fuoco stabile: nel piano delle fasi (x, v) l'orbita cade spiraleggiando sull'origine. L'orbita dunque non è periodica come nel caso $\mu = 0$ (oscillatore armonico); l'intervallo di tempo $T = \frac{2\pi}{\sigma}$, con $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, è tuttavia ancora significativo, perché proprio con tale periodo l'orbita attraversa ogni se-

⁴⁸⁾ L. Landau e E. Lifšitz, *Fisica teorica I; Meccanica*, Editori Riuniti (Roma).

⁴⁹⁾ Le medesime proprietà devono evidentemente presentarsi anche nei circuiti oscillanti con cui funzionano ad esempio le radio. Per questo motivo uno dei più famosi esempi di equazioni con ciclo limite è quello di Van der Pol, descritto più avanti, che fu proprio introdotto per descrivere circuiti oscillanti.

miasse uscente dall'origine, ad esempio quello delle velocità positive⁵⁰); ma l'ampiezza (distanza dall'origine) decresce costantemente, e precisamente in maniera esponenziale, come mostra la soluzione analitica:

$$x(t) = e^{-\mu t} A \cos(\sigma t + \varphi), \quad v(t) = -e^{-\mu t} [\mu \cos(\sigma t + \varphi) + \sigma \sin(\sigma t + \varphi)].$$

Dunque l'orbita attraversa il semiasse delle velocità positive a tempi $t_n = nT$, nei punti di ordinata $v_n = a^n v_0$, con $a = e^{-T} < 1$.

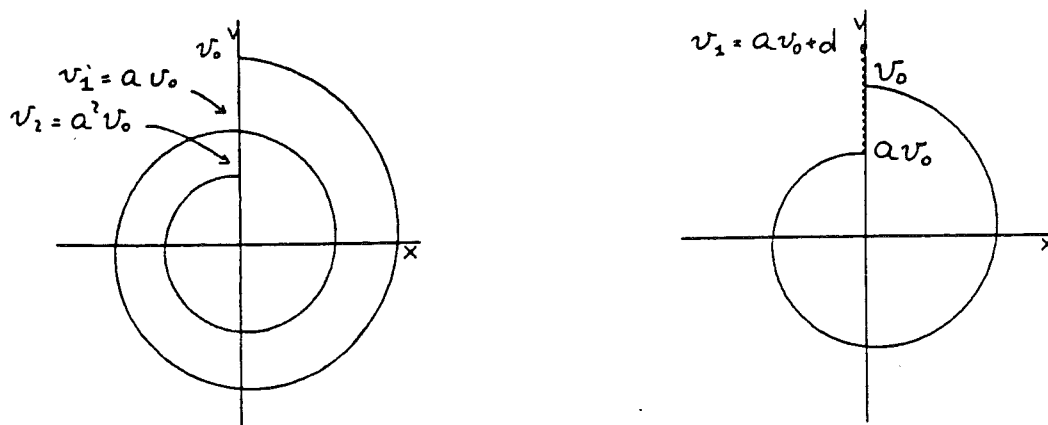


Fig. 1.17

L'oscillatore debolmente smorzato, forzato impulsivamente

Aggiungiamo ora al sistema una forzante impulsiva, che agisce nel modo seguente: nell'istante in cui l'orbita nello spazio delle fasi attraversa il semiasse positivo delle velocità (cioè il punto materiale passa in $x = 0$ con velocità positiva), si trasmette all'oscillatore un impulso istantaneo positivo, che ne incrementa la velocità di una quantità fissa $d > 0$; l'idea è che l'oscillatore subisca un urto da un dispositivo liberato proprio dal passaggio di x sullo zero (meccanismo di scappamento dell'orologio).⁵¹ Così al primo passaggio si avrà la velocità av_0 prima dell'urto, e la velocità $v_1 = av_0 + d$ dopo l'urto; al secondo passaggio si ha $av_1 = a(av_0 + d)$ prima dell'urto, e $v_2 = av_1 + d = a(av_0 + d) + d$ dopo l'urto, e così via. Si ha in tal modo una trasformazione $v' = f(v)$, definita da

$$f(v) = av + d, \quad 0 < a < 1, \quad d > 0, \quad a = e^{-T} \quad (1.47)$$

tra la velocità v al generico passaggio e la velocità v' al passaggio successivo (mappa di Poincaré, o Poincaré - mapping).

⁵⁰) Questo fatto viene confermato in maniera più significativa in virtù semplicemente della linearità dell'equazione, quando si sappia che l'orbita interseca almeno due volte un semiasse. Infatti, sia $x_0 = (0, v_0)$ il dato iniziale nel piano delle fasi e sia $x_1 = (0, v_1)$ il punto dopo il periodo T , con $v_1 = av_0$, $0 < a < 1$, (dunque $x_1 = ax_0$). Allora per la linearità dell'equazione, se $x(t)$ è la soluzione relativa al dato iniziale x_0 , segue che $\bar{x}(t) = ax(t)$ è la soluzione relativa al dato iniziale $x_1 = ax_0$, e poiché $x(T) = ax_0$, segue che $\bar{x}(T) = a^2 x_0$.

⁵¹) Si osservi che la forzante non è periodica a priori, come per le oscillazioni forzate; la periodicità è invece creata dalla dinamica stessa del sistema.

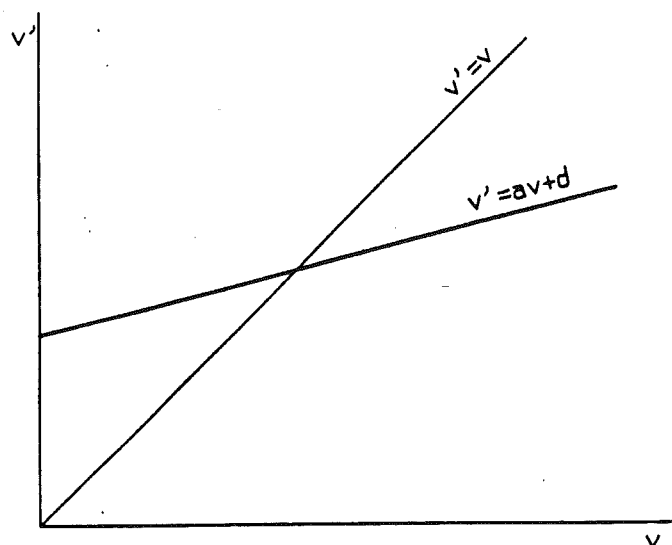


Fig. 1.18
La trasformazione di Poincaré

L'analisi delle orbite indotte da questa trasformazione è elementare. Anzitutto esiste per la trasformazione un unico punto fisso $\bar{v}$, soluzione di $f(v) = v$, ovvero intersezione della retta $v' = f(v)$ con la bisettrice $v' = v$; a tale punto fisso corrisponde un'orbita periodica nello spazio delle fasi. Si stabilisce poi senza difficoltà che tale punto è un attrattore globale, cioè che ogni punto iniziale "vi cade sopra" (s'intende, in un numero infinito di iterazioni). A tal fine basta studiare la successione $\{v_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ definita da $v_{n+1} = f(v_n)$, ovvero

$$v_{n+1} = av_n + d. \quad (1.48)$$

- **Esercizio 1.11:** Si dimostri che per ogni v_0 la successione $\{v_n\}$ definita sopra converge al limite $\bar{v} = d/(1 - a)$.

Esiste un bel metodo grafico per stabilire la convergenza al punto fisso in maniera qualitativa (Fig. 19). Si parte da un arbitrario v_0 , ci si sposta verticalmente fino alla curva $v' = f(v)$, si trasla orizzontalmente fino a incontrare la bisettrice (in questo modo si riporta in ascissa il valore $v_1 = f(v_0)$), ci si sposta ancora verticalmente fino alla curva, si trasla orizzontalmente fino alla bisettrice, e così via. Si noti che tale metodo grafico non fa mai uso della linearità della trasformazione $v' = f(v)$, e può essere pertanto esteso per determinare le orbite $\{v_n\}$ per ogni trasformazione $v' = f(v)$.

- **Osservazione.** La trasformazione (1.48) è frutto di una schematizzazione in parte azzardata: oscillatore esattamente armonico, smorzamento esattamente lineare, salto di velocità d indipendente da v_n . E' chiaro tuttavia che nessuna di queste ipotesi è essenziale: delle piccole variazioni non modificano l'aspetto qualitativo del fenomeno, che, come mostra il metodo grafico, si basa su poche proprietà qualitative della funzione f . In particolare, basta assumere che sia

$f(0) > 0$ e $|f'(v)| \leq a < 1$, perché la trasformazione $v_{n+1} = f(v_n)$ ammetta un unico punto fisso attrattivo (si usa il teorema della contrazione).

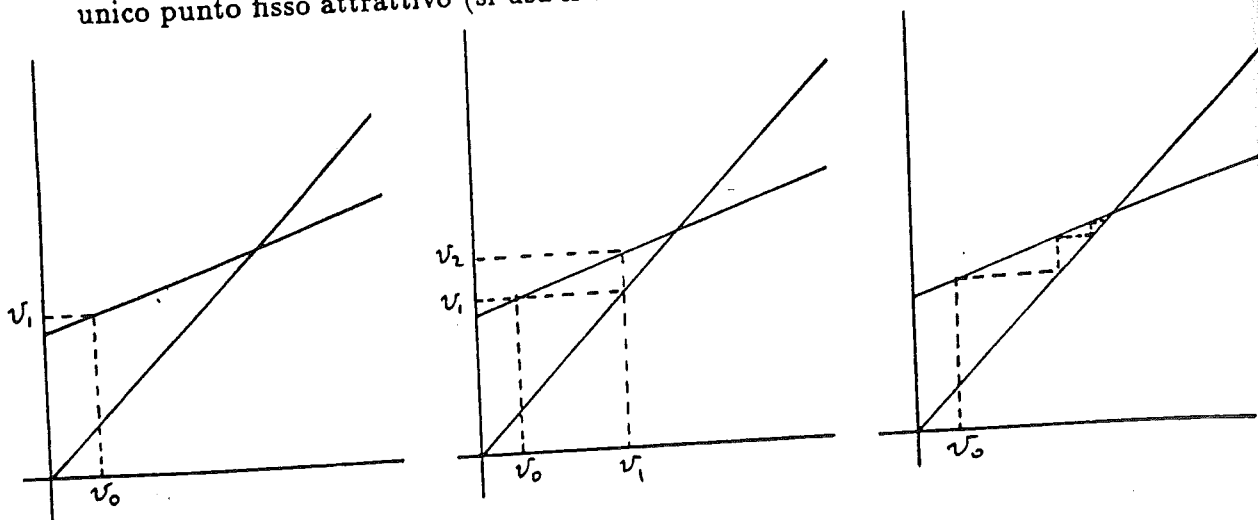


Fig. 1.19

Metodo grafico per lo studio dell'orbita

1.5.2 Studio qualitativo dell'equazione di Van der Pol *forzata*

Consideriamo l'equazione non lineare di Van der Pol⁵²⁾

$$\ddot{x} + \mu \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \mu > 0; \quad (1.49)$$

il coefficiente di $\dot{x}$ è positivo per $x > a$ (attrito ordinario), negativo per $x < a$ (attrito negativo). L'equazione contiene tre parametri: a che ha le dimensioni di x , e μ e ω che hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo. Come già si è accennato nel primo paragrafo, è possibile eliminare due di questi parametri, semplicemente scegliendo unità di misura opportune, e ridursi a un unico parametro rilevante, precisamente il rapporto tra μ e ω . Formalmente si effettua la sostituzione $x = ax'$ (cioè si usa a come unità di misura per x ; x' risulta adimensionale), e si introduce il tempo $t' = \omega t$, cosicché $\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}$ (cioè si usa ω^{-1} come unità di tempo; t' risulta adimensionale). Tralasciando gli apici, ed indicando ancora con punti le derivate rispetto a t' , si ottiene l'equazione di Van der Pol in forma adimensionale

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (1.50)$$

del tutto equivalente alla precedente, ove appare il solo parametro rilevante $\beta = \mu/\omega$.

Studieremo qui di seguito il sistema nell'approssimazione $\beta \gg 1$ (forte smorzamento) e poi nell'approssimazione $\beta \ll 1$ (debole smorzamento) con metodi euristici.

⁵²⁾ B. Van der Pol, *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, Radio Reviews, 1, 701-710 (1920).

Una dimostrazione rigorosa dell'esistenza di un ciclo limite unico, valida per ogni valore di β , è riportata nell'appendice D.⁵³⁾

a: Studio qualitativo del caso $\beta \gg 1$: oscillazioni di rilassamento

E' conveniente sostituire all'equazione del secondo ordine (1.50) un sistema di due equazioni del primo ordine, procedendo in modo un po' diverso dall'usuale. A questo scopo, dopo aver osservato che l'equazione si può scrivere nella forma $\frac{d}{dt} [\dot{x} + \beta(\frac{1}{3}x^3 - x)] = -x$, poniamo $\dot{x} + \beta(\frac{1}{3}x^3 - x) = \beta y$. L'equazione (1.50) è allora equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta(y - f(x)) \\ \dot{y} = -\beta^{-1}x, \end{cases} \quad (1.51)$$

ove si è posto $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Nel piano xy sono particolarmente significative due curve: la retta $x = 0$ (asse y), cui è legato il segno di $\dot{y}$, e la cubica γ di equazione $y = f(x)$, cui è legato il segno di $\dot{x}$, rappresentate in Fig. 20. Sulla curva γ si annulla $\dot{x}$: perciò essa è attraversata verticalmente, verso il basso per $x > 0$, e verso l'alto per $x < 0$.

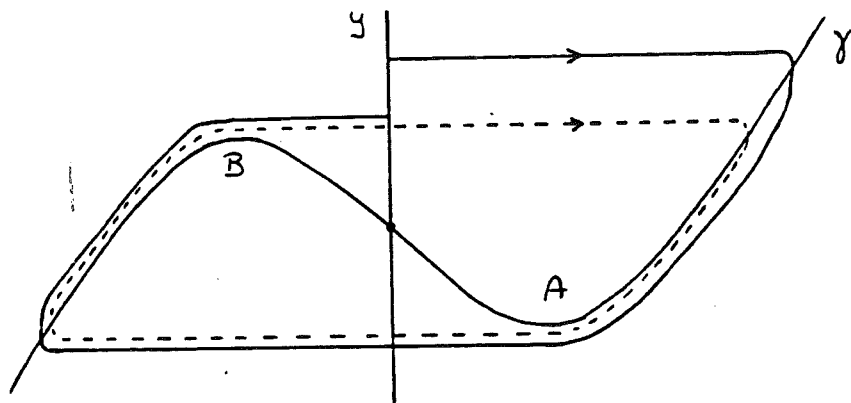


Fig. 1.20

La cubica γ relativa a $\dot{x} = 0$, e il ciclo limite

Sfruttiamo ora l'assunzione $\beta \gg 1$. In questo caso è chiaro che, al di fuori di un piccolo intorno di γ , le traiettorie sono praticamente parallele all'asse x : la pendenza infatti è data da

$$\alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\beta^{-2} \frac{x}{y - f(x)},$$

e dunque si ha $\alpha \sim \beta^{-2} \ll 1$ lontano da γ , mentre per avere $\alpha \sim 1$ o maggiore ($\dot{y}$ confrontabile con $\dot{x}$ o più grande) ci si deve restringere a un intorno di γ di spessore $\sim \beta^{-2}$. Concretamente, se prendiamo un dato iniziale come in Fig. 20, vediamo che con velocità grande, di ordine β , l'orbita va quasi orizzontalmente fino a γ , e solo in prossimità di γ essa comincia a deviare sensibilmente dall'orizzontale, fino ad

⁵³⁾ I metodi dell'analisi "non standard", in cui si trattano gli infinitesimi come elementi attuali, sono particolarmente indicati per una trattazione del caso con $\beta \gg 1$. Seguendo il metodo di E. Nelson, *Bull. Am. Math. Soc.*, (1977), la scuola francese di Strasburgo ha ottenuto brillanti risultati sull'equazione di Van der Pol.

attraversare γ verticalmente. L'orbita deve poi seguire "lentamente" γ , con velocità $\dot{x}$ e $\dot{y}$ entrambe di ordine β^{-1} , finché non giunge in prossimità del vertice A : è chiaro infatti che essa non può né riattraversare γ in verso contrario, né allontanarsi da γ verso il basso o verso destra, perché al di fuori di un piccolissimo intorno di γ , e sotto γ , le orbite sono ancora praticamente orizzontali, e dirette verso sinistra. Inoltre, in prossimità di A è $\dot{y} < 0$, mentre se l'orbita continuasse a seguire γ si dovrebbe avere $\dot{y} > 0$; dunque, oltrepassato A , l'orbita non può più seguire γ e se ne discosta: essa pertanto riprende il moto rapido orizzontale, questa volta rivolto verso sinistra, fino all'altro ramo della curva γ , dove si ha un nuovo attraversamento verticale (ora nel senso delle y crescenti). L'orbita segue poi nuovamente la curva γ fino a B , e torna orizzontalmente sul ramo destro di γ . Il moto tende così molto rapidamente a un andamento limite periodico, o ciclo limite. Si controlla immediatamente che il medesimo andamento limite si ha anche qualora si parta da destra della curva γ , o in prossimità dell'origine O .

In maniera alquanto descrittiva si usa dire che nel caso $\beta \gg 1$ si presentano una *foliazione rapida* (o stratificazione rapida, ingl. *fast foliation*) e una *varietà lenta* (*slow manifold*) (Fig. 21); si indica la foliazione rapida con una doppia freccia. Si osservi che la varietà lenta (la curva γ) non è una varietà invariante (non è una soluzione !); essa ha una parte attrattiva e una parte repulsiva (AOB).

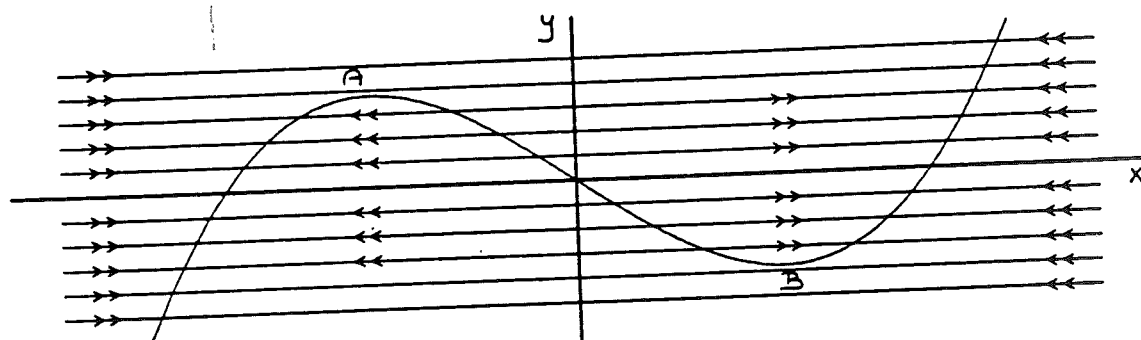


Fig. 1.21
Foliazione rapida e varietà lenta

- **Esercizio 1.12:** Trovare la foliazione rapida e la varietà lenta per l'oscillatore armonico con forte smorzamento, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$, $\mu \gg \omega > 0$.

Se ora ci interessiamo all'andamento del movimento $x(t)$ "a regime", cioè dopo il movimento iniziale transitorio in cui si va ad incontrare la curva γ , una semplice analisi mostra immediatamente che esso è della forma illustrata in Fig. 22, sicché il moto è pressoché periodico, ma procede "a balzi".

- b: Studio qualitativo del caso $\beta \ll 1$; introduzione alla teoria delle perturbazioni (principio della media)

Per $\beta = 0$ l'equazione di Van der Pol (1.50) si riduce a quella dell'oscillatore armonico $\ddot{x} + x = 0$, ovvero $\dot{x} = v, \dot{v} = -x$; per β piccolo si dice che essa ne è

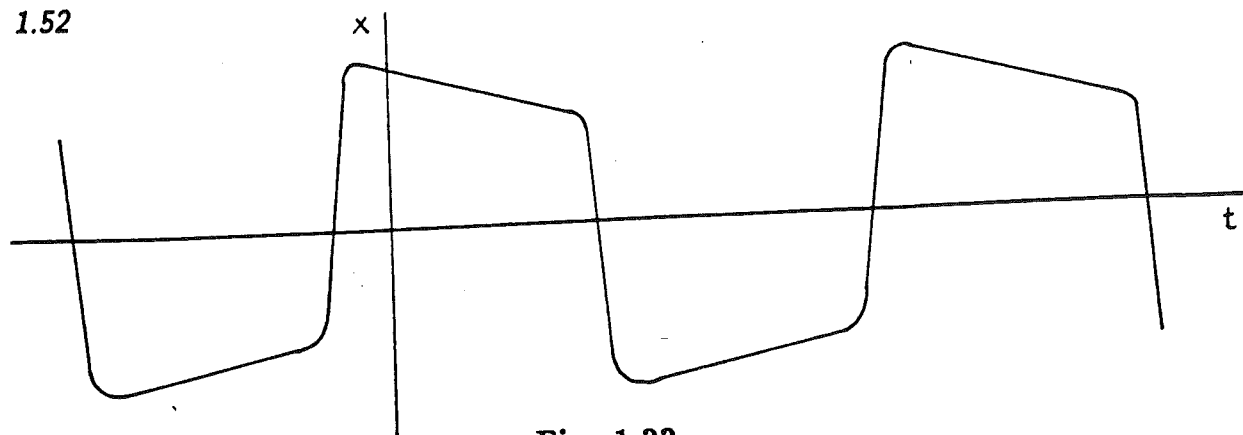


Fig. 1.22

Oscillazione di rilassamento, a balzi

una *perturbazione*. L'idea centrale per trattare il problema nel caso $\beta \ll 1$ consiste nell'osservare che in tal caso esistono, come vedremo, una *variabile lenta* e una *variabile veloce*, e che inoltre la variabile lenta è di maggiore interesse, mentre quella veloce è meno rilevante. Si rinuncia allora a una descrizione completa, che contiene una sovrabbondanza di informazioni, e ci si limita invece a una descrizione in un certo senso approssimata della variabile lenta, che è quella di maggiore interesse. E' questo dunque un primo esempio di un procedimento generale che può dirsi di *riduzione*⁵⁴, cui accenneremo nuovamente a proposito della meccanica statistica.

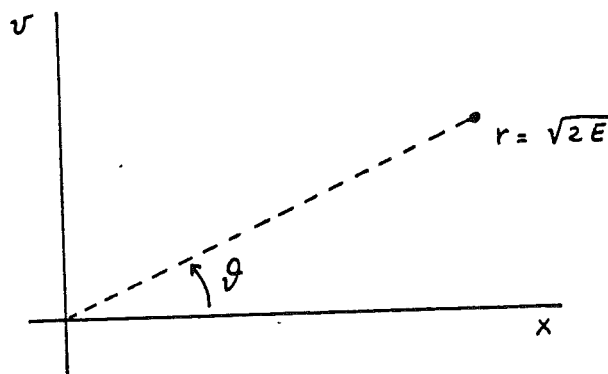


Fig. 1.23

La distinzione tra i due tipi di variabili, lenta e veloce, è spontanea nel caso limite $\beta = 0$. Infatti, nel caso dell'oscillatore armonico esiste una costante del moto che è proprio l'energia

$$E = \frac{1}{2}(v^2 + x^2), \quad (1.52)$$

ovvero, a meno del fattore 2, proprio il quadrato della distanza dall'origine nel piano (x, v) , $v \equiv \dot{x}$ (Fig. 23). È dunque naturale passare, nel piano delle fasi, dalle coordinate cartesiane (x, v) alle corrispondenti coordinate polari (r, θ) con $x = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, o equivalentemente alle variabili (E, θ) con $E = \frac{1}{2}r^2$. Allora sappiamo che

⁵⁴) Per una bella rassegna sul problema della descrizione ridotta in sistemi di equazioni differenziali, si veda N.G. van Kampen, *Elimination of fast variables*, Physics Reports 124, 96-160 (1985).

per E vale $\dot{E} = 0$, mentre per θ si deduce subito $\dot{\theta} = -1$,⁵⁵⁾ e dunque abbiamo per $\beta = 0$ le equazioni

$$\begin{cases} \dot{E} = 0 \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \quad (1.53)$$

Se dunque ora usiamo le stesse coordinate anche per l'equazione di Van der Pol completa, con $\beta \neq 0$, è evidente⁵⁶⁾ che si ottiene un sistema della forma

$$\begin{cases} \dot{E} = \beta f(E, \theta) \\ \dot{\theta} = -1 + \beta g(E, \theta) \end{cases} \quad (1.54)$$

con opportune funzioni $f(E, \theta)$, $g(E, \theta)$. Si mostra subito che vale⁵⁷⁾

$$f(E, \theta) = -2E \sin^2 \theta (2E \cos^2 \theta - 1), \quad (1.55)$$

mentre $g(E, \theta)$ ha una certa espressione che qui non ci importa determinare.⁵⁸⁾

Non è difficile dimostrare che che il sistema (1.54) ammette un moto periodico attrattivo. A tal fine, consideriamo un dato iniziale (E_0, θ_0) , e sia E_1 il successivo valore di E , dopo che θ ha compiuto esattamente un giro riprendendo il valore θ_0 (si osservi che, per β piccolo, θ ha segno costante). In questo modo si definisce una applicazione $E_1 = F_\beta(E_0)$ (mappa di Poincaré della semiretta $\theta = \theta_0$ in sé), e per iterazione si ottengono poi $E_2, E_3, \dots$, con $E_{i+1} = F_\beta(E_i)$. Mostriamo che, se β è sufficientemente piccolo, allora esiste un punto fisso $E^*(\beta)$ per la mappa F_β (corrispondente a un moto periodico del sistema), e che inoltre, per ogni fissato $E_0 \neq 0$ e β sufficientemente piccolo, la successione $E_1, \dots, E_n, \dots$ converge verso $E^*(\beta)$ (ovvero tale moto è attrattivo).

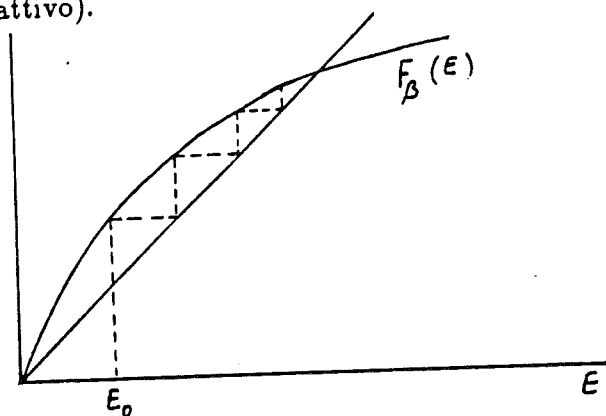


Fig. 1.24

⁵⁵⁾ Infatti, da $\tan \theta = v/x$ si ottiene $\dot{\theta}/\cos^2 \theta = (\dot{v}x - v\dot{x})/x^2 = -(x^2 + v^2)/x^2 = -1/\cos^2 \theta$.

⁵⁶⁾ In realtà ci si potrebbero aspettare termini ulteriori, di ordine β^2 , che di fatto non ci sono (e la cui presenza sarebbe comunque ininfluente).

⁵⁷⁾ Si è già mostrato che per un'equazione della forma $\ddot{x} = -V'(x) + F_2(x, \dot{x})$, per l'energia $E = T + V$ si ottiene $\dot{E} = \dot{x}F_2$; qui è $F_2 = -\beta(x^2 - 1)\dot{x}$, e dunque $\dot{E} = -\beta\dot{x}^2(x^2 - 1)$, da cui segue subito la formula data.

⁵⁸⁾ Si trova comunque facilmente $g = \sin \theta \cos \theta (2E \cos^2 \theta - 1)$.

A tale scopo (questo è il punto importante) non risulta necessario conoscere esattamente la mappa F_β , ma è sufficiente calcolarla al primo ordine in β . Questo calcolo è facile: detto infatti T_β il tempo trascorso nel passaggio da E_i a E_{i+1} , se indichiamo con $E(t, \beta)$, $\theta(t, \beta)$ il moto (incognito) in tale intervallo di tempo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E_{i+1} - E_i &= \beta \int_0^{T_\beta} f(E(t, \beta), \theta(t, \beta)) dt \\ &= \beta \int_0^{2\pi} f(E_i, \theta_0 - t) dt + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= -2\beta E_i \int_0^{2\pi} \sin^2 t (2E_i \cos^2 t - 1) dt + \mathcal{O}(\beta^2), \end{aligned}$$

avendo usato le ovvie relazioni $E(t, \beta) = E_i + \mathcal{O}(\beta)$, $\theta(t, \beta) = \theta_0 - t + \mathcal{O}(\beta)$, $T_\beta = 2\pi + \mathcal{O}(\beta)$ (che sono conseguenza del teorema di esistenza e unicità, nella parte della continuità delle soluzioni al variare dei parametri). Eseguendo l'integrale si trova allora⁵⁹⁾

$$E_{i+1} - E_i = -2\pi\beta E_i(E_i - 1) + \mathcal{O}(\beta^2), \quad (1.56)$$

ovvero

$$F_\beta(E) = E - 2\pi\beta E(E - 1) + \mathcal{O}(\beta^2),$$

che è il risultato cercato.

L'andamento qualitativo di F_β è rappresentato in Fig. 24; è evidente che, per E limitato e per β sufficientemente piccolo, il termine $\mathcal{O}(\beta^2)$ è del tutto irrilevante. Procedendo come per l'orologio meccanico, si vede bene che F_β ammette, oltre all'origine, un solo punto fisso $E^* = 1 + \mathcal{O}(\beta)$, che è attrattivo, come richiesto, mentre l'origine è instabile.

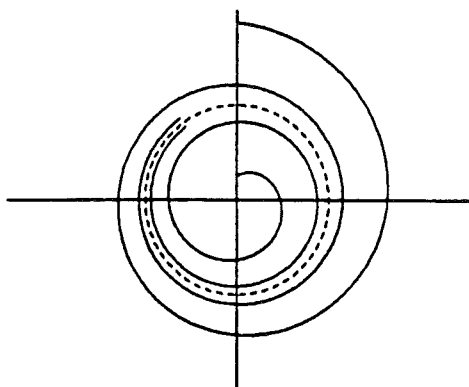


Fig. 1.25

- **Osservazione (principio della media).** Al medesimo risultato si giunge in modo rapido applicando il cosiddetto *principio della media*, che è il cuore della teoria delle perturbazioni. Il fatto fondamentale (che con evidenza è anche alla

⁵⁹⁾ Il calcolo esplicito dell'integrale è in realtà irrilevante; si vede immediatamente che si ha $E_{i+1} - E_i = -\beta E_i(aE_i - b) + \mathcal{O}(\beta^2)$, con due costanti positive a, b , e questo basta.

base della dimostrazione data sopra) è che $\dot{E}$ è di ordine β (ovvero, come già si è detto, E è una *variabile lenta*), mentre θ è di ordine 1 (cioè θ è una *variabile veloce*). E' allora sensato (ma la validità dell'approssimazione è, in generale, un argomento assai delicato) sostituire all'equazione vera (1.54) per la variabile lenta la corrispondente equazione "mediata sulla variabile veloce", ovvero l'equazione che si ottiene sostituendo a $f(E, \theta)$ la sua media $\bar{f}(E)$ lungo un periodo del moto imperturbato di θ , $\bar{f}(E) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(E, \theta - t) dt$. Si ottiene in questo modo un'equazione chiusa per la sola variabile E , precisamente, eseguendo l'integrale (che significativamente è lo stesso calcolato prima)

$$\dot{E} = -\beta E(E - 1).$$

Questa equazione è coerente, a meno di termini $O(\beta^2)$, con la (1.56), cui essa conduce per integrazione nell'intervallo di tempo $(0, 2\pi)$; da essa è particolarmente evidente l'esistenza di un punto fisso attrattivo (basta guardare il segno di $\dot{E}$). Il principio della media è il cuore della teoria perturbativa fin dai tempi di Lagrange; sulla sua giustificazione teorica non possiamo qui soffermarci ulteriormente.⁶⁰⁾

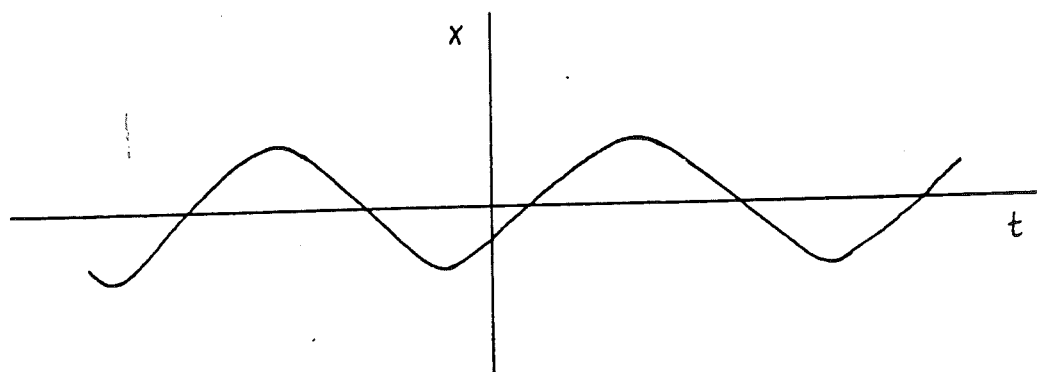


Fig. 1.26

In conclusione, ritornando alle variabili (x, v) , possiamo allora affermare che, per β piccolo, esiste una curva invariante prossima al cerchio $x^2 + v^2 = 2$ (corrispondente al valore $E^* = 1$); su tale curva ha luogo un moto periodico, e inoltre essa attrae ogni altra soluzione (con $E \neq 0$); si veda la Fig. 25. Si noti che la curva $x(t)$, in questo caso di piccolo smorzamento, ha andamento periodico "liscio", tendente per $\beta \rightarrow 0$ alla sinusoidale $x(t) = \sqrt{2} \cos(\theta_0 - t)$ (Fig. 26), ben dissimile da quello "a salti" relativo al caso $\beta \gg 1$.

⁶⁰⁾ Si veda V.I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti (Roma); e *Metodi geometrici della teoria delle equazioni differenziali ordinarie*, Cap. 3., Editori Riuniti (Roma, 1989); Freidlin e Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems* (Springer, 1984).

APPENDICE A

Una funzione di Ljapunov per l'oscillatore armonico smorzato

Dall'equazione del moto

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

si ricava subito che l'energia (per unità di massa)

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

segue la legge $\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x} = (\ddot{x} + \omega^2 x)\dot{x} = -2\mu\dot{x}^2 \leq 0$; ciò non basta però a dimostrare la stabilità asintotica dell'origine, perché $\dot{E}$ si annulla su tutta la retta $\dot{x} = 0$, e non solo nell'origine. Consideriamo allora, in luogo di E , la seguente funzione:

$$\mathcal{W}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(E + F), \quad F = \frac{1}{2}[(\dot{x} + 2\mu x)^2 + \omega^2 x^2]$$

(si osservi che per $\mu = 0$ risulta $\mathcal{W} = E$). Si vede facilmente che $\mathcal{W}$ è una buona funzione di Ljapunov: infatti $\mathcal{W}$ si annulla nell'origine, ed è positiva altrove, mentre risulta

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &= (\dot{x} + 2\mu x)(\ddot{x} + 2\mu\dot{x}) + \omega^2 x\dot{x} \\ &= (\dot{x} + 2\mu x)(-\omega^2 x) + \omega^2 x\dot{x} = -2\mu\omega^2 x^2, \end{aligned}$$

e pertanto, ricordando $\dot{E} = -2\mu\dot{x}^2$, si ha

$$\dot{\mathcal{W}} = \frac{1}{2}(\dot{E} + \dot{F}) = -2\mu(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2);$$

si vede così che $\mathcal{W}$ soddisfa la condizione b') del teorema di Ljapunov. Ciò basta a concludere che l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

La costruzione di $\mathcal{W}$ si basa sulla scelta, per così dire, indovinata di F , che è una specie di energia (nome che in verità si potrebbe dare a tutte le funzioni che per $\mu = 0$ si riducono ad E), la cui dissipazione però è proporzionale a $\dot{x}^2 + \omega^2 x^2$ anziché a $\dot{x}^2$. Si potrebbe vedere che vi sono realizzazioni dell'equazione dell'oscillatore armonico smorzato in circuiti elettrici, per le quali risulta più naturale assegnare ad F , anziché ad E , il nome di energia.

Un'interpretazione puramente matematica di F è suggerita dalla seguente considerazione. Poiché l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato può scriversi nella forma $\frac{d}{dt}(\dot{x} + 2\mu x) = -\omega^2 x$, è spontaneo considerare la variabile $y = \omega^{-1}(\dot{x} + 2\mu x)$; si vede allora immediatamente che y segue la medesima equazione di x , cioè $\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0$, e che la sua "energia" $\frac{1}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2)$ coincide con F .

APPENDICE B

Studio dei punti singolari per autovalori nulli o coincidenti

Aggiungiamo qui poche considerazioni sul comportamento del sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (1.57)$$

quando il punto $(\text{Tr } A, \det A)$, rappresentativo della matrice A nel diagramma di biforcazione, si trova sull'asse $\det A = 0$ oppure sulla parabola $(\text{Tr } A)^2 - 4\det A = 0$; in quest'ultimo caso comprenderemo anche l'origine $\text{Tr } A = \det A = 0$.

a) La curva $\det A = 0$.

La trattazione è semplice, perché (al pari dei nodi e dei punti di sella) la matrice A è diagonalizzabile: più precisamente, in questo caso esistono due autovalori reali $\lambda_1 = \text{Tr } A$ e $\lambda_2 = 0$, e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ (che certamente sono indipendenti) si possono prendere reali. Il sistema ammette allora le soluzioni particolari $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}_1$, $\lambda \equiv \lambda_1$, e $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_2$, combinando le quali si ottiene l'integrale generale nella forma

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda t} \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2.$$

La direzione di $\mathbf{u}_1$ è dilatante o contraente, a seconda del segno di $\lambda = \text{Tr } A$; la direzione di $\mathbf{u}_2$ è neutra, e l'asse $\mathbf{u}_2$ si decompone in un continuo di punti singolari. Si hanno pertanto i ritratti in fase tracciati in Fig. 27.

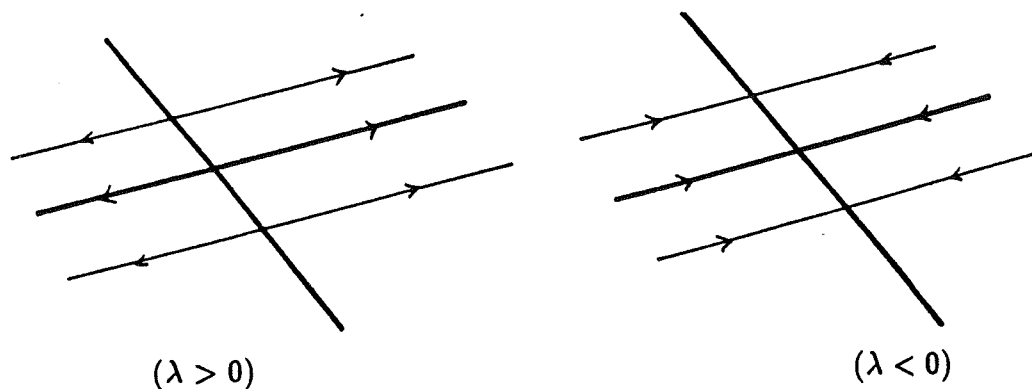


Fig. 1.27

Per $\lambda > 0$ l'origine è punto di equilibrio instabile per tempi positivi, mentre per $\lambda < 0$ tale punto è stabile (ma non asintoticamente stabile); il comportamento ovviamente si inverte per tempi negativi.

- **Osservazione.** La stabilità può venir meno, o mutarsi in stabilità asintotica, non solo per variazioni arbitrariamente piccole di $\det A$ (passaggio a nodo o a colle), ma anche semplicemente aggiungendo alla (1.57) termini non lineari: per

convincersene basta considerare l'esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = ax_2^3 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

con evidenza si ha stabilità asintotica per $a < 0$, e instabilità per $a > 0$.

b) La curva $(\text{Tr } A)^2 - 4 \det A = 0$.

Questo caso è più delicato perché vi sono due autovalori coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = \frac{1}{2} \text{Tr } A$, e di conseguenza, in generale, la matrice A non possiede due ma un solo autovettore (il secondo esiste solo nel caso particolare in cui A sia multipla dell'identità, $A = \lambda I$). Un esempio di tali matrici è dato da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

il vettore $u = (1, 0)$ è autovettore con autovalore λ , e per $a \neq 0$ non ne esistono altri (indipendenti da u). Possiamo limitarci a trattare questo caso: si vede infatti immediatamente che ad esso ci si può sempre ricondurre con un banale cambio di coordinate, precisamente una rotazione che porti l'asse x_1 a coincidere con la direzione di u (l'elemento di matrice A_{21} è allora necessariamente nullo, e sulla diagonale compaiono i due autovalori coincidenti).⁶¹⁾

Siamo così condotti a considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

La seconda equazione si risolve immediatamente, e dà

$$x_2(t) = x_2^0 e^{\lambda t};$$

la prima diviene allora un'equazione lineare forzata, precisamente $\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2^0 e^{\lambda t}$, e se ne trova facilmente la soluzione (ad esempio con il metodo di variazione delle costanti), precisamente

$$x_1(t) = (x_1^0 + ax_2^0 t) e^{\lambda t}.$$

L'andamento qualitativo di tali curve è riportato in Fig. 28, per $a > 0$ (il caso $a < 0$ è lasciato come esercizio).

Si osservi che le traiettorie sono tangenti nell'origine al vettore u_1 . Il comportamento è in un certo senso intermedio tra quello del fuoco e quello del nodo; al pari di questi due casi si ha la stabilità asintotica nel futuro per $\lambda = \frac{1}{2} \text{Tr } A < 0$, nel passato per $\text{Tr } A > 0$.

Infine per $a = 0$ la matrice A è proporzionale all'identità, pertanto ogni vettore u è autovettore, e ogni semiretta uscente dall'origine è invariante; l'andamento è quello riportato in Fig. 29 (*nodo a stella*).

⁶¹⁾ Anzi, per $a \neq 0$, il riscaldamento $x_2 = a^{-1} x_2'$ conduce alla forma ancor più particolare (forma di

Jordan) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

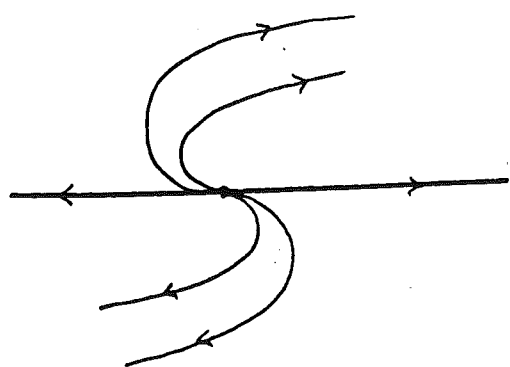
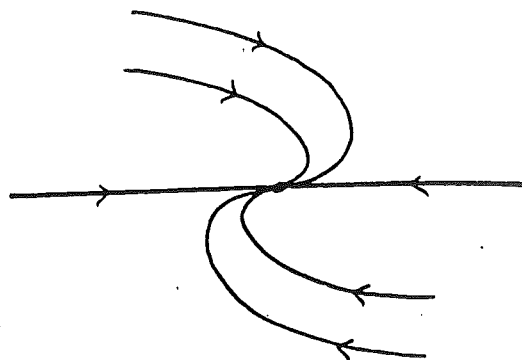
 $(\lambda > 0)$  $(\lambda < 0)$

Fig. 1.28

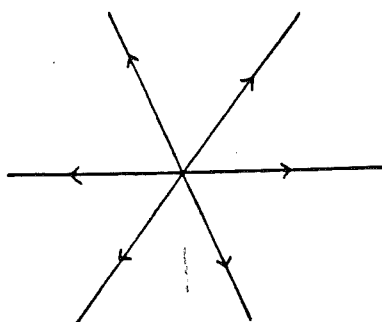
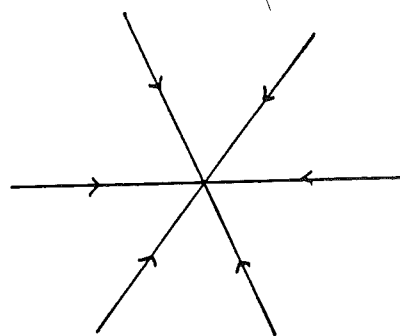
 $(\lambda > 0)$  $(\lambda < 0)$

Fig. 1.29

Resta da considerare l'origine del diagramma di biforcazione, ovvero matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

cui ci si può sempre ricondurre nel modo indicato sopra. Per $a = 1$ si ha il caso ben noto del moto libero, per $a \neq 0$ qualsiasi si vede immediatamente che il comportamento è sostanzialmente identico⁶²⁾ (il caso $a = 0$ è evidentemente banale); in ogni caso l'asse x_1 si decompone in un continuo di punti singolari. Il sistema lineare è instabile sia per tempi positivi che per tempi negativi, ma il comportamento può mutare per aggiunta di termini non lineari.

- **Esercizio 1.13:** si trovino degli esempi di sistemi non lineari con A della forma (1.58), tali che si abbia: (a) stabilità per tutti i tempi; (b) stabilità non asintotica per soli tempi positivi; (c) stabilità asintotica per tempi positivi.

⁶²⁾ Come già indicato, al caso $a = 1$ ci si può sempre riportare con un riscalamento dell'asse x_2 .

APPENDICE C

Alcuni esempi significativi di biforcazione

Scopo di questa appendice è di illustrare alcuni semplici esempi in cui, al variare di un parametro, cambia la natura di un punto singolare di un'equazione differenziale. L'analisi sarà fatta con riferimento alla matrice A che descrive il sistema linearizzato attorno a un punto singolare.

Il più semplice esempio è forse quello dell'equazione $\ddot{x} + ax = 0$, che descrive un oscillatore armonico per $a > 0$ e un repulsore armonico per $a < 0$; il caso intermedio corrispondente al valore eccezionale (chiuso di biforcazione) $a = 0$ descrive invece la particella libera. L'origine del piano delle fasi x, v è sempre un punto di equilibrio, che è un centro per $a > 0$ e un colle per $a < 0$.⁶³⁾

Diamo ora alcuni esempi di biforcazione, scelti tra i più significativi.

a) Biforcazione "a forchetta"⁶⁴⁾

Si consideri l'equazione del moto

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x. \quad (1.59)$$

Una semplice interpretazione di tale equazione è suggerita dalla Fig. 30: un pendolo semplice (di lunghezza l) è soggetto, oltre che al peso, a una forza elastica esercitata da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, un estremo della quale è scorrevole sull'asse orizzontale, disposto in modo che la molla sia sempre verticale. La risultante di tali forze è allora $(-mg + l \cos x)k$ (essendo k il versore verticale ascendente); procedendo in modo elementare si ottiene subito, in luogo dell'equazione del pendolo, la (1.59), con $\omega^2 = \frac{g}{l}$ e $\Omega^2 = \frac{k}{m}$. Un'altra possibile interpretazione della (1.59) è quella del *pendolo in campo centrifugo* (detto anche *regolatore di Watt*), ovvero un pendolo posto al centro di una piattaforma rotante con velocità angolare Ω costante: il termine $\Omega^2 \sin x \cos x$, che si aggiunge all'equazione del moto del pendolo, è dovuto in questo caso alla "forza centrifuga", che bisogna introdurre per poter scrivere l'equazione di Newton nel sistema di riferimento rotante (si veda il Cap. 2).

L'equazione (1.59) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x, \end{cases} \quad (1.60)$$

⁶³⁾ E' molto istruttivo comprendere in questo caso come il diverso comportamento qualitativo sia compatibile con la dipendenza continua delle soluzioni dai parametri, garantita dal teorema di esistenza e unicità. Si tratta del fatto che la dipendenza continua non è uniforme rispetto al tempo.

⁶⁴⁾ Inglese *pitchfork*, forcone.

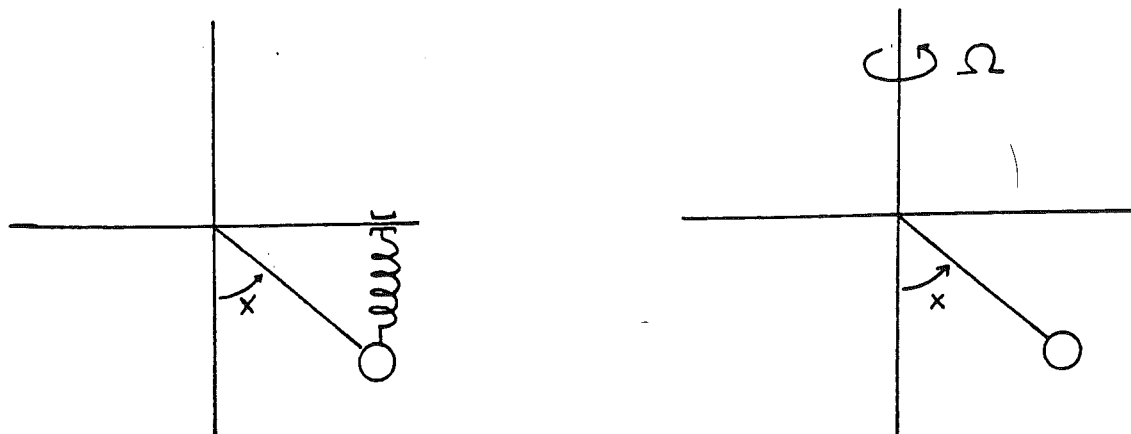


Fig. 1.30

Due dispositivi meccanici che realizzano l'equazione (1.59)

ed è evidente che l'origine del piano x, v è punto di equilibrio per tutti i valori dei parametri. Si trova poi immediatamente

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 - \omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

e pertanto l'origine è un centro per $\Omega^2 < \omega^2$, e un colle per $\Omega^2 > \omega^2$.

E' interessante a questo punto cercare tutti i punti di equilibrio del sistema (1.60); essi sono caratterizzati da $v = 0$, e x tale che sia

$$(-\omega^2 + \Omega^2 \cos x) \sin x = 0.$$

Questa equazione è risolta da $x_1 = 0$ e $x_2 = \pi$, che annullano $\sin x$ e corrispondono ai consueti punti di equilibrio del pendolo, e inoltre da $x_{3,4} = \pm \arccos \frac{\omega^2}{\Omega^2}$; pertanto vi sono in tutto quattro possibili punti di equilibrio $c_i = (x_i, 0)$, $i = 1, \dots, 4$. Si osservi però che mentre c_1 e c_2 esistono per tutti i valori dei parametri, invece c_3 e c_4 compaiono solo per $\Omega^2 > \omega^2$, cioè esattamente quando l'origine c_1 è divenuta un colle; dall'espressione di $x_{3,4}$ si vede che, al crescere di Ω^2 oltre ω^2 , tali punti di equilibrio "escono" da c_1 , nel senso che entrambi tendono a c_1 quando $\Omega^2 \rightarrow \omega^2$. Non è difficile vedere, esaminando la matrice $A(c_{3,4})$, più precisamente il segno dell'elemento di matrice A_{21} , che essi sono centri per tutti i valori dei parametri per i quali esistono (invece c_2 è sempre un colle). Ciò corrisponde ad esaminare l'andamento qualitativo (la curvatura) dell'energia potenziale del sistema. In effetti, all'equazione (1.59) corrisponde l'energia potenziale (per unità di massa)

$$V(x) = -\omega^2 \cos x + \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2 x,$$

e si controlla facilmente che il grafico dell'energia potenziale ha le due forme rappresentate in Fig. 31 (con i corrispondenti ritratti in fase), per $\Omega^2 < \omega^2$ (a) e $\Omega^2 > \omega^2$ (b).

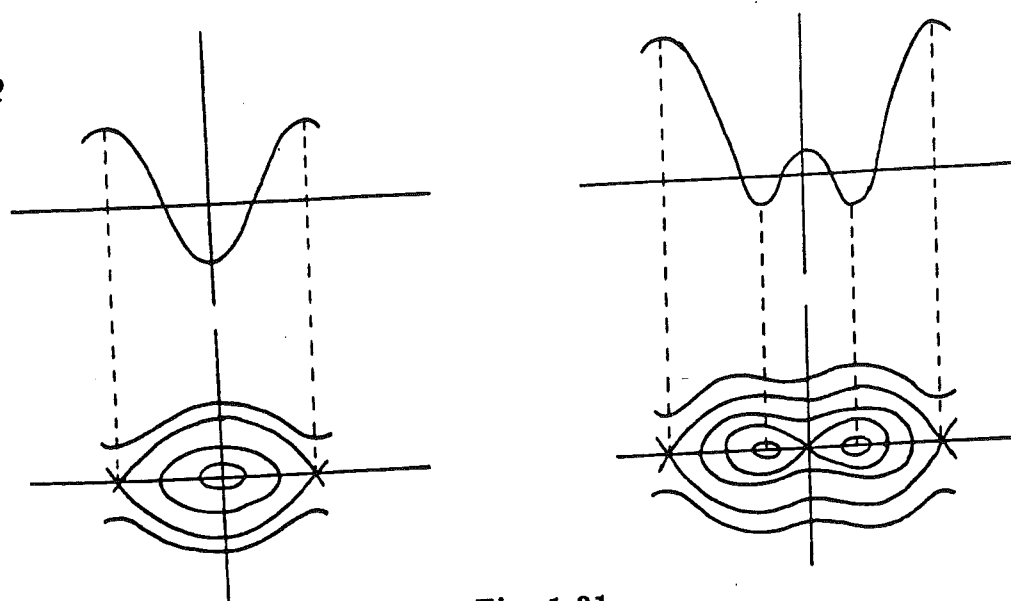


Fig. 1.31

Potenziale e ritratto in fase per l'equazione (1.59): (a) $\Omega^2 < \omega^2$; (b) $\Omega^2 > \omega^2$

Si dice in questo caso che nell'origine si presenta una biforcazione, perché l'andamento qualitativo cambia al variare di un parametro (qui il rapporto Ω^2/ω^2).⁶⁵⁾ Una rappresentazione sintetica della biforcazione dell'origine si ottiene riportando in un grafico (*grafico della biforcazione*) l'ascissa x ; dei diversi punti di equilibrio al variare di Ω^2/ω^2 . Tale grafico è riportato in Fig. 32a; le curve continue e tratteggiate corrispondono rispettivamente ai punti di equilibrio stabili e instabili.⁶⁶⁾ Tale biforcazione prende il nome di *biforcazione a forchetta* (*pitchfork bifurcation*).

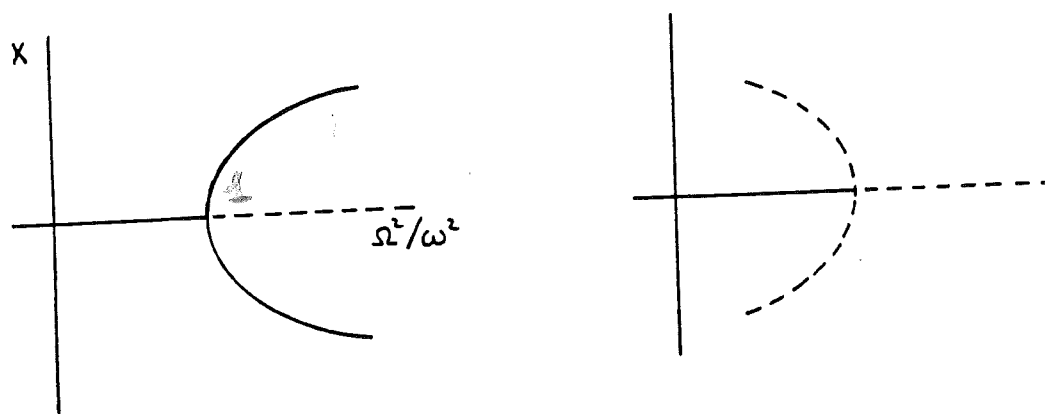


Fig. 1.32

Grafico della biforcazione a forchetta (a) diretta e (b) inversa

⁶⁵⁾ Chiaramente, nell'energia potenziale si può fattorizzare ω^2 , e questo fattore può venire riassorbito riscalandi i tempi.

⁶⁶⁾ Si vede facilmente che la distanza di c_3 e c_4 da c_1 è data da $d = \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)/\omega^2} + o(\omega^2 - \Omega^2)$; di conseguenza le curve rappresentative di c_3 e c_4 hanno tangente verticale al momento della biforcazione.

- **Esercizio 1.14:** Si trovi un sistema meccanico conservativo che dia luogo al grafico di biforcazione illustrato nella Fig. 32b (*biforcazione a forchetta inversa*).

b) Biforcazione "a forchetta" con dissipazione

L'esempio sopra riportato è caratteristico dei sistemi conservativi, per i quali si ha $\text{Tr } A = 0$, cosicché l'unica biforcazione possibile per un punto singolare consiste nell'attraversamento simultaneo delle curve $\Delta = 0$ e $\text{Tr } A = 0$ del diagramma di biforcazione, attraverso l'origine. Se però si esce dal mondo dei sistemi conservativi, si capisce che tale passaggio simultaneo è non generico. Ad esempio, se aggiungiamo al secondo membro della (1.59) un termine dissipativo $-\beta \dot{x}$, $\beta > 0$, allora i punti singolari sono ancora $c_1, \dots, c_4$ (all'equilibrio infatti il termine dissipativo si annulla); tuttavia ora si ha $\text{Tr } A = -\beta < 0$, e dunque la biforcazione si svolge in modo diverso. In particolare c_1 , che per $\Omega^2 = 0$ (e β piccolo) è un fuoco stabile, al crescere di Ω^2 dapprima attraversa la curva $\Delta = 0$ e biforca in un nodo stabile, poi attraversa la curva $\text{Tr } A = 0$ e biforca in un colle. Quanto a c_3 e c_4 , non sarebbe difficile vedere che, nel momento in cui nascono, essi sono nodi stabili, mentre successivamente, attraversando verso l'alto la curva $\Delta = 0$, diventano fuochi stabili.

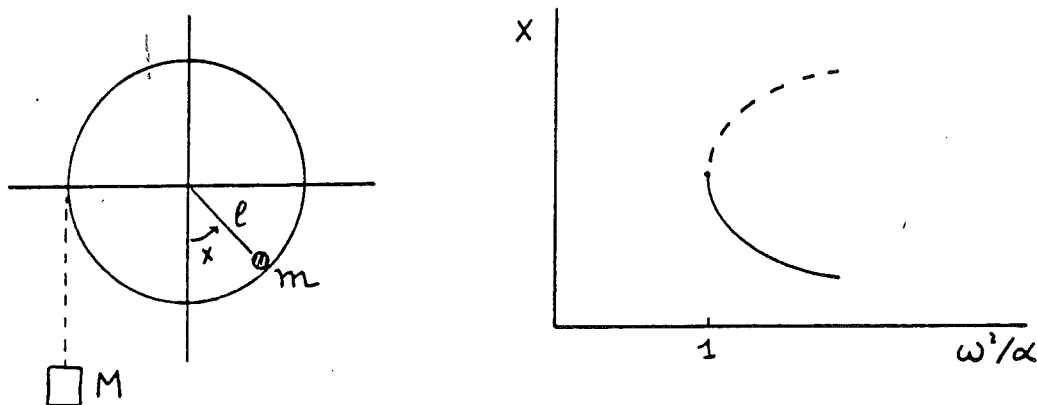


Fig. 1.33

Un dispositivo meccanico per la biforcazione tangente, e grafico della biforcazione

c) Biforcazione tangente, o nodo-sella o piega (fold)

Consideriamo ora l'equazione che si ottiene aggiungendo all'equazione del pendolo un termine costante, precisamente

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x + \alpha \quad (1.61)$$

(una possibile realizzazione è data dal dispositivo meccanico rappresentato in Fig. 33a, per il quale si ha $\omega^2 = \frac{m}{m+M} \frac{g}{l}$ e $\alpha = \omega^2 \frac{M}{m}$). In questo caso si vede immediatamente che non vi sono punti di equilibrio per $\omega^2 < |\alpha|$, mentre ve ne sono due, uno stabile e uno instabile, per $\omega^2 > |\alpha|$.

Anche la comparsa o scomparsa di punti di equilibrio al variare di un parametro è considerata una biforcazione; il suo grafico, per l'esempio che stiamo seguendo, è rappresentato in Fig. 33b. Tale biforcazione prende il nome di *biforcazione tangente*.⁶⁷⁾ L'esempio più elementare, nell'ambito generale delle equazioni del primo ordine, è dato da $\dot{x} = \varepsilon + x^2$.

- **Esercizio 1.15:** Si tracci il grafico del potenziale e il ritratto in fase per il sistema descritto dall'equazione (1.60).

d) Cenno alla biforcazione di Hopf

Come ultimo esempio di biforcazione, consideriamo l'attraversamento trasversale del semiasse positivo $\text{Tr } A$ nel diagramma di biforcazione. Tale fenomeno è possibile, ovviamente, solo per sistemi non conservativi. Un esempio banale è dato dall'oscillatore armonico smorzato, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$: tale sistema ha come unico punto singolare l'origine, che è un fuoco stabile per $0 < \mu < \omega$, e biforca in un fuoco instabile se μ diventa negativo. Un esempio più interessante, trattato in queste note (paragrafo 1.5.2 e appendice B), ci è offerto dall'equazione di Van der Pol $\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$; passando al sistema del primo ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x - \beta(x^2 - 1)v$ si ottiene immediatamente

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix};$$

pertanto, al passaggio di β attraverso lo zero, per valori crescenti, avviene una biforcazione dell'origine da fuoco stabile a fuoco instabile, come per l'oscillatore armonico smorzato. Contemporaneamente però, come abbiamo visto, accade un fenomeno non banale, precisamente dall'origine "esce" un ciclo limite stabile.

Si potrebbe vedere che, per una simmetria particolare dell'equazione,⁶⁸⁾ anche per $\beta < 0$ esiste un ciclo limite, però instabile (ovvero raggiunto per $t \rightarrow -\infty$), che per $\beta = 0$ collassa nell'origine. La presenza di un ciclo sia prima che dopo la biforcazione è tuttavia eccezionale: si dimostra infatti che, genericamente,⁶⁹⁾ esistono l'uno oppure l'altro, nel caso in cui (anche in più dimensioni) due autovalori complesso-coniugati attraversano trasversalmente l'asse immaginario (*teorema di Hopf*). Basta modificare di poco l'equazione di Van der Pol per rimuovere la simmetria, e ottenere il comportamento generico. Ad esempio, impiegando metodi analoghi a quelli utilizzati per l'equazione di Van der Pol nel caso di debole dissipazione, è facile convincersi che l'equazione $\ddot{x} + (x^2 - \beta)\dot{x} + x = 0$ possiede il solo ciclo stabile dopo la biforcazione (*biforcazione di Hopf diretta*), mentre se si cambia il segno davanti a x^2 si trova il solo

⁶⁷⁾ La ragione del nome si comprende facilmente tracciando il grafico di $f(x) = -\omega^2 \sin x + \alpha$ per i diversi valori di α .

⁶⁸⁾ Si verifica facilmente che se $x(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione di Van der Pol per un dato valore di β , allora anche $\tilde{x}(t) = x(-t)$ è soluzione dell'equazione con $\tilde{\beta} = -\beta$; pertanto, cambiare segno a β è equivalente a invertire il tempo. Tale simmetria esatta fa sì che l'equazione di Van der Pol sia non generica.

⁶⁹⁾ Anche il caso lineare dell'oscillatore armonico smorzato, privo di cicli, è evidentemente non generico.

ciclo instabile prima della biforcazione (*biforcazione di Hopf inversa*). La biforcazione di Hopf è rappresentata simbolicamente nella Fig. 34.

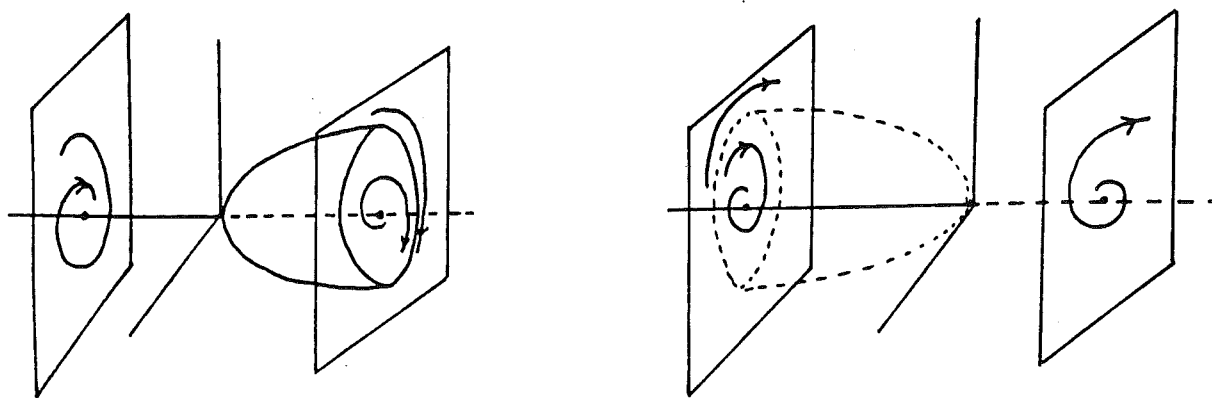


Fig. 1.34
Biforcazioni di Hopf diretta e inversa