

ANALISI COMPLESSA
Corsi di Laurea in Matematica
Numeri complessi e topologia di \mathbb{C}

I seguenti argomenti si suppongono noti:

- **NUMERI COMPLESSI E OPERAZIONI:** forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Opposto, inverso e complesso coniugato di un numero complesso. Somma e prodotto di numeri complessi nelle varie forme. Potenza ed estrazione di radice n -esima.
- **TRASFORMAZIONI ELEMENTARI:** Traslazioni, omotetie e rotazioni. Inversione.

Risolvere i seguenti esercizi:

1) Determinare la forma algebrica di:

$$\frac{2}{1-3i}, \quad (1+i\sqrt{3})^6, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2011}.$$

2) Al variare di $z \in \mathbb{C}$, discutere il numero delle soluzioni $w \in \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} w^2 = z, \\ \operatorname{Re} w > 0. \end{cases}$$

3) Dato l'insieme

$$E = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 4, \frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

si descriva l'insieme

$$F = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{\bar{z}}, z \in E \right\}.$$

4) Descrivere l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = |z - i + 1|\}.$$

5) Si determini l'insieme

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{z-i}{2+iz} \in \mathbb{R} \right\}.$$

6) Descrivere l'insieme

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left(\frac{-4}{z} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{z-2}{z+2} \right) \right\}.$$

7) Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

- a) $z^2 = 2i$;
- b) $z^3 = -i$;
- c) $z^6 = 8$;

d) $2z^2 - (2 + 5i)z - 2 + i = 0;$

e) $|z^4| + 3 + 4(\bar{z})^8 = 0.$

f) $\bar{z} = z^2.$

8) Dato l'insieme

$$E = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2/3\pi \right\}$$

si determinino gli insiemi

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w = z^3, z \in E\} \quad \text{e} \quad G = \{t \in E : t^3 = z, z \in E\}.$$

9) Stabilire per quali valori reali di a l'equazione

$$z = |z|^2 + ia$$

ammette soluzioni, determinarle e disegnarle.

10) Sia

$$E = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} \leq |z| < 2, \frac{3}{4}\pi \leq \theta < \pi \right\}.$$

Determinare e disegnare i seguenti insiemi:

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w = z^4, z \in E\},$$

$$G = \left\{ t \in \mathbb{C} : t = \frac{1}{w}, w \in F \right\}, \quad H = \{u \in \mathbb{C} : u = \bar{w}, w \in F\}.$$

11) Dato $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ determinare e disegnare i seguenti insiemi

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w^2 \in E\}, \quad G = \{u \in \mathbb{C} : u = iz + i, z \in E\},$$

$$H = \left\{ t \in \mathbb{C} : t = \frac{1}{u}, u \in G \right\}.$$

12) Risolvere

$$z\operatorname{Re} z + \bar{z}\operatorname{Im} z = |z|^2$$

e disegnare l'insieme delle soluzioni.

13) Siano

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : i \frac{z+i}{z^2-1} \in \mathbb{R} \right\} \cup \{z = 1, z = -1\},$$

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w = (z+i)^3, z \in E\},$$

$$G = \{t \in \mathbb{C} : t^3 \in F\}.$$

Disegnarne l'immagine nel piano della variabile complessa.

14) Siano $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z > 0, \frac{1}{2} < |z| < 3\},$

$$F = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z, z \in E\}, \quad G = \left\{ t \in \mathbb{C} : t = \frac{1}{z^2}, z \in E \right\}.$$

Disegnarne l'immagine nel piano della variabile complessa.

15) Sia B un sottoinsieme di \mathbb{C} . Determinare condizioni tali che la sua frontiera ∂B sia un compatto.

16) Siano A e B sottoinsiemi disgiunti di \mathbb{C} con A chiuso e B compatto. Mostrare che

$$\text{dist}(A, B) > 0$$

e che esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $\text{dist}(A, B) = |a - b|$.

17) Sia A un sottoinsieme di \mathbb{C} i cui punti sono tutti isolati. Mostrare che A ha cardinalità al più numerabile.