

Meccanica statistica classica

1

Principi della meccanica a sistemi di molte particelle
da cui si ottengono proprietà macroscopiche senza
considerare i dettagli del moto di ciascuna particella:
questa è la m.s.

Lo studio della statistica dinamica di sistemi a molte
particelle, avviene attraverso il concetto di probabilità
di distribuzione per i diversi stati dinamici in cui si
possono trovare le particelle.

Sistemi isolati, grande numero N di particelle,
moti discreti e di energie E_1, E_2, \dots, E_n (discreti o
continui):

$$n_1 \text{ con energia } E_1 \\ n_2 \text{ " " } E_2$$

$$N = n_1 + n_2 + n_3 = \sum_i n_i = n^{\circ} \text{ tot particelle} \quad (1)$$

dove $N = \text{costante}$.

L'energia totale è:

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots = \sum_i n_i E_i \quad (2)$$

Particelle non interagenti, coniche $E_i = E_i(x_i, y_i, z_i)$,
 x_i, y_i, z_i coordinate delle particelle.

Se ci sono interazioni si aggiungono termini tipo

$$E_{p_{12}} + E_{p_{13}} + \dots + E_{p_{23}} + \dots$$

Semplificando col metodo del self-consistent field:

$$E_i = E_{k_i} + E_{p_{iave}}$$

media dell'interazione dell' i -esima
particella con tutte le altre

Se il sistema è isolato $\Rightarrow U = \text{cost}$; però la distribuzione delle varie particelle fra i vari stati d'energia può variare (in un gas una molecola da lenta a veloce o viceversa ---).

$n_1, n_2 \dots$ possono quindi cambiare.

Però una "partizione" di n_i particelle in E_i è favorita rispetto ad altre.

Date le condizioni fisiche del sistema delle particelle, c'è una partizione più probabile. Quando questa partizione è raggiunta il sistema è in equilibrio statistico. Un sistema può fluttuare attorno alla partizione senza cambiarla. Per scostarsi dall'equilibrio invece ci vuole un'azione esterna.

Il problema chiave delle u.s. è trovare la partizione (o legge di distribuzione) + probabile di un sistema isolato (o no). Da questa partizione si devono poi trovare le proprietà osservabili.

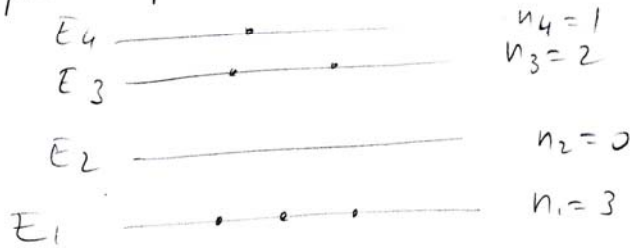
Le partizioni più probabili più note sono:

Maxwell - Boltzmann	statistica classica
Fermi - Dirac	= " quantistica
Bose - Einstein	" " "

Legge di distribuzione Maxwell-Boltzmann

Un sistema composto da un grande numero di particelle **identiche** (per struttura e composizione) e **distinguibili**.

Esempio di partizione



Prima osservazione: tutti gli stati d'energia hanno la stessa probabilità d'essere occupati.

Seconda osservazione (regole delle pile): la probabilità di una particolare partizione \propto al n° di modi diversi in cui le particelle possono essere distribuite fra i diversi stati di energia per produrre la partizione. Per diversi stati n_i intende che n_1, n_2, n_3, \dots sono fissati ma le n_1, n_2, n_3, \dots particelle per ogni stato possono cambiare.

$$\text{particella } a \text{ in } E_1 \quad \text{particella } p \text{ in } E_3 = a \text{ in } E_3$$

2 partizioni diverse (fanno partic. indistinguibili nella part. identiche)

Allo fine (calcolo combinatorio) il n° di modi diversi distinguibili per realizzare la partizione n_1, n_2, n_3, \dots è:

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (3)$$

Terza osservazione: la probabilità d'ottenere la partizione n_1, n_2, n_3, \dots è proporzionale a P .

Supponiamo adesso invece che ogni stato abbia una probabilità diversa di essere occupato, intrinseca, g_i .

Quindi :

$$P = \frac{N! g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (4)$$

Ora rimaniamo le condizioni di distinguibilità, cioè le particelle sono identiche e indistinguibili.

Quindi tutte le $N!$ permutazioni fra le particelle occupanti i diversi stati danno lo stesso partizione.

Perciò :

$$P = \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} = \prod_{i=1}^N \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (5)$$

che è la probabilità di una distribuzione nella statistica di Maxwell-Boltzmann.

Per trovare lo stato di partizione più probabile (equilibrio statico), dobbiamo trovare il massimo di P , con $N = \text{cost}$, $U = \text{cost}$. La partizione con max. probabilità risulta :

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i} \quad (6)$$

dove :

$$\begin{aligned} N &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots = g_1 e^{-\alpha - \beta E_1} + g_2 e^{-\alpha - \beta E_2} + \dots = \\ &= e^{-\alpha} (g_1 e^{-\beta E_1} + g_2 e^{-\beta E_2} + \dots) = \\ &= e^{-\alpha} Z \end{aligned}$$

dove $Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$ = funzione di partizione.

da cui $e^{-\alpha} = N/Z$

Quindi: $n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}$ (7) [3]

che è la legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

Usando la (7), si può definire il valore medio (per una data partizione) di una proprietà fisica $F(E)$:

$$F_{ave} = \frac{1}{N} \sum_i n_i F(E_i) \quad (8)$$

che per la più probabile (o di equilibrio) partizione è:

$$F_{ave} = \frac{1}{Z} \sum_i g_i F(E_i) e^{-\beta E_i} \quad (9)$$

Oss. Ricordiamo che si può identificare $\beta = 1/k_B T$, se il sistema è in equilibrio (fuori equilibrio c'è una temperatura "effettiva" per ogni porzione di sistema) se esso è in equilibrio.

Temperatura

Ricordiamo che all'equilibrio statistico:

$$(NE_{ave} =) U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots = \frac{N}{Z} \left(\sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i} \right)$$

Usando la definizione di Z :

$$U = -\frac{N}{Z} \frac{d}{d\beta} \left(\sum_i g_i e^{-\beta E_i} \right) = -\frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -N \frac{d}{d\beta} (\ln Z) \quad (10)$$

da cui:

$$E_{ave} = \frac{U}{N} = -\frac{d}{d\beta} (\ln Z) \quad (11)$$

cioè Z, E_{ave}, U sono $f(\beta)$.

Se adesso introduciamo $\beta = \frac{1}{k_B T}$ si ha:

$$Z = \sum_i g_i e^{-E_i/k_B T} \quad (12)$$

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/k_B T} \quad (13)$$

$$U = k_B N T^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) \quad d\beta = \frac{-dT}{k_B T^2} \quad (14)$$

$$\frac{U}{N} = E_{ave} = k_B T^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) = \text{en. media per particella} \quad (15)$$

Dalle relazioni sopra si può concludere che la temperatura di un sistema in equilibrio statistico è una quantità correlata all'energia media per particella del sistema, e la relazione dipende dalla struttura del sistema.

Si ha anche:

$$E_{ave} = \frac{1}{Z} \sum_i g_i E_i e^{-E_i/k_B T} \quad (16)$$

Perché nelle (13) l'esponente diminuisce all'aumentare di $E_i/k_B T$, diminuisce il numero di occupazione n_i . A temperatura fissa, al crescere di E_i diminuisce n_i . A $T=0$ solo lo stato fondamentale è occupato, al crescere di T aumenta la popolazione degli stati ad energie più alti. Inoltre:

$$(17) \quad \frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-(E_j - E_i)/k_B T} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\Delta E/k_B T}$$

ΔE = differenza di energie fra i 2 livelli.
Quindi $n_j \sim n_i$ solo se $\Delta E/k_B T \ll 1$.

Equilibrio Termico

4

Consideriamo un sistema composto da 2 gruppi diversi di particelle, cioè 2 sottosistemi (2 solidi, un mix fra 2 gas, un liquido con un solido immerso, ...). Per collisioni ed altre interazioni, l'energia può essere scambiata fra i 2 sottosistemi ma $E_{TOT} = \text{cost}$.

Per i 2 sottosistemi si ha:

$$\begin{array}{cc} N & N' \\ E_1, E_2, E_3, \dots & E_1', E_2', E_3', \dots \end{array}$$

dove, se non ci sono "reazioni", N ed N' sono costanti.

$$(18) \quad N = \sum_i n_i = \text{cost} \quad N' = \sum_i n_i' = \text{cost}'$$

$$(19) \quad U = \sum_i n_i E_i + \sum_j n_j' E_j' = \text{cost}''$$

La probabilità di una data partizione (o distribuzione) \bar{e} :

$$(20) \quad P = \left(\frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} \right) \times \left(\frac{g_1'^{n_1'} g_2'^{n_2'} g_3'^{n_3'} \dots}{n_1'! n_2'! n_3'! \dots} \right)$$

All'equilibrio P è massima e quindi:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad n_j' = \frac{N'}{Z'} g_j' e^{-\beta E_j'}$$

con $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Questo si traduce anche nel principio zero.

Applicazione al gas ideale

Consideriamo un gas monoatomico.

$$E_i = \frac{1}{2m} p_i^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (18)$$

Siccome l'energia di un gas ideale può essere considerata avere uno spettro continuo di energie:

$$\left(Z = \sum_i g_i e^{-E_i/k_B T} \Rightarrow \right) Z = \int_0^{\infty} e^{-E/k_B T} g(E) dE \quad (19)$$

dove $g(E)dE$ è il numero di stati molecolari con energie fra E ed $E+dE$ (per esempio da diverse orientazioni del momento \vec{p} ed energie date).

(mecc. quantistica) Si può far vedere che per un gas ($h = \text{cost. di Planck}$):

$$g(E)dE = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE \quad (20)$$

con $V = \text{volume occupato dal gas}$. La (20) è valido per un gas di particelle in una "large potential box", cioè ∞ .

$$\text{Da cui: } Z = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/k_B T} dE$$

$$\Rightarrow Z = V \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \quad (21)$$

per un gas ideale monoatomico.

$$\text{Segue quindi: } \ln Z = \ln C + \frac{3}{2} \ln k_B T$$

con $C = \text{costante}$.

cioè
interat.
fra
molecole
tendente
a
zero

$$p = \frac{n h}{2d}$$

$$h = \frac{2d \cdot p}{n}$$

$n = \text{intero}$
 $p = \text{q. moto}$

sostituendo $\ln z$ nella (15) : $E_{ave} = k_B T^2 \frac{d}{dT} (\ln z)$ 5
 $E_{ave} = \frac{3}{2} k_B T$ (22) $= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k_B T} \cdot k_B$

$\Rightarrow U = N E_{ave} = \frac{3}{2} N k_B T$ (23)

come già trovato nella teoria cinetica dei gas -

Nel gas perfetto monatomico si può anche

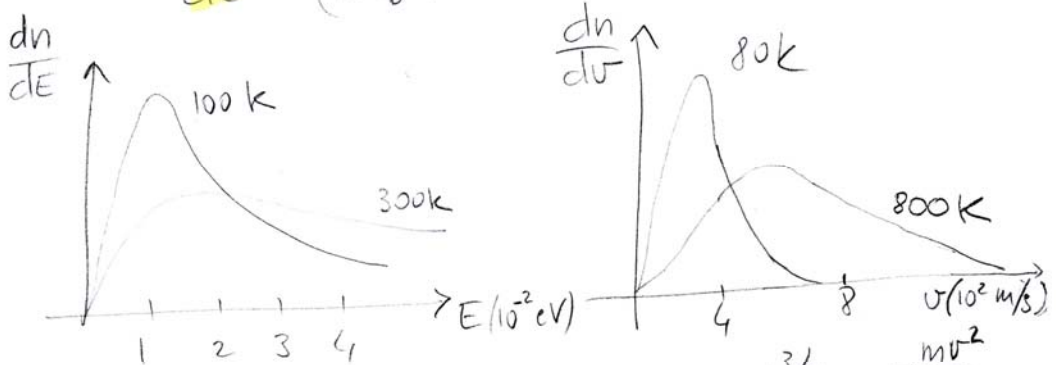
considerare che :

$(n_i = \frac{N}{z} g_i e^{-E_i/k_B T} \Rightarrow) dn = \frac{N}{z} e^{-E/k_B T} g(E) dE =$
 $= \frac{N}{z} \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} e^{-E/k_B T} dE$ (24)

dove dn è il numero di particelle con energie

fra E ed $E + dE$. Dalle (24) + (21) :

$\frac{dn}{dE} = \frac{2\pi N}{(\pi k_B T)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/k_B T}$ (25)



$\frac{dn}{dv} = \frac{dn}{dE} \frac{dE}{dv} = m v \frac{dn}{dE} = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$ (26)
 $\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dv} = mv$
 $m^{3/2} \cdot N \cdot v^2 e^{-\frac{E}{k_B T}}$

(nel numeratore dn è indicato con dn)

Entropia di un sistema in equilibrio statistico che obbedisce alla statistica di Maxwell-Boltzmann

Ricordiamo che: \otimes

$$S = k_B \ln P = k_B \left[\sum_i n_i \ln g_i - \sum_i n_i \ln n_i + \sum_i n_i \right]$$

$$= -k_B \sum_i n_i \ln (n_i / g_i) + k_B N \quad (27)$$

avendo usato la: $\ln P = N - \sum_i n_i \ln \frac{n_i}{g_i} \quad (28)$

dedotta da:

$$\ln P = n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + \dots - \ln n_1! - \ln n_2! - \dots$$

e approssimando: $\ln x! \approx x \ln x - x$

Usando: $n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i / k_B T}$, prendendo il log:

$$\ln \frac{n_i}{g_i} = -\frac{E_i}{k_B T} - \frac{\ln Z}{N} \quad (29)$$

La (27) diviene:

$$S = k_B \left[\sum_i n_i \frac{E_i}{k_B T} + \sum_i n_i \ln \frac{Z}{N} + \sum_i n_i \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \left(\sum_i n_i E_i \right) + k_B \left(\sum_i n_i \right) \ln \frac{Z}{N} + k_B N =$$

$$= \frac{U}{T} + k_B N \ln \frac{Z}{N} + k_B N \left(= \frac{U}{T} + k_B \ln \frac{Z^N}{N!} \right)$$

\otimes Delle $P = \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots}$ segue che:

$$\ln P = n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + n_3 \ln g_3 + \dots - \ln n_1! - \ln n_2! - \ln n_3! - \dots$$

Usando la formula di Stirling $\ln x! \approx x \ln x - x$ (per x grandi):

$$\ln P = n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + \dots - (n_1 \ln n_1 - n_1) - (n_2 \ln n_2 - n_2) - \dots =$$

$$= N + \sum_i n_i \ln \frac{g_i}{n_i} \quad (N = \sum_i n_i)$$

Entropia, lavoro e calore

(6)

Vediamo come l'entropia è correlata alle altre grandezze termodinamiche concernenti l'energia. Supponiamo una trasformazione infinitesimale per un sistema all'equilibrio statistico. Si ha:

$$dU = \sum_i E_i dn_i + \sum_i n_i dE_i \quad (30)$$

Limitiamoci alle trasformazioni reversibili (in ogni istante il sistema è in equilibrio statistico). Esaminiamo il 2° termine della (30). Si può far ^{vedere in} meccanica quantistica che gli stati (stazionari) ^{di energia} di una particella in una box di potenziale 1D di lunghezza a sono dati da:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

Quindi dE_i corrisponde a " da " cioè variazione del volume del contenitore, cioè lavoro effettuato.

Quindi, ricordando $dU = dQ + dL$, si ha:

$$dL = -\sum_i n_i dE_i \quad (31)$$

Possiamo anche dedurre che:

$$dQ = \sum_i E_i dn_i \quad (32)$$

Quindi la quantità statistica "calore" corrisponde al cambiamento in energia che avviene a causa di scambi con l'ambiente dei indici n_i di particelle da un livello energetico all'altro (che provocano una variazione dn_i).

Essendo $S = k_B \ln P$, segue da :

$$ds = \frac{dQ}{T} \quad (33)$$

Infatti: $S = \frac{U}{T} + k_B \ln \frac{z}{N} + k_B N$

$$\Rightarrow ds = \frac{dU}{T} - \frac{U}{T^2} dT + k_B \frac{dz}{z} \quad [d(\ln z) = \frac{dz}{z}] \quad (34)$$

Ricordando che: $z = \sum_L g_i e^{-E_i/k_B T}$, segue:

$$(35) \quad dz = - \sum \frac{dE_i}{k_B T} g_i e^{-E_i/k_B T} + \sum \frac{E_i}{k_B T} g_i e^{-E_i/k_B T} dT$$

Quindi, usando $E_{ave} = k_B T^2 \frac{d(\ln z)}{dT}$, e la (32) si ha:

$$k_B \frac{dz}{z} = \frac{dL}{T} + \frac{U}{T^2} dT \quad (36)$$

(per il dettaglio dei calcoli: 2° volume Alano Finn, esempio 11.6 p.483)

Sostituendo la (36) nella (34) si ha:

$$ds = \frac{dL}{T} + \frac{U}{T^2} dT + \frac{dU}{T} - \frac{U}{T^2} dT = \frac{dL}{T} + \frac{dU}{T}$$

$$\Rightarrow dQ = T ds.$$

Dalla (33) si ha:

$$\left. \begin{aligned} du &= T ds - dL \\ du &= T ds - p dV \end{aligned} \right\} \text{per processi} \\ \text{reversibili}$$

Se si ha $V = \text{cost}$, segue:

$$(du)_V = T(ds)_V \Rightarrow \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = k_B \frac{d}{dU} (\ln P)_V \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{relazione fra } U, T \\ \text{e probabilità} \end{array} \right\}$$

Può essere dimostrato che P è una funzione crescente dell'energia.

Equazione di stato di un gas ideale

17

Ricordiamo che (vedi (36)):

$$k_B N \frac{dz}{z} = \frac{dL}{T} + \frac{U}{T^2} dT$$

$$\Rightarrow k_B N d(\ln z) = \frac{pdv}{T} + \frac{UdT}{T^2}$$

Se $T = \text{cost}$ $\Rightarrow dT = 0$, quindi:

$$p = k_B N T \left[\frac{\partial(\ln z)}{\partial V} \right]_T$$

Questa è una forma del tipo $f(p, V, T) = 0$,
e relaciona p, V, T e z , cioè alle coordinate
interno del sistema.

Abbiamo già visto che per un gas:

$$z = \frac{V (2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \left(e^{\ln z = \ln V + \ln(2\pi m)^{3/2} + \ln(k_B T)^{3/2} - \ln h^3} \right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{k_B N T}{V} \Rightarrow pV = k_B N T$$

$$\Rightarrow (R = k_B N_A = \frac{k_B N}{n} \text{ dove } n = \frac{N}{N_A} = n^\circ \text{ moli})$$

$$pV = nRT$$

che è l'equazione di stato di un gas perfetto

Quantum statistics, Legge di Fermi-Dirac

La statistica di Fermi-Dirac si ottiene considerando:

- 1) particelle identiche e indistinguibili
- 2) le particelle obbediscono al principio di esclusione di Pauli, cioè 2 particelle non possono essere nello stesso stato d'energia e la funzione d'onda complessiva deve essere antisimmetrica.

Tali tipi di particelle sono dette "fermioni".

Si vede che in meccanica quantistica g_i corrisponde ai differenti stati quantistici aventi la stessa energia, cioè alla "degenerazione" del livello di energia. Naturalmente g_i (massimo n° di fermioni che possono essere accomodati in un livello) deve avere un valore tale da non violare il principio di esclusione di Pauli.

Supponiamo di avere n_i particelle. Numero di modi di assegnare n_i particelle in g_i stati di energia E_i è:

$$g_i(g_i-1) \dots (g_i-n_i+1) = \frac{g_i!}{(g_i-n_i)!} \quad (37)$$

Se le particelle sono indistinguibili, la (37) diventa:

$$\frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!} \quad (38)$$

Se ora disponiamo tutte le particelle nei diversi livelli E_i , si ha:

$$P = \frac{g_1!}{n_1!(g_1-n_1)!} \cdot \frac{g_2!}{n_2!(g_2-n_2)!} \cdot \frac{g_3!}{n_3!(g_3-n_3)!} \dots = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!} \quad (39)$$

La partizione più probabile si ottiene cercando il massimo di $\ln P$. Il risultato è:

8

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1} \quad (40)$$

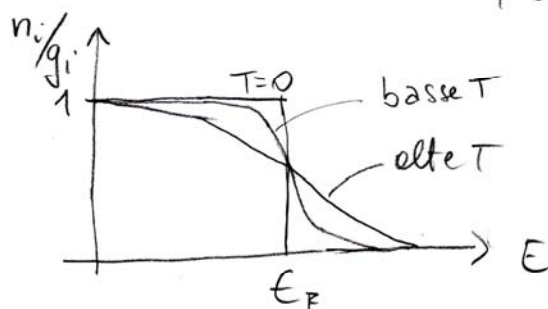
che è la legge di distribuzione di Fermi-Dirac.

Se definiamo $E_F = -\alpha / \beta$, si ha ($\beta = \frac{1}{k_B T}$):

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - E_F)/k_B T} + 1}$$

Per $T=0$, tutti gli stati di energia fino a $E=E_F$ sono occupati ($n_i = g_i$), mentre quelli con $E > E_F$ sono vuoti ($n_i = 0$); questo segue da:

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{(E_i - E_F)/k_B T} = \begin{cases} 0 & \text{per } E_i - E_F < 0 \\ \infty & \text{per } E_i - E_F > 0 \end{cases}$$



Un esempio di sistema che obbedisce alla legge (40) è il gas di elettroni.

Quantum statistics. Legge di Bose-Einstein

Esistono particelle identiche e indistinguibili che non obbediscono al principio di esclusione di Pauli.

Tali particelle sono dette "bosoni". I nuclei di He, le molecole H_2 , i mesoni, i fotoni sono bosoni.

Per i bosoni esiste ancora una degenerazione g_i , numericamente eventualmente diversa da quella di un sistema fermionico, ma agli stati di energia E_i corrisponde una funzione d'onda simmetrica.

Per calcolare la partizione di B-E, si pensi di distribuire n_i particelle in g_i scatole, senza limiti al numero di particelle per scatola. Si ottiene (effettuando tutte le permutazioni):

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{(g_i - 1)!} \quad (41)$$

Si come le particelle sono indistinguibili, la (41) diventa:

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

che fornisce:

$$P = \frac{(n_1 + g_1 - 1)!}{n_1! (g_1 - 1)!} \cdot \frac{(n_2 + g_2 - 1)!}{n_2! (g_2 - 1)!} \dots =$$

$$= \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \quad (42)$$

da cui si ottiene la partizione più probabile (cercando il massimo di $\ln P$):

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1} \quad (43)$$

che è la distribuzione di Bose-Einstein -

Nel caso di B-E, α non ha significato speciale (come per F-D), e quindi la distribuzione si può scrivere:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + E_i/k_B T} - 1} \quad (44)$$

con $\sum_i n_i = N$ e $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Nel caso del gas di fotoni (particelle di momento h/λ ed energia $h\nu$, dove λ e ν sono lunghezza d'onda e frequenza delle radiazioni elettromagnetiche), si ha che lo spettro di energia del corpo nero può essere trattato come un continuo e quindi:

$$dn = \frac{g(E) dE}{e^{E/k_B T} - 1} \quad (45)$$

Si può dimostrare (si veda Alonso-Fian, Eq. (2.20)) ^{particelle in very large potential box} che il numero di stati nella radiazione di corpo nero con frequenze comprese fra ν e $\nu + d\nu$ è:

$$g(E) dE = g(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (46)$$

$V = \text{volume}$.

Usando la (45) e (46) si ha (ricordando che $E = h\nu$):

$$dn = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (47)$$

Definendo la (distribuzione di) densità di
 energia del corpo verso cui:

$$p_E(\nu) = \frac{h\nu}{V} \cdot \frac{dn}{d\nu} \quad (48)$$

$(p_E(\nu)d\nu)$ è l'energia per unità di volume corrispondente
 a radiazione di frequenza fra ν e $\nu + d\nu$ con
 relazione
 di Rayleigh
 e Jeans **è la
 famosa formula di Planck.**

$$p_E(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (49)$$

Alcune osservazioni finali

La formula (49) risolve un **problema che
 sorge nella trattazione termodinamica-statistica
 classica di Rayleigh-Jeans**. Infatti Rayleigh-Jeans,
 pur partendo dalla (46), considerando ciascuna
 particella che compone la radiazione come un
 oscillatore armonico classico, trovavano:

$$\frac{dI}{d\nu} = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \nu^2 \quad \left(k_B T = E_{\text{ave}} \text{ del } \begin{array}{l} \text{singolo oscillatore} \\ \text{armonico} \end{array} \right)$$

$\left(\frac{dI}{d\nu} d\nu = \text{intensità di irraggiamento, cioè potenza per unità di}$
 superficie per radiazione fra ν e $\nu + d\nu$ $\right)$, dalla quale segue:

$$(50) \quad I_{\text{TOTALE}} = \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi}{c^2} k_B T \nu^2 d\nu = \infty$$

cioè una intensità totale emessa dal corpo
 verso pari a ∞ , condizione non fisica.

Il risultato (50) fu visto come **"catastrofe ultravioletta"**.

L'intuizione di Planck fu quella di considerare l'energia media degli oscillatori armonici come:

10

$$(51) \quad E_{ave} = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n E e^{-\frac{nE}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nE}{k_B T}}} = \lim_{E \rightarrow 0} \frac{E}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}$$

Cioè come se essi avessero dei livelli di energia discreti dati da nE (se non si considera l'operazione di limite)
 Non effettuando il limite $E \rightarrow 0$ (per il quale la (51) tende a $k_B T$), si poteva scrivere:

$$\frac{dI}{d\nu} = \left(\frac{2\pi}{c^2}\right) \nu^2 \frac{E}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1} \quad (52)$$

che conduce alle (49) ponendo $E = h\nu$,
 e l'ipotesi di quantizzazione di Planck, e

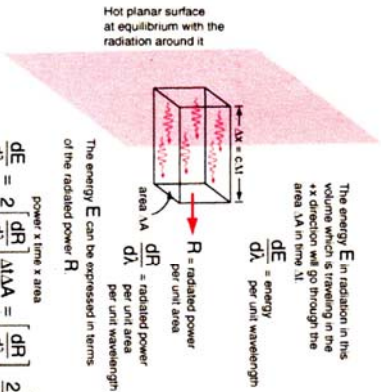
osservando che:

$$g_E(\nu) = \frac{4}{c} \frac{dI}{d\nu}$$

valido per onde stazionarie in cavità.

Radiated Energy as a Function of Energy Density

If we consider energy radiated perpendicular to a small increment of area, then it must be noted that half of the energy density in the waves is going toward the walls and half is coming out if the system is in thermal equilibrium. Evaluating the power seen at a given observation point requires a consideration of the geometry:



$$\frac{dE}{d\lambda} = 2 \left[\frac{dR}{d\lambda} \right]_{\theta=0} \Delta \lambda A A$$

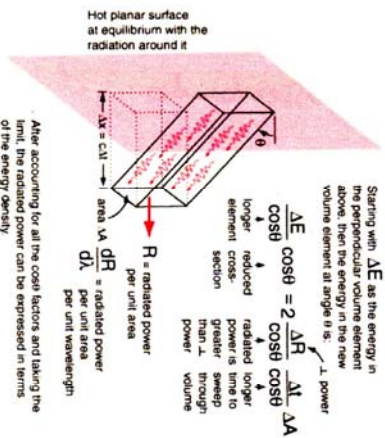
because half the power will be going in the x direction

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{c}{2} \frac{du}{d\lambda}$$

where u is the energy density

Other elements of area on the surface send radiation through the specified surface area, and that radiation has a component perpendicular to the surface. To evaluate that contribution, consider a surface element at an arbitrary angle as shown below.

- [Index](#)
- [Rayleigh-Jeans references](#)
- [Blackbody radiation concepts](#)



$$\left[\frac{dR}{d\lambda} \right]_{\theta} = \frac{dE}{d\lambda} \frac{c}{2} \cos^2 \theta$$

Taking the average of the angular part over all angles gives a value of 1/2. The radiated power is then

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda} \frac{c}{4}$$

where u is the energy density given by the Planck radiation formula

The factor c/4 developed here involves an integral over all angles. It is important because it relates the radiated energy to the energy density given by the Planck radiation formula.

Development of the Rayleigh-Jeans Law

[HyperPhysics**** Quantum Physics](#)

[R](#) [Go Back](#)