Soluzioni 8/6/2007 Farmacia

~~Problema svolto 4.8~~ Es.1

La figura 4.17 mostra le rampe utilizzate per il salto motociclistico che attualmente detiene il record del mondo, stabilito da Jason Renie nel 2002. L'altezza H delle rampe è 3,00 m. L'angolo θ_R vale 12,0° e la distanza D è di 77,0 m. Assumendo che la motocicletta sia atterrata a metà della rampa di discesa e trascurando gli effetti dell'aria, calcolate la velocità di decollo.

SOLUZIONE Considerare motocicletta e pilota come un proiettile è la idea chiave: prendendoli come un unico corpo puntiforme possiamo applicare l'equazione per i proiettili.

Decollo. Poniamo l'origine delle coordinate xy alla base della rampa sotto il punto di stacco: al momento dello stacco avremo $x_0 = 0$ e $y_0 = H = 3{,}00$ m. L'angolo di lancio è quello della rampa e quindi $\theta_0 = \theta_R = 12{,}0°$ (vedere la figura 4.17b).

Atterraggio. Dalla figura 4.17c riconosciamo che la discesa lungo la rampa è L, ipotenusa di un triangolo rettangolo. Renie atterrò a metà e quindi a distanza $L/2$ lungo la rampa. Facile dimostrare che il punto di atterraggio si trova ad altezza $H/2$ e in corrispondenza della metà, $d/2$, del cateto orizzontale della rampa. Il punto d'atterraggio ha pertanto coordinata verticale data da

$$y = \frac{H}{2} = \frac{3{,}00 \text{ m}}{2} = 1{,}50 \text{ m}.$$

Il cateto orizzontale d'appoggio della rampa è

$$d = \frac{H}{\tan\theta_R} = \frac{3{,}00 \text{ m}}{\tan 12{,}0°} = 14{,}11 \text{ m}.$$

La coordinata orizzontale è quindi data da

$$x = D + \frac{d}{2} = 77.0 \text{ m} + \frac{14{,}11 \text{ m}}{2} = 84{,}1 \text{ m}.$$

Velocità di stacco v_0. Con l'equazione 4.21 abbiamo una relazione tra v_0 e lo spostamento orizzontale $x - x_0$:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (v_0 \cos\theta_0)t, \\ 84{,}1 \text{ m} - 0 &= (v_0 \cos 12{,}0°)t. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Non possiamo risolverla rispetto a v_0 perché il tempo di volo t è ignoto. Consideriamo allora il movimento verticale. L'equazione 4.22 lega v_0 allo spostamento verticale $y - y_0$:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ 1{,}50 \text{ m} - 3{,}00 \text{ m} &= (v_0 \sin 12{,}0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Anche questa equazione non può fornirci direttamente il valore di v_0

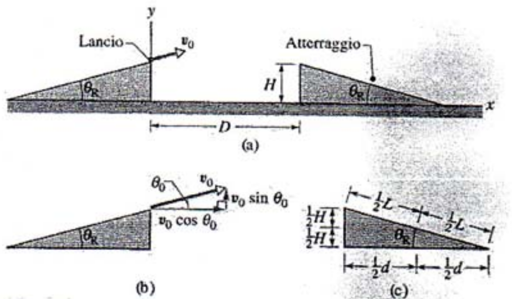


Figura 4.17 Problema svolto 4.8. (a) Le rampe di lancio e di atterraggio per i salti motociclistici, ove $\mathbf{v}_0$ è la velocità di stacco. (b) La velocità di stacco $\mathbf{v}_0$ (con angolo di lancio θ_0) ha componente x pari a $v_0 \cos\theta_0$ e componente y pari a $v_0 \sin\theta_0$. (c) Il punto di atterraggio supposto a metà della rampa di discesa.

perché di nuovo non conosciamo t, ma insieme all'equazione precedente forma un sistema con medesime incognite. Possiamo ricavare t dalla (4.32),

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0},$$

e sostituirla nella (4.33), eliminando così t:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= (v_0 \sin\theta_0)\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2 = \\ &= (x - x_0)\tan\theta_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}, \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso dell'identità $\tan\theta = (\sin\theta)/(\cos\theta)$. Introducendo i dati si ottiene

$$1{,}50 \text{ m} - 3{,}00 \text{ m} = (84{,}1 \text{ m})(\tan 12{,}0°) + \\ - \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(84{,}1 \text{ m})^2}{2v_0^2(\cos 12{,}0°)^2},$$

ossia

$$v_0 = 43{,}2 \text{ m/s} = 156 \text{ km/h}.$$

Già decollare da una rampa a tale velocità dev'essere terrificante. Renie andava sicuramente più veloce al decollo perché noi abbiamo trascurato la resistenza dell'aria.

~~Problema svolto 15.2~~ ES. 2

Per $t = 0$ lo spostamento $x(0)$ di ~~un oscillatore~~ lineare come quello della figura 15.5 vale −8,50 cm, la velocità è $v(0) = -0{,}920$ m/s e l'accelerazione $a(0) = +47{,}0$ m/s^2.

(a) Qual è la pulsazione ω?

SOLUZIONE: Idea chiave è che, poiché il blocco si muove di moto armonico, valgono le equazioni 15.3, 15.6 e 15.7, le quali, calcolate per $t = 0$, diventano

$$x(0) = x_m \cos\phi\,, \qquad (15.15)$$

$$v(0) = -\omega x_m \sin\phi\,, \qquad (15.16)$$

$$a(0) = -\omega^2 x_m \cos\phi\,. \qquad (15.17)$$

Queste tre equazioni contengono tre incognite, cioè x_m, ϕ e ω. Dividendo la (15.17) per la (15.15) si eliminano x_m e ϕ e si ottiene

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{47{,}0\ \mathrm{m/s^2}}{-0{,}0850\ \mathrm{m}}} = $$
$$= 23{,}5\ \mathrm{rad/s}\,.$$

(b) Quali sono la costante di fase ϕ e l'ampiezza x_m?

SOLUZIONE: Vale ancora la stessa idea chiave. Dividendo dunque la (15.16) per la (15.15) si trova

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \sin\phi}{x_m \cos\phi} = -\omega \tan\phi\,,$$

che risolta rispetto a $\tan\phi$ diventa

$$\tan\phi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = -\frac{-0{,}920\ \mathrm{m/s}}{(23{,}5\ \mathrm{rad/s})(-0{,}0850\ \mathrm{m})} = -0{,}461\,.$$

Questa equazione ha due soluzioni:

$$\phi = -25° \quad \text{e} \quad \phi = 180° + (-25°) = 155°\,.$$

La calcolatrice dà normalmente solo la prima delle due. Per scegliere quella appropriata possiamo ricorrere a questa idea chiave: proviamole tutt'e due per calcolare l'ampiezza x_m. Dalla (15.15), inserendo $\phi = -25°$, avremmo

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos\phi} = \frac{-0{,}0850\ \mathrm{m}}{\cos(-25°)} = -0{,}094\ \mathrm{m}\,.$$

Se avessimo scelto $\phi = 155°$, avremmo trovato $x_m = 0{,}094$ m.

Poiché il valore max. di uno spostamento deve essere sempre una cost. positiva, dobbiamo scartare la soluzione $\phi = -25°$. Quindi l'unica soluzione valida è $\phi = 155°$ da cui $X_m = 0{,}094\ m = 9.4\ cm$

~~Problema svolto 20.2~~ ES.3

La figura 20.5a mostra due blocchi ~~di rame~~ identici di massa $m = 1{,}5$ kg. Il blocco L è a temperatura iniziale $T_{iL} = 60$ °C mentre il blocco R è a temperatura $T_{iR} = 20$ °C. I blocchi sono contenuti entro scatole termicamente isolate e separate da un diaframma mobile pure isolante. Se solleviamo il diaframma, i blocchi dopo un po' di tempo giungono alla temperatura di equilibrio $T_f = 40$ °C (fig. 20.5b). Qual è la variazione di entropia nel sistema dei due blocchi durante questo processo? Il calore specifico del rame è 386 J/(kg · K).

SOLUZIONE: È idea chiave avere presente che per trovare la richiesta differenza di entropia dobbiamo prima individuare una trasformazione reversibile che possa condurre il sistema dallo stato iniziale a quello finale raffigurati nelle figure 20.5a e 20.5b. Calcoleremo poi la variazione entropica ΔS_{rev} di questa trasformazione reversibile facendo uso della (20.1). Per un tale procedimento abbiamo bisogno di una sorgente termica a temperatura lentamente regolabile (ad esempio girando una manopola). Decidiamo dunque di sottoporre i due blocchi alle seguenti due trasformazioni separate, illustrate nella figura 20.6.

Trasformazione 1. Fissando la temperatura della sorgente a 60 °C, posiamo il blocco L sulla sorgente. (Blocco e sorgente sono alla stessa temperatura e perciò in equilibrio.) Poi abbassiamo lentamente la temperatura della sorgente, e quindi anche del blocco, fino a 40 °C. Man mano che la temperatura decresce di una quantità dT durante questo processo, una quantità di calore dQ viene trasferita *dal* blocco alla sorgente. Dalla (18.14) possiamo scrivere questo trasferimento come $dQ = mc\,dT$, ove c è il calore specifico del rame. Secondo l'equazione 20.1, la variazione di entropia ΔS_L del blocco L durante l'intera variazione di temperatura è

$$\Delta S_L = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_{iL}}^{T_f} \frac{mc\,dT}{T} = mc\int_{T_{iL}}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_f}{T_{iL}}.$$

Inserendo i valori noti, si ottiene

$$\Delta S_L = (1{,}5 \text{ kg})[386 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}] \ln \frac{313 \text{ K}}{333 \text{ K}} = -35{,}86 \text{ J/K}.$$

Trasformazione 2. Fissando ora la temperatura della sorgente a 20 °C, posiamo il blocco R su di essa. Poi alziamo lentamente la temperatura di quest'ultima, e quindi anche quella del blocco, fino a 40 °C. Con lo stesso ragionamento fatto per il blocco di sinistra, possiamo scrivere la variazione di entropia ΔS_R del blocco R durante la trasformazione:

$$\Delta S_R = (1{,}5 \text{ kg})(386 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{313 \text{ K}}{293 \text{ K}} = +38{,}23 \text{ J/K}.$$

La variazione complessiva di entropia per il sistema di due blocchi che subiscono il processo con questa doppia trasformazione è data da

$$\Delta S_{rev} = \Delta S_L + \Delta S_R = -35{,}86 \text{ J/K} + 38{,}23 \text{ J/K} = 2{,}4 \text{ J/K}.$$

E così la variazione di entropia complessiva ΔS_{irrev} per il sistema di due blocchi che subiscono il processo irreversibile reale è

$$\Delta S_{irrev} = \Delta S_{rev} = 2{,}4 \text{ J/K}.$$

Il risultato è positivo, in accordo col postulato dell'entropia del paragrafo 20.2.

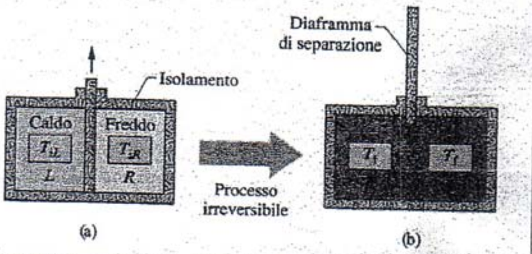


Figura 20.5 Problema svolto 20.2. (a) Due blocchi di rame L ed R nel loro stato iniziale sono identici salvo che per le temperature. Sono collocati in una scatola termicamente isolata e separati da un diaframma pure isolante. (b) Rimuovendo il diaframma i blocchi scambiano calore e si portano in uno stato finale di pari temperatura T_f.

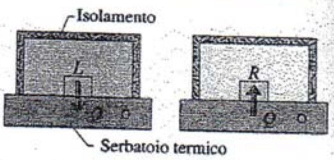


Figura 20.6 I blocchi di figura 20.5 possono passare dallo stato iniziale a quello finale in modo reversibile facendo uso di un serbatoio termico a temperatura regolabile per (a) estrarre calore dal blocco L e (b) cederlo al blocco R.

ES. 4

15. ESEMPIO

Durante una tempesta, un vento di 35,5 m/s soffia sul tetto di una piccola casa, come mostrato in figura 17.

- Trova la differenza di pressione tra l'aria dentro la casa e quella sulla superficie del tetto (la densità dell'aria è 1,29 kg/m³).

Soluzione

Utilizziamo l'equazione di Bernoulli con il punto 1 appena sotto il tetto e il punto 2 appena sopra il tetto. Poiché c'è una piccola differenza tra le altezze dei due punti, consideriamo $y_1 = y_2 = y$. Perciò:

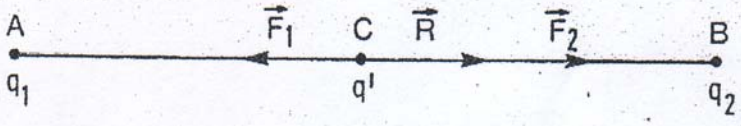
$$P_1 + 0 + \rho g y = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y$$

Ricavando la differenza di pressione, $P_1 - P_2$, troviamo:

$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}29 \text{ kg/m}^3)(35{,}5 \text{ m/s})^2 = 813 \text{ Pa}$$

Es.5

IV,4) a) q' è sottoposta a due forze attrattive, dirette come il segmento AB, e verso opposto.



I moduli delle due forze sono:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q'}{d_1^2} = 9\times10^9 \times \frac{10^{-8}\times2\times10^{-8}}{(8\times10^{-2})^2} =$$

$$= 2.8\times10^{-4}\,N$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q'}{d_2^2} = 9\times10^9 \times \frac{4\times10^{-8}\times2\times10^{-8}}{(10^{-1})^2} =$$

$$= 7.2\times10^{-4}\,N$$

La risultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ è diretta verso B ed ha modulo:

$$R = F_2 - F_1 = 4.4\times10^{-4}\ N$$

b) Nella posizione di equilibrio, devono essere uguali i moduli delle due forze:

$$F_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q'}{x^2} = F_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q'}{(l-x)^2},$$

cioè

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(l-x)^2},$$

dove l è la lunghezza del segmento AB. Sostituendo i valori numerici, e risolvendo rispetto a x:

$$q_2\, x^2 = q_1\, (18-x)^2;$$

$$x^2 + 12\, x - 108 = 0;$$

$$x = -\,6 \pm \sqrt{36+108} = 6 \text{ cm},$$

dove soltanto la radice positiva è accettabile.
Dunque, per essere in equilibrio, la carica q' deve essere a 6 cm da A.
Spostando la carica verso A o B, hanno il sopravvento rispettivamente $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, e compare una risultante non nulla; l'equilibrio è perciò instabile.