NOTE
GEOMETRIA 2 PER FISICA

G. BINI S. CACCIATORI B. VAN GEEMEN

Contents

1. Geometria differenziale

Testi consigliati: [AT], [B], [dC], [D], [DNF1], [DNF2], [N1], [Tu].

1.1. Varietà differenziabili.

1.1.1 Definizione di varietà (provvisoria). Sia M un insieme. Una carta di M è una coppia (U, x), dove $U \subset M$ è un sottoinsieme e $x : U \to x(U)$ $(\subset \mathbb{R}^m)$ è una biiezione tale che $x(U)$ sia un aperto di $\mathbb{R}^m$.

Due carte locali $(U_\alpha, x_\alpha), (U_\beta, x_\beta)$ sono dette compatibili se

$$F_{\beta\alpha} := x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è un diffeomorfismo, cioè $F_{\beta\alpha}$ è liscia (di classe $\mathcal{C}^\infty$), $F_{\beta\alpha}^{-1}$ esiste ed è liscia. Si noti che $F_{\beta\alpha}^{-1}$ esiste sempre perché $F_{\beta\alpha}^{-1} = (x_\beta \circ x_\alpha^{-1})^{-1} = x_\alpha \circ x_\beta^{-1} = F_{\alpha\beta}$.

Un atlante di M è una collezione $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di carte locali compatibili tale che $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Una varietà differenziabile (di dimensione m) è una coppia $(M, \mathcal{A})$ dove M è un insieme e $\mathcal{A}$ è un atlante di M. (Rif: [AT], 2.1.)

1.1.2 Esempi. Un esempio di varietà è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con l'atlante dato da una sola carta, $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$. Un sottoinsieme aperto U di una varietà M, con le restrizioni delle carte di M ad U, è una varietà.

1.1.3 Topologia. Una topologia su un insieme M è una famiglia $\mathcal{T} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di sottoinsiemi $U_\alpha \subset M$ t.c.:

(1) l'insieme vuoto $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $M \in \mathcal{T}$,
(2) $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$ per ogni sottoinsieme $J \subset I$,
(3) $\cap_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$ per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$.

Gli $U_\alpha \in \mathcal{T}$ sono detti aperti di M (per la topologia $\mathcal{T}$) e $(M, \mathcal{T})$ è detto spazio topologico.

Uno spazio topologico $(M, \mathcal{T})$ è detto di Hausdorff se dati $p, q \in M$ con $p \neq q$, esistono aperti U, V (cioè, $U, V \in \mathcal{T}$), tali che $p \in U$, $q \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. (Rif: [N1], Cap 1.)

1.1.4 Esempi. Dato un insieme M, esempi di topologie su M sono $\mathcal{T} := \{\emptyset, M\}$ e il caso in cui $\mathcal{T}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi di M, detta topologia discreta.

Un esempio più interessante è il caso in cui $M = \mathbb{R}^n$ e un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se $U = \cup_i B_{\epsilon_i}(p_i)$, un unione di palle $B_\epsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : \, ||x - p|| < \epsilon\}$.

Il primo esempio non è di Hausdorff se $\sharp M \geq 2$; gli altri due esempi sono di Hausdorff.

1.1.5 Definizione di varietà. Nella definizione di varietà si richiede che M sia uno spazio topologico di Hausdorff, e che le carte $x : U \to x(U)$ siano tali che $V \subset U$ è aperto in M se, e solo se, $x(V)$ è aperto in $\mathbb{R}^m$.

Si richiede inoltre che la topologia di M sia a base numerabile, condizione tecnica verificata per gli esempi considerati in queste note.

1.2. **Sottovarietà.**

1.2.1 Diffeomorfismi. Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un sottoinsieme aperto. L'algebra delle funzioni lisce su U si indica con $\mathcal{C}^\infty(U)$. Sia

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione liscia, cioè ogni $F_i : U \to \mathbb{R}$ è in $\mathcal{C}^\infty(U)$. Un'applicazione liscia $F : U \to V := F(U)$ ($\subset \mathbb{R}^n$) è detta diffeomorfismo su U se esiste un'applicazione liscia $G : V \to U$ tale che $F \circ G = id_{F(U)}$ e $G \circ F = id_U$. In tal caso si ha $m = n$.

La matrice jacobiana di F in $p \in U$ è la matrice $n \times m$ definita da:

$$J_p(F) = \begin{pmatrix} (\partial F_1/\partial t_1)(p) & \ldots & (\partial F_1/\partial t_m)(p) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial F_n/\partial t_1)(p) & \ldots & (\partial F_n/\partial t_m)(p) \end{pmatrix} \qquad (\in M_{n,m}(\mathbb{R})),$$

dove le t_i sono le coordinate su $\mathbb{R}^m$. Per $x \in \mathbb{R}^m$, il vettore $J_p(F)x \in \mathbb{R}^n$ è dato da:

$$J_p(F)x = (\mathrm{d}F(p + tx)/\mathrm{d}t)_{|t=0}.$$

Il seguente teorema mostra che $J_p(F)$ determina il comportamento di F 'vicino' a p.

1.2.2 Teorema della funzione inversa. Sia U un aperto in $\mathbb{R}^m$ e sia $F : U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione liscia. Supponiamo che la matrice jacobiana $J_p(F)$ sia invertibile in un punto $p \in U$. Allora esiste un intorno aperto U' di p tale che $F(U')$ sia aperto e che l'applicazione $F_{|U'} : U' \to F(U')$ sia un diffeomorfismo.

(Rif: [B].)

1.2.3 Teorema. Sia $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un aperto e sia

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (U \subset \mathbb{R}^{n+m})$$

un'applicazione liscia. Sia $b \in \mathbb{R}^m$ tale che $J_a(F)$ abbia rango massimale (cioè rango m) in ogni punto $a \in F^{-1}(b)$ (tale F è detta sommersione su $F^{-1}(b)$). Allora $M := F^{-1}(b)$ è una varietà di dimensione n.

In più, carte locali di M sono del tipo (V, ϕ) dove $\phi(x_1, \ldots, x_{n+m}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ (cioè, ϕ è la proiezione su certe n delle $n + m$ coordinate) e l'inversa di ϕ è una parametrizzazione locale di M del tipo $\phi^{-1}(y) = (\psi_1(y), \ldots, \psi_{n+m}(y))$ dove ogni ψ_i è una funzione liscia sul aperto $\phi(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione([AT], Prop. 2.1.38) Sia $a \in F^{-1}(b)$. Siccome $J_a(F)$ ha rango m, dopo un'eventuale permutazione delle coordinate su $\mathbb{R}^{n+m}$, possiamo supporre che la sottomatrice

$$B := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}(a) \right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

sia invertibile. Definiamo un'applicazione liscia

$$G : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \qquad G(x) = (x_1, \dots, x_n, F_1(x), \dots, F_m(x)).$$

Allora

$$J_a(G) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & B \end{pmatrix}, \qquad \text{quindi} \quad \det(J_a(G)) = \det(B) \neq 0.$$

Per il Teorema della funzione inversa 1.2.2, esiste un intorno $\tilde{U} \subset U$ di a tale che $G : \tilde{U} \to W := G(\tilde{U})$ sia un diffeomorfismo, sia $H := G^{-1}$. Per $y \in W$ si ha:

$$G(H(y)) = y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}).$$

D'altra parte, dalla definizione di G si ha:

$$\begin{aligned} G(H(y)) &= G(H_1(y), \dots, H_n(y), H_{n+1}(y), \dots, H_{n+m}(y)) \\ &= (H_1(y), \dots, H_n(y),\ F_1(H(y)), \dots,\ F_n(H(y))\,). \end{aligned}$$

Quindi troviamo:

$$y_i = H_i(y), \quad 1 \leq i \leq n, \qquad y_{n+i} = F_i(H(y)) \quad 1 \leq i \leq m.$$

In particolare, si ha $H(y) = (y_1, \dots, y_n, H_{n+1}(y), \dots, H_{n+m}(y))$ e la composizione

$$F \circ H : W \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad y \longmapsto F(H(y)) = (F_1(H(y), \dots, F_m(H(y))) = (y_{n+1}, \dots, y_{n+m})$$

è un'applicazione lineare(!). Il 'cambio delle coordinate' su $\mathbb{R}^{n+m}$ dato da G (con inversa H) ha quindi linearizzato l'applicazione F. Visto che $H : W \to \tilde{U}$ è una biiezione, si ha:

$$x \in \tilde{U} \cap F^{-1}(b) \iff x = H(y) \quad \text{e} \quad F(H(y)) = b,$$

cioè

$$\tilde{U} \cap F^{-1}(b) = H(\{y \in W : (y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = (b_1, \dots, b_m)\,\}),$$

quindi abbiamo una parametrizzazione di $\tilde{U} \cap F^{-1}(b)$ data da

$$p : y' := (y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_n, H_{n+1}(y', b), \dots, H_{n+m}(y', b))$$

con inversa la carta $x = x_a$ di M che è semplicemente la proiezione:

$$x = x_a : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n).$$

È facile verificare la compatibilità di queste carte, se x' è un'altra carta data dalla proiezione su, per esempio, le n coordinate $x_2, \dots, x_{n+1}$, allora si ha:

$$(x' \circ x^{-1})(y_1, \dots, y_n) = x'(y_1, \dots, y_n, H_{n+1}(y', b), \dots, H_{n+m}(y', b)) = (y_2, \dots, y_n, H_{n+1}(y', b))$$

che è un'applicazione liscia. □

1.3. **Esempi di varietà.**

1.3.1 Esempio: la sfera. Sia $F:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ l'applicazione definita da $F(x)=x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2$. Usando le carte locali sulle varietà $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{R}$ che sono individuate dalle identità, si ha:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2,\qquad J_x(F)=(2x_1\ 2x_2\ \ldots\ 2x_{n+1}).$$

Se $x\neq 0$, la matrice $J_x(F)$ ha rango $1=\dim\mathbb{R}$ e concludiamo che F è una sommersione sull'aperto $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dal Teorema 1.2.3 segue allora che $F^{-1}(1)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$, quindi la sfera di dimensione n è una varietà:

$$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \sum x_i^2=1\ \}\ =F^{-1}(1).$$

1.3.2 Esempio: il gruppo $SL(n,\mathbb{R})$. Mostriamo che il gruppo delle matrici con determinante 1 è una varietà. Sia

$$F=\det:M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad A=(a_{ij})\longmapsto\det(A).$$

Per calcolare $\partial\det/\partial x_{ij}$ si sviluppi il determinante della matrice $X=(x_{ij})$ rispetto all'i-esima riga:

$$\det(X)=\det(x_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x_{ij}\det(X_{ij}),$$

dove $X_{ij}\in M_{n-1}(\mathbb{R})$ è la matrice ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna della matrice X. Poiché in questa formula x_{ij} compare soltanto davanti a $\det(X_{ij})$, si ha:

$$\partial\det/\partial x_{ij}\ =\ (-1)^{i+j}\det(X_{ij}).$$

Quindi la matrice $J_X(F)$, con una sola riga e n^2 colonne, ha rango massimale se $\det(X_{ij})\neq 0$ per almeno una coppia i,j. La formula qui sopra mostra inoltre che $\det(X)\neq 0$ implica che almena una delle $\det(X_{ij})$ è diversa da zero.

Quindi, per X nell' aperto $GL(n,\mathbb{R})$ di $M_n(\mathbb{R})$, dato dalle matrici con $\det(A)\neq 0$, la matrice jacobiana $J_X(F)$ ha rango massimale. Perciò det è una sommersione su

$$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}):\ \det(A)=1\,\}\ =F^{-1}(1).$$

Dal Teorema 1.2.3 segue che $SL(n,\mathbb{R})$ è una varietà di dimensione n^2-1.

Un altro modo di mostrare che det ha rango massimo su $GL(n,\mathbb{R})$ è di usare il fatto che per un'applicazione liscia $\gamma:\mathbb{R}\to M_n(\mathbb{R})$ si ha:

$$J_0(\det\circ\gamma)=J_{\gamma(0)}(\det)J_0(\gamma),$$

dove si noti che $J_0(\det\circ\gamma) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\det(\gamma))(0)$ è una matrice 1×1. Sia $X \in GL(n,\mathbb{R})$ e definiamo $\gamma(t) = (1+t)X \ \in M_n(\mathbb{R})$. allora $\gamma(0) = X$ e

$$\begin{aligned} J_0(\det\circ\gamma) &= ((\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\det((1+t)X))_{|t=0} \\ &= ((\mathrm{d}/\mathrm{d}t)((1+t)^n\det(X))_{|t=0} \\ &= (n(1+t)^{n-1}\det(X))_{|t=0} \\ &= n\det(X) \neq 0. \end{aligned}$$

Pertanto, $J_{\gamma(0)}(\det) = J_X(\det) \neq 0$ e siccome $J_X(\det)$ ha soltanto una riga, concludiamo che det ha rango massimo in $X \in GL(n,\mathbb{R})$.

1.3.3 Esempio: il gruppo O(n,$\mathbb{R}$). Il gruppo ortogonale reale è il sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$ definito da

$$O(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) :\ {}^tAA = I\},$$

in particolare, per $A \in O(n,\mathbb{R})$ si ha $A^{-1} = {}^tA$. Per mostrare che $O(n,\mathbb{R})$ è una sottovarietà di $GL(n,\mathbb{R})$, definiamo prima

$$Sym_n(\mathbb{R}) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) :\ {}^tX = X\},$$

cioè, $Sym_n(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale reale delle matrici $n\times n$ simmetriche. Si noti che $\dim Sym_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$. Definiamo poi un'applicazione liscia tra spazi vettoriali:

$$F : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym_n(\mathbb{R}), \qquad A \longmapsto {}^tAA,$$

e notiamo che $O(n,\mathbb{R}) = F^{-1}(I)$. Mostriamo che F è una sommersione su $F^{-1}(I)$.

Sia $A \in F^{-1}(I)$, dobbiamo mostrare che $J_A(F)$ ha rango massimo, oppure, equivalentemente, che $J_A(F)$ è un'applicazione suriettiva. Se consideriamo $J_A(F)$ come matrice con n^2 colonne e $n(n+1)/2$ righe, allora per $X \in M_n(\mathbb{R})$ che corrisponde a $x \in \mathbb{R}^{n^2}$ si ha che $J_A(F)x = y \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, dove y corrisponde alla matrice simmetrica Y data da:

$$Y = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(A+\lambda X)_{|\lambda=0} \qquad \text{se} \quad y = J_A(F)x.$$

Per $A \in F^{-1}(I)$ e $X \in M_n(\mathbb{R})$, si ha:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(A+\lambda X)_{|\lambda=0} &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}({}^t(A+\lambda X)(A+\lambda X))_{|\lambda=0} \\ &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}({}^tAA + \lambda({}^tAX + {}^tXA) + \lambda^2({}^tXX))_{|\lambda=0} \\ &= {}^tAX + {}^tXA. \end{aligned}$$

Si noti che ${}^tAX + {}^tXA = 0$ equivale a ${}^tAX = -{}^tXA$ e, poiché $-{}^tXA = -{}^t({}^tAX)$, questo equivale inoltre a ${}^tAX = -{}^t({}^tAX)$, cioè ${}^tAX$ è una matrice antisimmetrica. Poiché A è invertibile otteniamo un isomorfismo

$$\ker(J_A(F)) \cong \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tAX = -{}^t({}^tAX)\} \xrightarrow{\cong} \{Z \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tZ = -Z\}, \qquad X \longmapsto {}^tAX,$$

con inversa $Z \mapsto {}^tA^{-1}Z$. Quindi $\dim\ker(J_A(F)) = n(n-1)/2$ per ogni $A \in F^{-1}(I)$ e perciò $\dim\mathrm{im}(J_A(F)) = n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 = \dim Sym_n(\mathbb{R})$. Concludiamo che $J_A(F)$ ha rango massimale per ogni $A \in F^{-1}(I)$ e quindi che F è una sommersione su $O(n,\mathbb{R})$.

Si ricordi che $O(n,\mathbb{R})$ ha due componenti connesse: una è il gruppo

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) :\ \det(A) = 1\,\},$$

l'altra è data dalle matrici $A \in O(n,\mathbb{R})$ con $det(A) = -1$. Abbiamo mostrato che entrambe sono varietà di dimensione $n(n-1)/2$.

1.4. **Applicazioni lisce e funzioni lisce.**

1.4.1 Applicazioni lisce. Siano M, N varietà differenziabili di dimensione m ed n rispettivamente. Sia

$$f : M \longrightarrow N$$

un'applicazione continua. L'applicazione f è detta liscia in $p \in M$ se per ogni carta (U,x) di M, con $p \in U$, e ogni carta (V,y) di Y, con $f(p) \in V$, l'applicazione

$$y \circ f \circ x^{-1}\ :\ x(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow y(V) \qquad (\subset \mathbb{R}^n)$$

è liscia in $x(p) \in x(U \cap f^{-1}(V))$ $(\subset \mathbb{R}^m)$. Se scriviamo $F = y \circ f \circ x^{-1}$, allora $F = (F_1, \dots, F_n)$ è definita sull'aperto $x(U \cap f^{-1}(V))$ di $\mathbb{R}^m$ che contiene $x(p)$ e f liscia in p vuole dire che ogni F_i è liscia nel punto $x(p)$.

Per verificare se f è liscia in $p \in M$, basta verificarlo per una sola carta (U,x) e una sola carta (V,y). Infatti, se (U',x'), (V',y') sono altre carte, si ha:

$$y' \circ f \circ (x')^{-1} = (y' \circ y^{-1}) \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ (x \circ (x')^{-1}).$$

Poiché le applicazioni $y' \circ y^{-1}, x \circ (x')^{-1}$ sono diffeomorfismi, e per ipotesi $y \circ f \circ x^{-1}$ è liscia, segue che l'applicazione $y' \circ f \circ (x')^{-1}$ è liscia.

L'applicazione f è detta liscia se è liscia in ogni $p \in M$. È facile verificare che la composizione di due applicazioni lisce è liscia.

1.4.2 Funzioni lisce. Un caso particolare di applicazioni lisce sono quelle della forma

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

dove V è un aperto in una varietà M. L'algebra delle funzioni lisce su V è indicata con $\mathcal{C}^\infty(V)$.

Un esempio importante di funzioni lisce è quello delle funzioni coordinate di una carta. Sia $(U, x = (x_1, \dots, x_m))$ una carta di M, allora $x_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, per ogni $i = 1, \dots, m$, perché se $(t_1, \dots, t_m) = x(p) \in x(U) \subset \mathbb{R}^m$ allora:

$$(x_i \circ x^{-1})(t_1, \dots, t_m) = x_i(p) = t_i$$

e la funzione $(t_1, \dots, t_m) \mapsto t_i$ è ovviamente liscia.

2. Spazi e fibrati tangenti

2.1. **Lo spazio tangente.**

2.1.1 Germi e derivazioni. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e sia $p \in M$. L'algebra dei germi delle funzioni lisce in p è

$$\mathcal{C}^\infty(M,p) := \{(U,f)\}/\sim,$$

dove U è un intorno aperto di p e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia. Per tali $(U,f),(V,g)$ si definisce $(U,f) \sim (V,g)$ se $f = g$ su un intorno di p. La classe, il germe, di f dipende soltanto dal comportamento di f 'molto vicino' a p. Di solito, scriveremo semplicemente f invece di $[(U,f)]$ per il germe definito da (U,f).

Una derivazione su $C^\infty(M,p)$ è un'applicazione

$$v : C^\infty(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \text{t.c.} \quad \begin{cases} v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g), \\ v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \end{cases}$$

per $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M,p)$ e $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, cioè v è $\mathbb{R}$-lineare e soddisfa la regola di Leibniz. L'insieme delle derivazioni su $C^\infty(M,p)$ è uno spazio vettoriale reale tramite

$$(\lambda v + \mu w)(f) := \lambda v(f) + \mu w(f) \qquad (\lambda,\mu \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^\infty(M,p)),$$

dove v,w sono derivazioni su $\mathcal{C}^\infty(M,p)$.

Questo spazio vettoriale è detto spazio tangente di M in p e si indica con T_pM. Una derivazione in T_pM si chiama vettore tangente.

Esempi di tali derivazioni si ottengono nel modo seguente. Sia $(U,\phi = (x_1,\dots,x_m))$ una carta di M con $p \in U$. Si definisce

$$(\partial/\partial x_i)_{|p} : \mathcal{C}^\infty(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\partial/\partial x_i)_{|p}(f) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial t_i}(\phi(p)),$$

dove le funzioni t_i sono coordinate su $\mathbb{R}^m$. Si noti che $f \circ \phi^{-1}$ è liscia in un intorno di $\phi(p)$ in $\mathbb{R}^m$. È facile verificare che $(\partial/\partial x_i)_{|p} \in T_pM$.

2.1.2 Una base dello spazio tangente. Si può mostrare che le derivazioni $(\partial/\partial x_i)_{|p}$, $1 \le i \le m$, definite come sopra, sono una base di T_pM. In particolare, $\dim T_pM = \dim M = m$. Sia $v \in T_pM$, allora $v = \sum a_i(\partial/\partial x_i)_{|p}$ per certi $a_i \in \mathbb{R}$. Poiché $x_i \in \mathcal{C}^\infty(M,p)$ e $(x_i \circ \phi^{-1})(t_1,\dots,t_n) = t_i$, si ha:

$$(\partial/\partial x_i)_{|p}(x_j) = \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker. Applicando la derivazione v all funzione x_j si ottiene quindi il coefficiente a_j:

$$v(x_j) = \sum_{i=1}^m a_i(\partial/\partial x_i)_{|p}(x_j) = a_j.$$

In particolare, se $(V,\psi = (y_1,\dots,y_m))$ è un'altra carta di M con $p \in V$, abbiamo anche i vettori tangenti $(\partial/\partial y_i)_{|p} \in T_pM$. Per esprimere questi vettori tangenti come combinazione lineare delle $(\partial/\partial x_i)_{|p}$ si noti:

$$(\partial/\partial y_j)_{|p} = \sum_{i=1}^m c_{ij}(\partial/\partial x_i)_{|p} \qquad \text{con} \quad c_{ij} = (\partial/\partial y_j)_{|p}(x_i),$$

che generalizza la ben nota formula $\partial/\partial y_j = \sum_i (\partial x_i/\partial y_j)\partial/\partial x_i$.

2.1.3 Vettori tangenti e cammini. Un altro modo per definire un vettore tangente in T_pM è il seguente. Sia $\epsilon > 0$ e

$$\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M, \qquad \gamma(0) = p$$

un'applicazione liscia, detta cammino. Definiamo

$$\gamma_* : \mathcal{C}^\infty(M, p) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \gamma_*(f) := \left(\frac{\mathrm{d}f \circ \gamma}{\mathrm{d}\tau}\right)_{|\tau=0}.$$

E' facile mostrare che $\gamma_* \in T_pM$. Si scrive anche $\gamma_* = \gamma'(0)$ ([AT], Esempio 2.3.14).

Viceversa, data una carta $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ di M con $p \in U$ e un vettore tangente $v = \sum a_i(\partial/\partial x_i)_{|p} \in T_pM$, sia $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Definiamo un cammino

$$\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M, \qquad \gamma(\tau) = \phi^{-1}(\phi(p) + \tau a)$$

con ϵ tale che $\phi(p) + \tau a \in \phi(U)$ per $\tau \in]-\epsilon, \epsilon[$. Si verifica che $\gamma_* = v$, quindi ogni vettore tangente si ottiene tramite un cammino.

2.1.4 Lo spazio tangente ad uno spazio vettoriale. Un caso importante, anche se banale, è $M = V$, uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Per $p \in V$ si ha un isomorfismo 'naturale' tra V e T_pV nel modo seguente:

$$V \xrightarrow{\cong} T_pV, \qquad a \longmapsto \gamma_*, \qquad \text{con} \quad \gamma(\tau) = p + \tau a.$$

Se $V = \mathbb{R}^m$, l'isomorfismo è dato da $a = (a_1, \ldots, a_m) \mapsto \sum a_i(\partial/\partial t_i)_{|p}$. Questo isomorfismo verrà usato in varie occasioni in futuro.

2.1.5 Il differenziale di un'applicazione liscia. Sia $f : M \to N$ un'applicazione liscia tra varietà. Per $p \in M$ definiamo un'applicazione lineare, il differenziale di f in p:

$$(\mathrm{d}f)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N, \qquad v \longmapsto [g \longmapsto v(g \circ f)],$$

dove $v \in T_pM$ e $g \in \mathcal{C}^\infty(N, f(p))$ (e quindi $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(M, p)$).

Se $\gamma_* \in T_pM$ è definito da un cammino γ, allora $(\mathrm{d}f)_p\gamma_* \in T_{f(p)}N$ è definito dal cammino $f \circ \gamma$ perché per $g \in \mathcal{C}^\infty(N, f(p))$:

$$((\mathrm{d}f)_p\gamma_*)(g) = \gamma_*(g \circ f) = (\mathrm{d}(g \circ (f \circ \gamma))/\mathrm{d}\tau)_{|\tau=0} = (f \circ \gamma)_*(g).$$

Per una composizione di applicazioni lisce

$$g \circ f : M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \qquad \text{si ha} \qquad (\mathrm{d}\, g \circ f)_p = (\mathrm{d}g)_{f(p)} \circ (\mathrm{d}f)_p,$$

perché per ogni $v \in T_pM$ e ogni $h \in \mathcal{C}^\infty(K, g(f(p)))$ si ha:

$$(\mathrm{d}\, g \circ f)_p(v)(h) = v(h \circ g \circ f) = (\mathrm{d}f)_p(v)(h \circ g) = (\mathrm{d}g)_{f(p)}((\mathrm{d}f)_p(v))(h) = ((\mathrm{d}g)_{f(p)} \circ (\mathrm{d}f)_p)(v)(h).$$

2.1.6 Il differenziale e la matrice jacobiana. Siano $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ e $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ carte di M e N rispettivamente con $p \in U$ e $f(p) \in V$. Delle basi di T_pM e $T_{f(p)}N$

sono rispettivamente i vettori dati da $(\partial/\partial x_i)_{|p}$ e $(\partial/\partial y_j)_{|f(p)}$. La matrice (v_{ij}) dell'applicazione lineare $(\mathrm{d}f)_p$ è data da:

$$(\mathrm{d}f)_p((\partial/\partial x_j)_{|p}) = \sum_{i=1}^{n} v_{ij}(\partial/\partial y_i)_{|f(p)}.$$

Usando $(\partial/\partial y_i)_{|f(p)}(y_j) = \delta_{ij}$ si trova:

$$v_{ij} = \left((\mathrm{d}f)_p((\partial/\partial x_j)_{|p}\right)(y_i) = (\partial/\partial x_j)_{|p}(y_i \circ f).$$

Se scriviamo $F = (F_1, \dots, F_n) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, allora $F_i = y_i \circ f \circ \phi^{-1}$ e

$$v_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{|p}(y_i \circ f) \;=\; \left(\frac{\partial\, y_i \circ f \circ \phi^{-1}}{\partial t_j}\right)(\phi(p)) \;=\; \left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j}\right)(\phi(p)).$$

Ne concludiamo che la matrice del differenziale $(\mathrm{d}f)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$, rispetto alle basi $(\partial/\partial x_i)_{|p}$ e $(\partial/\partial y_j)_{f(p)}$ di T_pM e $T_{f(p)}N$ è la matrice jacobiana $J_{\phi(p)}(F)$.

2.1.7 Il fibrato tangente. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m. L'unione disgiunta degli spazi tangenti ad M è indicata con

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM, \qquad \text{sia} \quad \pi : TM \longrightarrow M, \quad v \longmapsto p$$

se $v \in T_pM$. Sia $(U, \phi = (x_1, \dots, x_m))$ una carta locale di M. Allora per ogni $p \in U$, i vettori tangenti $(\partial/\partial x_i)_{|p}$ sono una base di T_pM. Quindi otteniamo una biiezione

$$\Phi :\; TU := \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \phi(U) \times \mathbb{R}^m \quad (\subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m})$$

data da

$$v = \sum a_i(\partial/\partial x_i)_{|p} \longmapsto (p, (a_1, \dots, a_m)) \longmapsto (\phi(p), (a_1, \dots, a_m)).$$

Si noti che $p = \pi(v)$.

Si può mostrare che esiste una topologia di Hausdorff su TM t.c. π sia continua. Inoltre, TM è una varietà differenziabile, di dimensione $2m$, con carte (TU, Φ) ottenute da carte (U, ϕ) di M come sopra. In particolare, $\Phi : TU \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ è un omeomorfismo.

Per esempio, se V è uno spazio vettoriale, allora

$$V \times V \xrightarrow{\cong} TV, \qquad (p, a) \longmapsto \gamma_*$$

con $\gamma(\tau) = p + \tau a$.

2.1.8 Esempio: il fibrato tangente a una sottovarietà. Sia $f : M \to N$ una sommersione su $K = f^{-1}(y)$ per un certo $y \in N$. La fibra K è una sottovarietà di M di dimensione $r = m-n$ dove $m = \dim M$ e $n = \dim N$ (vedi 1.2.3). Per ogni $p \in K$ lo spazio tangente T_pK è un sottospazio di T_pM. Se $(U, \phi = (x_1, \dots, x_n))$ è una carta di M con $p \in K \cap U$ e tale che $K \cap U = \{x \in M :\; x_{r+1}(x) = \ldots = x_m(x) = 0\}$, allora T_pK è il sottospazio di T_pM con base $(\partial/\partial x_i)_{|p}$ per $1 \le i \le r$.

Sia $v \in T_pK$ definito da un cammino $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to K$. Pertanto, $f(\gamma(\tau)) = y$, un cammino costante per ogni τ perché $f(K) = y$. Di conseguenza, $(\mathrm{d}f)_p(v) = 0 \in T_yN$, cioè $T_pK \subset \ker((\mathrm{d}f)_p)$. Poiché l'applicazione lineare $(\mathrm{d}f)_p$ è suriettiva, essendo $(\mathrm{d}f)_p$ dato dalla matrice jacobiana in carte locali, segue che $\dim T_pK = \dim K = n - m$ è uguale a $\dim\ker((\mathrm{d}f)_p)$, perciò:

$$T_pK = \ker((\mathrm{d}f)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N) \qquad (p \in K).$$

Così, con ovvio significato, $TK = \ker(\mathrm{d}f : TM \longrightarrow TN)$.

2.1.9 Esempio: il fibrato tangente di S^n. Si ricordi (vedi Esempio 1.3.1) che $S^n = f^{-1}(1)$, dove

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$$

è una sommersione sulla n-sfera S^n. Per $x \in S^n$ e $y \in T_x\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ abbiamo che $y \in T_xS^n$ se, e solo se, $(\mathrm{d}f)_x(y) = 2x_1y_1 + \ldots + 2x_{n+1}y_{n+1} = 0$. Sia $(,)$ il prodotto scalare euclideo standard su $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_{n+1}y_{n+1}$. Stando attenti a non confondere le coppie (x, y) con il prodotto scalare (x, y) abbiamo allora:

$$TS^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = T\mathbb{R}^{n+1} :\ (x, x) = 1,\ (x, y) = 0\,\}.$$

Non è difficile verificare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \longmapsto ((x, x), (x, y))$$

è una sommersione su $F^{-1}((1, 0))$. Quindi TS^n è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n+2}$ e questa struttura di varietà su TS^n coincide con quella data dalle carte (TU, Φ) come in 2.1.7.

Nel caso $n = 1$, il fibrato tangente TS^1 è diffeomorfo al prodotto $S^1 \times \mathbb{R}$. Un tale diffeomorfismo è dato da

$$f : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow TS^1, \qquad ((x_1, x_2), t) \longmapsto (x, y) = ((x_1, x_2), t(-x_2, x_1)).$$

In modo simile, su una sfera S^{2n+1} di dimensione dispari si ha il campo di vettori

$$X :\ S^{2n+1} \longrightarrow TS^{2n+1}, \qquad (x_1, \ldots, x_{2n}) \longmapsto (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1}),$$

che non è nullo in ogni $p \in S^{2n+1}$. Invece si può mostrare che dato un campo di vettori X su S^{2n}, esiste almeno un $p \in S^{2n}$ tale che $X(p) = 0$.

Per dare qualche idea su come è fatto il fibrato TS^2, definiamo il fibrato tangente unitario:

$$T_1S^2 = \{(x, y) \in TS^2 :\ (x, x) = (y, y) = 1,\ (x, y) = 0\,\}.$$

Si noti che ogni fibra $\pi^{-1}(x)$ di $\pi : T_1S^2 \to S^2$ è diffeomorfa a S^1. E' facile verificare che T_1S^2 è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e quindi anche di TS^2.

La varietà T_1S^2 è diffeomorfa a $SO(3) = \{A \in O(3) : \det(A) = 1\}$. Si ricordi che una matrice $A = (a_1|a_2|a_3)$, con colonne a_i, appartiene a $SO(3)$ esattamente se le colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, cioè $\|a_i\|^2 = (a_i, a_i) = 1$ e $(a_i, a_j) = 0$ se $i \neq j$. Poi si ricordi che dati, due vettori $x, y \in \mathbb{R}^3$, il loro prodotto vettoriale $x \times y$ è perpendicolare a entrambi e $\|x \times y\| = \|x\|\|y\|\mathrm{sen}\phi$ dove $\phi \in]0, \pi[$ è l'angolo tra i vettori x, y (nel piano $\langle x, y\rangle$). In più, $\det(x, y, x \times y) \geq 0$ in quanto i vettori $x, y, x \times y$ sono orientati. Da ciò segue che l'applicazione

$$f : T_1S^2 \longrightarrow SO(3), \qquad (x, y) \longmapsto A = (x|y|x \times y)$$

è ben definita ed è facile vedere che f e f^{-1} sono lisce.

2.2. **Campi vettoriali e parentesi di Lie.**

2.2.1 Campi vettoriali. Sia M una varietà differenziabile e sia $\pi : TM \to M$ il fibrato tangente. Un campo vettoriale X su un aperto V di M è un'applicazione liscia

$$X : V \longrightarrow TV := \pi^{-1}(V) \qquad \text{t.c.} \quad \pi \circ X = id_V.$$

Si noti che $\pi(X(p)) = p$ implica che $X(p) \in \pi^{-1}(p) = T_pM$. Quindi un campo vettoriale su V dà per ogni $p \in V$ un vettore tangente $X(p)$ in T_pM. Se $(U, \phi = (x_1, \dots, x_m))$ è una carta di M con $U \subset V$ allora per ogni $p \in U$ si ha

$$X(p) = a_1(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{|p} + \ldots + a_m(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_{|p}, \qquad (a_i(p) \in \mathbb{R})$$

e X liscia su U equivale a dire che gli $a_i : U \to \mathbb{R}$ sono funzioni lisce. L'insieme dei campi vettoriali su V si indica con $\mathcal{X}(V)$.

Dati i campi vettoriali $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ e le funzioni lisce $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, definiamo un campo vettoriale $fX + gY$ su V nel modo seguente:

$$(fX + gY)(p) := f(p)X(p) + g(p)Y(p) \qquad (\in T_pM),$$

dove $p \in V$. Con questa operazione l'insieme $\mathcal{X}(V)$ è un modulo sull'algebra $\mathcal{C}^\infty(V)$, in particolare, $\mathcal{X}(V)$ è un gruppo abeliano.

Dati $X \in \mathcal{X}(V)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ otteniamo una funzione liscia $X(f)$ su V nel modo seguente:

$$X(f)(p) := X_p(f), \qquad \text{dove} \qquad X_p := X(p) \qquad (\in T_pM),$$

e dove $p \in V$. Per verificare che $X(f)$ è liscia, si usa l'espressione locale per X data qui sopra: se $F = f \circ \phi^{-1}$ e $t = \phi(p) \in \mathbb{R}^m$ allora $X(f)(p) = \sum a_i(\phi^{-1}(t))(\partial F/\partial t_i)(t)$ che è liscia perché $a_i \circ \phi^{-1}$ e F sono lisce su $\phi(U)$.

2.2.2 Parentesi di Lie. Dati i campi vettoriali $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ su un aperto $V \subset M$ e una funzione liscia $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, la funzione $Y(f)$ è liscia su V. Per $p \in V$ consideriamo l'applicazione

$$f \longmapsto X_p(Y(f)) \qquad (\in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(V)).$$

In generale, questa applicazione non è una derivazione:

$$\begin{aligned} X(Y(fg)) &= X(fY(g) + gY(f)) \\ &= fX(Y(g)) + X(f)Y(g) + gX(Y(f)) + X(g)Y(f). \end{aligned}$$

Si noti che la parte 'di troppo' è $X(f)Y(g) + X(g)Y(f)$: questa espressione è però simmetrica in X, Y.

Definiamo le parentesi di Lie $[X, Y]$ di due campi vettoriali $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ nel modo seguente:

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

cioè, per ogni $p \in V$:

$$[X, Y]_p(f) := X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \qquad (\in \mathbb{R}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(V),\ f \in \mathcal{C}^\infty(V)).$$

Allora si ottiene

$$\begin{aligned}[X,Y](fg) &= fX(Y(g)) + gX(Y(f)) - (fY(X(g)) + gY(X(f)) \\ &= f[X,Y](g) + g[X,Y](f)\end{aligned}$$

e quindi $[X,Y]_p$ è un campo vettoriale. In coordinate locali si ha:

$$[X,Y] = \sum_i \left(\sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \left(X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Le parentesi di Lie godono delle proprietà seguenti:

$$[X,Y] = -[Y,X], \qquad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,$$

la seconda identità è detta identità di Jacobi (si noti la permutazione ciclica degli argomenti). Un altro modo di scrivere l'identità di Jacobi è:

$$ad_Z([X,Y]) = [X, ad_Z(Y)] + [ad_Z(X), Y]$$

dove $ad_Z(V) := [Z,V]$. In questa scrittura si vede che ad_Z soddisfa la regola di Leibniz per il prodotto dato dalle parentesi di Lie.

2.2.3 Campi vettoriali correlati. ([AT], 3.4, p.160; [N1], Exercise 4.6.13) Sia $\phi : M \to N$ una applicazione liscia e sia X un campo vettoriale su M. Allora per $q = f(p) \in N$ abbiamo il vettore tangente $(\mathrm{d}\phi)_p X_p$. In questo modo, però, non otteniamo in generale un campo di vettori su N. Ovviamente ci vuole che ϕ sia suriettiva (per ogni $q \in N$ ci deve essere un $p \in N$ tale che $\phi(p) = q$); inoltre ϕ deve anche essere iniettiva (se $q = \phi(p_1) = \phi(p_2)$ ma $p_1 \neq p_2$ allora abbiamo due vettori tangenti $(\mathrm{d}\phi)_{p_i} X_{p_i}$, $i = 1,2$, in q, che a priori possono essere distinti).

Nel caso in cui $\phi : M \to N$ sia un diffeomorfismo, ϕ è in particolare una biiezione e quindi possiamo definire un campo di vettori $X' := \mathrm{d}\phi X$ su N per $X'_q := (\mathrm{d}\phi)_p X_p$, dove $p = \phi^{-1}(q)$.

Più in generale, se $\phi : M \to N$ è un'applicazione liscia e X, X' sono campi vettoriali su M e N rispettivamente, si dice che X, X' sono ϕ-correlati se

$$X'_{\phi(p)} = (\mathrm{d}\phi)_p(X_p) \qquad (\forall p \in M)\ .$$

Un caso particolare è il caso in cui M sia una sottovarietà di N e ϕ è l'inclusione $M \hookrightarrow N$. In questo caso, X' è un campo di vettori su N che si restringe al campo X su M.

Visto che per ogni funzione liscia g su N si ha una funzione liscia $X'(g)$ su N definita da $(X'(g))(q) = X'_q(g)$, abbiamo per $p \in M$:

$$X'_{\phi(p)}(g) = (X'(g) \circ \phi)(p), \qquad \text{e} \qquad (\mathrm{d}\phi)_p(X_p)(g) = X_p(g \circ \phi),$$

per la definizione del differenziale. Quindi per campi correlati X, X' si ha:

$$X'(g) \circ \phi = X(g \circ \phi) \qquad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Viceversa, se vale questa uguaglianza per ogni $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, allora i campi X, X' sono ϕ-correlati.

Adesso consideriamo le parentesi di Lie per due campi X, Y su M correlati con X', Y' su N. Si noti che

$$X(Y(g \circ \phi)) = X(Y'(g) \circ \phi) = X'(Y'(g)) \circ \phi$$

e, nello stesso modo, $Y(X(g \circ \phi)) = Y'(X'(g)) \circ \phi$. Di conseguenza, si ha:

$$[X,Y](g \circ \phi) = [X',Y'](g) \circ \phi \qquad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

e perciò i campi $[X,Y]$ e $[X',Y']$ sono ϕ-correlati.

Nel caso in cui ϕ sia un diffeomorfismo e $X' = \mathrm{d}\phi X$, $Y' = \mathrm{d}\phi Y$, allora anche i campi $[X,Y]$ e $[X',Y']$ sono ϕ-correlati cioè:

$$\mathrm{d}\phi[X,Y] = [\mathrm{d}\phi X, \mathrm{d}\phi Y].$$

3. Gruppi di Lie

3.1. **Gruppi.**

3.1.1 Definizione di gruppo e omomorfismo di gruppi. Un gruppo G è un insieme fornito di una composizione

$$\circ : G \times G \longrightarrow G$$

e di un elemento $e \in G$ tale che valgono:

(1) associatività: per ogni $x, y, z \in G$ si ha $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, questo permette di scrivere semplicemente $x \circ y \circ z$,
(2) elemento neutro: per ogni $x \in G$: $x \circ e = e \circ x = x$,
(3) inverso: per ogni $x \in G$ esiste un elemento $x^{-1} \in G$, detto l'inverso di x, tale che $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
Se x ha due inversi a, b, cioè $ax = xa = e$ e $xb = bx = e$ allora si ha $a = ae = axb = eb = b$ e quindi $a = b$. Perciò l'inverso x^{-1} è determinato in modo unico da x.

Un gruppo G è detto abeliano se in più $x \circ y = y \circ x$ per ogni $x, y \in G$.

Un sottogruppo H di un gruppo G è un sottoinsieme di G tale che H sia un gruppo con la stessa composizione e lo stessa elemento neutro di G. In particolare, se H è un sottogruppo e se $a, b \in H$ anche $a \circ b \in H$.

3.1.2 Esempi di gruppi.

(1) $G = \mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri interi, è un gruppo con composizione $\circ = +$ e elemento neutro 0.
(2) $G = \mathbb{R}$, l'insieme degli numeri reali, è un gruppo con composizione $\circ = +$ e elemento neutro 0. Il gruppo $\mathbb{Z}$ è un sottogruppo di $\mathbb{R}$.
(3) $G = GL(n, \mathbb{R})$, l'insieme delle matrici invertibili $n \times n$ è un gruppo con composizione il prodotto di matrici e elemento neutro I, la matrice identità.
(4) $G = O(n)$, l'insieme delle matrici ortogonali (cioè ${}^tAA = I$) è un gruppo con composizione il prodotto dei matrici e elemento neutro I, la matrice identità. Il gruppo $O(n)$ è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

3.1.3 Omomorfismi. Un omomorfismo (di gruppi) è un'applicazione tra due gruppi G e G'

$$f : G \longrightarrow G', \qquad \text{tale che} \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

per ogni $a, b \in G$.

Esempi di omomorfismi sono le mappe $exp : \mathbb{R} \to GL(1, \mathbb{R})$, $exp(x) := e^x$, che soddisfa $e^{x+y} = e^x e^y$, e $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(1, \mathbb{R})$, che soddisfa $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Se f è un omomorfismo, allora $f(e) = e'$, dove e' è l'elemento neutro di G', perché usando $f(e) = f(e \circ e) = f(e) \cdot f(e)$ (dove la composizione in G' è indicata con un "$\cdot$") si ottiene $e' = f(e) \cdot f(e)^{-1} = f(e) \cdot f(e) \cdot f(e)^{-1} = f(e)$. In più, si ha $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ perché,

$$f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(a \circ a^{-1}) = f(e) = e'$$

e similmente $f(a^{-1}) \cdot f(a) = e'$; quindi $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ per l'unicità dell'inverso.

Il nucleo di un omomorfismo f è il sottoinsieme

$$\ker(f) := \{a \in G \,:\, f(a) = e'\}.$$

L'immagine di un omomorfismo f è il sottoinsieme

$$\mathrm{im}(f) := \{f(a) \in G' \,:\, a \in G\}.$$

Si può mostrare che $\ker(f)$ e $\mathrm{im}(f)$ sono sottogruppi di G e G' rispettivamente.

Si ricordi che un'applicazione $f : S \to T$ tra insiemi S e T è detta iniettiva se $f(s_1) = f(s_2)$ implica che $s_1 = s_2$, cioè elementi distinti hanno immagini distinte.

Un omomorfismo $\phi : G \to H$ è iniettivo se, e solo se, $\ker(\phi) = \{e\}$. Infatti, se ϕ è iniettiva e $\phi(g) = e$ allora, poiché anche $\phi(e) = e$, si ha $g = e$ e quindi $\ker(\phi) = \{e\}$. D'altra parte, se $\ker(\phi) = \{e\}$ e $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ allora

$$e = \phi(g_1)^{-1}\phi(g_2) = \phi(g_1^{-1})\phi(g_2) = \phi(g_1^{-1}g_2),$$

cioè, $g_1^{-1}g_2 \in \ker(\phi)$. Perciò $g_1^{-1}g_2 = e$ e $g_2 = g_1$, concludendo che ϕ è iniettiva.

3.1.4 Esempio: il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$. L'insieme delle matrici con determinante non nullo è un gruppo:

$$GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}.$$

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ si scrive $A = P + Qi$ con $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ matrici reali. L'applicazione

$$\phi : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(2n, \mathbb{R}), \qquad A = P + Qi \longmapsto \begin{pmatrix} P & Q \\ -Q & P \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo di gruppi. Per verificarlo, si noti che, con $B = R + iS$ si ha

$$AB = (P + iQ)(R + iS) = PR - QS + i(PS + QR).$$

D'altra parte, si ha:

$$\phi(A)\phi(B) = \begin{pmatrix} P & Q \\ -Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ -S & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PR - QS & PS + QR \\ -(PS + QR) & PR - QS \end{pmatrix} = \phi(AB),$$

come volevamo.

Si noti che ϕ è un omomorfismo iniettivo. Inoltre, il fatto che $\phi(A)\phi(B) = \phi(AB)$ implica che $\det(\phi(A)) \neq 0$ se $\det(A) \neq 0$: infatti, se $\det(A) \neq 0$, allora $AA^{-1} = I$, da cui $\phi(A)\phi(A^{-1}) = I$ e $\det(\phi(A))\det(\phi(A^{-1})) = 1$.

3.2. **Gruppi di Lie.**

3.2.1 Definizione di gruppi di Lie. Una varietà G è detta gruppo di Lie se esistono due applicazioni lisce
$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \qquad \nu : G \longrightarrow G,$$
e un punto $e \in G$ tali che G sia un gruppo con elemento neutro e, prodotto $g_1g_2 := \mu(g_1, g_2)$, e inversa $g^{-1} := \nu(g)$.

Un'applicazione $f : H \to G$ tra gruppi di Lie è un omomorfismo di gruppi di Lie se f è liscia e se f è un omomorfismo di gruppi. Un sottogruppo $H \subset G$ di un gruppo di Lie è detto sottogruppo di Lie se è una sottovarietà di G; in questo caso H è anche un gruppo di Lie.

3.2.2 Esempi. Il gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo di Lie perché le applicazioni $\mu(x, y) = x+y$ e $\nu(x) = -x$ sono evidentemente lisce. Similmente il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^* := (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo di Lie. L'applicazione $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $exp(x) := e^x$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie. Ovviamente $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo ed è un aperto dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ di dimensione n^2, quindi $GL(n, \mathbb{R})$ è una varietà. I coefficienti di un prodotto AB di due matrici A e B sono polinomi nei coefficienti di A e B ($(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$), quindi μ è liscia. L'inversa ν è anch'essa liscia perché $A^{-1} = (\det A)^{-1}A^\sharp$ dove $A^\sharp$ è la 'matrice dei cofattori' di A, cioè $(A^\sharp)_{ij}$ è il determinante, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$, della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A eliminando la j-esima riga e la i-esima colonna. La funzione det è data da un polinomio nei coefficienti di una matrice, e quindi è liscia. Poiché $\det(A)$ è liscia e non zero su $GL(n, \mathbb{R})$, anche $A \mapsto \nu(A) = (\det A)^{-1}A^\sharp$ è liscia su $GL(n, \mathbb{R})$.

Ogni sottovarietà di $GL(n, \mathbb{R})$ che è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$ è allora un gruppo di Lie. Esempi sono $SL(n, \mathbb{R})$ (vedi 1.3.2) e $SO(n, \mathbb{R})$ (vedi 1.3.3).

3.3. **Il fibrato tangente di un gruppo di Lie G.**

3.3.1 La traslazione a sinistra L_g. Sia G un gruppo di Lie e sia $g \in G$. Allora l'applicazione
$$L_g : G \longrightarrow G, \qquad h \longmapsto \mu(g, h) = gh$$
è liscia, perchè L_g è la restrizione di μ alla sottovarietà $\{g\} \times G$. Si noti che
$$L_e = \mathrm{id}_G, \qquad L_g \circ L_{g'} = L_{gg'}.$$
Infatti, si ha: $L_e(h) = eh = h$ e $(L_g \circ L_{g'})(h) = L_g(L_{g'}(h)) = L_g(g'h) = gg'h = L_{gg'}(h)$ per ogni $h \in G$.

Inoltre, L_g è un diffeomorfismo, perché il suo inverso è $L_{g^{-1}}$; infatti, $L_gL_{g^{-1}} = L_{gg^{-1}} = L_e$ e $L_{g^{-1}}L_g = L_{g^{-1}g} = L_e$,
$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}.$$

3.3.2 Il fibrato tangente di G è banale. Sia G un gruppo di Lie. Allora il suo fibrato tangente è un fibrato banale $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$ con $n = \dim G$. Un isomorfismo esplicito tra TG e il fibrato banale, con fibra T_eG (lo spazio tangente di G in $e \in G$) è dato da
$$\tau : G \times T_eG \longrightarrow TG, \qquad (g, v) \longmapsto (\mathrm{d}L_g)_e v.$$

3.3.3 Campi vettoriali invarianti sinistra. Sia G un gruppo di Lie. Ogni vettore tangente $v \in T_eG$ definisce un campo di vettori X^v su G. Il campo ha valore $(X^v)_e = v \in T_eX$ in $e \in G$, e in generale,

$$X^v : G \longrightarrow TG, \qquad (X^v)_g := (\mathrm{d}L_g)_e v.$$

Visto che

$$L_{gh} = L_g \circ L_h \qquad \text{segue} \quad \mathrm{d}L_{hg} = \mathrm{d}L_h \circ \mathrm{d}L_g,$$

si ha:

$$(\mathrm{d}L_h)_g X_g^v = (\mathrm{d}L_h)_g(\mathrm{d}L_g)_e v = (\mathrm{d}L_{hg})_e v = (X^v)_{hg}.$$

Pertanto, i differenziali $\mathrm{d}L_h$ mandano il campo vettoriale X^v in se stesso.

In generale, un campo vettoriale X su un gruppo di Lie G è detto invariante a sinistra, se per ogni $h \in G$ si ha

$$\mathrm{d}L_h X = X, \qquad \text{cioè} \quad (\mathrm{d}L_h)_g X_g = X_{hg}$$

per ogni $h, g \in G$.

Adesso mostriamo che un campo invariante a sinistra X è sempre del tipo $X = X^v$ per un $v \in T_eG$. Dato tale X, sia $v := X_e \in T_eG$. Visto che $(\mathrm{d}L_h)_g(X_g) = X_{hg}$ troviamo, con $g = e$, che $(\mathrm{d}L_h)_e v = X_h$ per ogni $h \in G$, quindi $X = X^v$.

3.3.4 Esempio: $G \subset GL(n,\mathbb{R})$. Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(n,\mathbb{R})$, cioè, G è una sottovarietà di $GL(n,\mathbb{R})$ (un aperto di $M_n(\mathbb{R})$) e G è anche un sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$.

Allora l'applicazione $L_g : G \to G$ è data da $A \mapsto gA$ dove $g, A \in G$ e il prodotto è il prodotto di matrici. Sia $X \in T_BG$, dove adesso $T_BG \subset T_BGL(n,\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, quindi anche X è una matrice. Sia

$$\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow G\ (\subset M_n(\mathbb{R})), \qquad t \longmapsto \gamma(t), \qquad \gamma(0) = B, \quad \gamma'(0) = X,$$

un cammino che rappresenta X. Allora $(\mathrm{d}L_g)_B X$ è rappresentato dal cammino $g\gamma(t)$:

$$(\mathrm{d}L_g)_B X = \frac{\mathrm{d}g\gamma}{\mathrm{d}t}(0) = g\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(0) = gX,$$

dove abbiamo usato che $(g\gamma(t))_{ij} = \sum_k g_{ik}\gamma(t)_{kj}$ e che i coefficienti g_{ik} sono indipendenti da t, da cui $(g\gamma(t))'_{ij}(0) = \sum_k g_{ik}\gamma'(0)_{kj}$.

Il fibrato tangente TG di un gruppo di Lie $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ è banale, (vedi 3.3.2). In questo caso l'isomorfismo è dato da

$$\tau : G \times T_IG \longrightarrow TG, \qquad (A, V) \longmapsto (\mathrm{d}L_A)_I V = AV.$$

Così otteniamo, in modo simile alla descrizione di TS^n in Sezione 2.1.9:

$$TG = \{(A, W) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) : A \in G, \quad A^{-1}W \in T_IG\}.$$

In particolare, il campo invariante a sinistra su G definito da $V \in T_eG$ nel punto $A \in G$ è:

$$(X^V)_A = AV, \qquad \text{cioè} \quad (X^V)_A = \sum_{i,j=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n x_{ik}V_{kj}\Big)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \qquad (A = (x_{ij}) \in G).$$

3.3.5 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie. Per ogni $v \in T_eG$ abbiamo definito un campo vettoriale X^v, invariante a sinistra, su G. Adesso consideriamo le parentesi di Lie (vedi 2.2.2) tra due campi vettoriali siffatti. Mostriamo che $[X^v, X^w]$ è di nuovo un campo invariante a sinistra. Visto che $L_g : G \to G$ è un diffeomorfismo, i campi X e $\mathrm{d}L_g X$ sono correlati e perciò (vedi 2.2.3)

$$\mathrm{d}L_g[X^v, X^w] \;=\; [\mathrm{d}L_g X^v, \mathrm{d}L_g X^w] \;=\; [X^v, X^w],$$

cioè il campo vettoriale $[X^v, X^w]$ è invariante a sinistra.

Come per ogni campo invariante a sinistra, abbiamo allora $[X^v, X^w] = X^u$ per un certo $u \in T_eG$; infatti, $u = [X^v, X^w]_e$. Si scrive $u := [v, w]$, detto il prodotto di Lie oppure il commutatore di u e v, cioè:

$$u = [v, w] \qquad \text{se} \quad [X^v, X^w] = X^u, \qquad (u, v, w \in T_eG).$$

Lo spazio vettoriale T_eG, con questa nuova operazione $[\cdot, \cdot]$, è un esempio di un'algebra di Lie (vedi la definizione in 4.0.1).

4. Algebre di Lie

4.0.1 Definizione di algebra di Lie. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale con un'applicazione bilineare

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

che è alternante e che soddisfa l'identità di Jacobi:

$$[X, Y] = -[Y, X], \qquad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \qquad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

Esempi di algebre di Lie sono gli spazi tangenti T_eG, dove e è l'elemento neutro di un gruppo di Lie G (vedi 3.3.5) e gli spazi vettoriali $\mathcal{X}(M)$ (di dimensione infinita!) dei campi vettoriali su una varietà differenziabile (vedi 2.2.2).

4.0.2 L'algebra di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$. Lo spazio tangente $T_eGL(n, \mathbb{R})$ è lo spazio $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ perché $GL(n, \mathbb{R})$ è un aperto in $M_n(\mathbb{R})$. Adesso vogliamo determinare, per $V, W \in T_eGL(n, \mathbb{R})$ il commutatore $[V, W]$.

I campi X^V e X^W, invarianti a sinistra, sono dati da

$$(X^V)_A \;=\; (A, AV), \qquad \text{cioè} \quad X^V \;=\; \sum_{ij} (X^V)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \;=\; \sum_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} V_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}},$$

dove $A = (x_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ e $V = \sum V_{jk} \partial/\partial x_{jk}$ in $T_eGL(n, \mathbb{R})$. Similmente,

$$X^W \;=\; \sum_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} W_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Si noti che

$$\frac{\partial (X^V)_{ij}}{\partial x_{ab}} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_{ab}} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} V_{kj} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \neq i, \\ V_{bj} & \text{se} \quad a = i. \end{cases}$$

Quindi, per le parentesi di Lie di questi campi vettoriali troviamo:

$$[X^V, X^W] \;=\; \sum_{i,j}\left(\sum_{a,b}(X^V)_{ab}\frac{\partial (X^W)_{ij}}{\partial x_{ab}} \;-\; (X^W)_{ab}\frac{\partial (X^V)_{ij}}{\partial x_{ab}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Usando la formula qui sopra (si noti che $a = i$), i coefficienti sono dati da:

$$\begin{aligned}([X^V, X^W])_{ij} &= \textstyle\sum_b (X^V)_{ib}W_{bj} - (X^W)_{ib}V_{bj} \\ &= \textstyle\sum_{b,k} x_{ik}V_{kb}W_{bj} \;-\; x_{ik}W_{kb}V_{bj} \\ &= \Big(A(VW - WV)\Big)_{ij},\end{aligned}$$

quindi $[X^V, X^W]_A = (A, A(VW - WV))$. Abbiamo allora la formula:

$$[X^V, X^W] \;=\; X^{[V,W]}, \qquad \text{dove} \quad [V, W] \;:=\; VW - WV$$

cioè il commutatore su $T_eGL(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ è il commutatore delle matrici.

4.0.3 Sottogruppi e sottoalgebre. Abbiamo già visto esempi di gruppi di Lie che sono sottogruppi H di $GL(n, \mathbb{R})$, come ad esempio $SL(n, \mathbb{R})$, $SO(n)$, e $GL(m, \mathbb{C})$ nel caso $2m = n$ In questi casi l'inclusione $i : H \hookrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Questo ci permette di calcolare il prodotto di Lie su $T_eH \subset T_eGL(n, \mathbb{R})$.

Più in generale, sia $\phi : H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora $(\mathrm{d}\phi)_e$ è un omomorfismo di algebre di Lie, cioè:

$$(\mathrm{d}\phi)_e : T_eH \longrightarrow T_eG \qquad \text{soddisfa} \quad (\mathrm{d}\phi)_e[v, w] \;=\; [(\mathrm{d}\phi)_e v,\, (\mathrm{d}\phi)_e w]$$

per ogni $v, w \in T_eH$. Per verificare questo, siano $v' := (\mathrm{d}\phi)_e v$ e $w' := (\mathrm{d}\phi)_e w \in T_eG$ e siano $X^{v'}$ e $X^{w'}$ i corrispondenti campi invarianti a sinistra su G. Si noti che questi due campi sono ϕ–correlati rispettivamente con i campi vettoriali X^v, X^w su H. Infatti, visto che $X^{v'}_e = (\mathrm{d}\phi)_e v$ si ha:

$$X^{v'}_{\phi(h)} \;=\; (\mathrm{d}L_{\phi(h)})_e X^{v'}_e \;=\; (\mathrm{d}L_{\phi(h)})_e(\mathrm{d}\phi)_e v \;=\; (\mathrm{d}\phi)_h(\mathrm{d}L_h)_e v \;=\; (\mathrm{d}\phi)_h X^v_h,$$

dove abbiamo usato la relazione tra differenziali che segue da

$$L_{\phi(h)} \circ \phi \;=\; \phi \circ L_h : H \longrightarrow G, \qquad h' \longmapsto \phi(h)\phi(h') = \phi(hh'),$$

per ogni $h, h' \in H$. Perciò $[X^v, X^w]$ è ϕ-correlato con $[X^{v'}, X^{w'}]$ (vedi 2.2.3), e otteniamo:

$$(\mathrm{d}\phi)_e[X^v, X^w]_e \;=\; [X^{v'},\, X^{w'}]_e.$$

Visto che $[X^v, X^w]_e = X^{[v,w]}_e = [v, w]$, $[X^{v'}, X^{w'}]_e = X^{[v',w']}_e = [v', w']$ e che per definizione $v' := (\mathrm{d}\phi)_e v$, $w' := (\mathrm{d}\phi)_e w$, otteniamo finalmente

$$(\mathrm{d}\phi)_e[v, w] \;=\; [(\mathrm{d}\phi)_e v,\, (\mathrm{d}\phi)_e w].$$

Applicando questo risultato a una sottoalgebra di Lie T_eH di $T_eGL(n, \mathbb{R})$, dove $\phi : H \hookrightarrow G$ è l'inclusione, quindi anche $\mathrm{d}\phi$ è l'identità, troviamo che per matrici $A, B \in T_eH \subset T_eGL(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ il prodotto di Lie in T_eG coincide con il prodotto di Lie in $T_eGL(n, \mathbb{R})$: quindi $[A, B] = AB - BA$ è il commutatore delle matrici A, B.

4.0.4 L'algebra di Lie $so(n)$ di $SO(n)$. Lo spazio tangente $T_I SO(n,\mathbb{R})$ del gruppo di Lie $SO(n,\mathbb{R})$ si determina usando 1.3.3 e 2.1.8 e ponendo $A = I$:

$$T_I SO(n,\mathbb{R}) = \ker(J_I(F) : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym_n(\mathbb{R})), \qquad X \longmapsto {}^tX + X,$$

cioè

$$T_I SO(n,\mathbb{R}) = \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) :\, {}^tX = -X \,\} = Alt_n(\mathbb{R}),$$

lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ alternanti.

Si noti che per il cammino

$$\gamma :\, \mathbb{R} \longrightarrow SO(2,\mathbb{R}), \quad \tau \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\tau & -\mathrm{sen}\,\tau \\ \mathrm{sen}\,\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \qquad X := \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in T_I SO(2,\mathbb{R}),$$

e che infatti ${}^tX = -X$.

4.0.5 L'algebra di Lie $sl(n)$ di $SL(n)$. Il gruppo di Lie $SL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ è una sottovarietà di $GL(n,\mathbb{R})$ e il suo spazio tangente in $g \in SL(n,\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale (vedi 2.1.8)

$$T_g SL(n,\mathbb{R}) := \ker\Big((\mathrm{d}\det)_g : T_g GL(n,\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow T_1\mathbb{R} = \mathbb{R}\Big).$$

Per $g = I$, da 1.3.2, la matrice $(\mathrm{d}\det)_I = J_I(\det)$ ha coefficienti $(-1)^{i+j}\det(I_{ij})$, che sono zero se $i \neq j$ e 1 se $i = j$, cioè

$$(\mathrm{d}\det)_I(X) = x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{nn} =: tr(X)$$

dove $tr(X)$ è la traccia della matrice X. Perciò:

$$T_I SL(n,\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) :\; tr(X) := x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{nn} = 0\,\},$$

cioè l'algebra di Lie di $SL(n,\mathbb{R})$ sono le matrici di $M_n(\mathbb{R})$ con traccia nulla.

4.0.6 Esempio: $\mathfrak{s}l(2)$. L'algebra di Lie del gruppo $SL(2,\mathbb{R})$

$$\mathfrak{s}l(2) := \{W \in M_2(\mathbb{R}) :\; tr(W) = 0\,\}$$

ha una base data da:

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e un facile calcolo mostra che i commutatori sono dati da:

$$[X,Y] = -[Y,X] = H, \qquad [H,X] = -[X,H] = 2X, \qquad [H,Y] = -[Y,H] = -2Y,$$

(cioè $XY - YX = H$ ecc.) e gli altri commutatori sono zero: $[X,X] = [Y,Y] = [H,H] = 0$ perché $[X,X] = -[X,X]$ ecc.

4.1. **I gruppi di Lie $SU(2)$ e $SO(3)$.**

4.1.1 L'omomorfismo $\phi : SU(2) \to SO(3)$.

Sia

$$SU(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : \quad {}^t\overline{A}A = I, \quad \det(A) = 1\},$$

si può mostrare che $SU(n)$ è un gruppo di Lie.

Definiamo uno spazio vettoriale reale V di dimensione 3 nel modo seguente:

$$V := \left\{ M = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \right\} \cong (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(Si può mostrare che $V = T_I SU(2)$, ma questo non serve adesso.)

Definiamo un omomorfismo di gruppi di Lie:

$$\phi : SU(2) \longrightarrow GL(3,\mathbb{R}) \cong GL(V), \qquad \phi(A)(M) = AMA^{-1}.$$

L'applicazione det è una forma quadratica su V:

$$Q : M \longmapsto \det(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Poiché $\det(A) = 1$, si ha:

$$\det(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad \det(AMA^{-1}) = \det(A)\det(M)\det(A)^{-1} = \det(M).$$

Quindi $\phi(A) \in O(Q) \cong O(3,\mathbb{R})$ per ogni $A \in SL(2,\mathbb{C})$. Poiché $SU(2) \cong S^3$ è connesso e $\phi(1) = I$, si ha allora $\phi(SU(2)) \subset SO(3,\mathbb{R})$ (vedi sezione 4.1.3 per un argomento più elementare).

4.1.2 L'applicazione $\phi : SU(2) \to SO(3)$ è suriettiva. Prima daremo una dimostrazione veloce, che però richiede tra altro il concetto di spazio topologico connesso e delle sue proprietà; poi daremo una dimostrazione più esplicita nella Sezione 4.1.3.

Prima si verifica che $(\mathrm{d}\phi)_g : T_g SU(2) \to T_{\phi(g)} SO(3)$ è un isomorfismo per ogni $g \in SU(2)$. In realtà, essendo ϕ un omomorfismo, questo segue dal caso $g = e$. Per il Teorema di Dini, ϕ è allora un diffeomorfismo locale in ogni $g \in SU(2)$. In particolare, ϕ è un'applicazione aperta e $\phi(SU(2))$ è aperto in $SO(3)$. D'altra parte, $SU(2)$ è compatto, quindi $\phi(SU(2))$ è compatto nello spazio di Hausdorff $SO(3)$ e perciò $\phi(SU(2))$ è anche chiuso. Essendo $SO(3)$ connesso (si vede, ad esempio, sfruttando il fatto che ogni $h \in SO(3)$ è una rotazione), segue che $\phi(SU(2)) = SO(3)$.

4.1.3 La geometria della mappa ϕ. Per vedere come è fatta $\phi(A)$ per $A \in SU(2)$, scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} = a_0 I + A_0, \qquad A_0 := \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & -ia_1 \end{pmatrix} \quad (\in V).$$

Visto che $\det A = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, si può scrivere A come $A = (\cos\psi)I + (\sin\psi)R$ con

$$R \in S^2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \in V : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

È facile verificare che per ogni $R \in S^2$ si ha

$$R \in SU(2), \qquad R^2 = -I \qquad \text{e} \quad A^{-1} = {}^t\overline{A} = (cos\psi)I - (\sin\psi)R.$$

Adesso calcoliamo l'immagine di $R \in V$ rispetto all'applicazione $\phi(A)$, dove scriviamo $A = aI + bX$ con $a = \cos\psi$, $b = \operatorname{sen}\psi$ $(a^2 + b^2 = 1)$:

$$\phi(A)(R) = ARA^{-1} = (aI + bR)R(aI - bR) = (aR - bI)(aI - bR) = (a^2 + b^2)R = R.$$

Pertanto, $R \in V$ è un vettore unitario invariante per $\phi(A)$.

Ora, consideriamo prima il caso particolare per cui $R = R_1$ è $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ e A è data da

$$A = (\cos\psi)I + (\sin\psi)R_1, \qquad R_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Allora $A = \operatorname{diag}(e^{i\psi}, e^{-i\psi})$ e $AXA^{-1} = :$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\psi} & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 & e^{2i\psi}(x_2 + ix_3) \\ e^{-2i\psi}(-x_2 + ix_3) & -ix_1 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che $e^{2i\psi}(x_2 + ix_3) = ((\cos 2\psi)x_2 - (\sin 2\psi)x_2) + i((\sin 2\psi)x_2 + (\cos 2\psi)x_3)$, troviamo la relazione:

$$\phi(\cos\psi I + \sin\psi R_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ 0 & \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

cioè $\phi(\cos\psi I + \sin\psi R_1)$ è una rotazione con angolo 2ψ intorno all'asse x.

Per il caso generale, basta notare che se $R \in S^2 \subset SU(2)$, allora il polinomio caratteristico di R è $\lambda^2 + 1 = 0$. Quindi R ha due autovettori $v_\pm$ che possiamo scegliere in modo che $||v_\pm|| = 1$. Visto che $R \in SU(2)$ si ha

$$(v_+, v_-) = (Rv_+, Rv_-) = (iv+, -iv_-) = i(\overline{-i})(v_+, v_-) = -(v_+, v_-).$$

Di conseguenza, v_+ e v_- sono una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$. Perciò la matrice $(v_+ \vdots v_-)$ con colonne v_+, v_- è una matrice in $U(2)$. Moltiplicando eventualmente v_+ per un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, otteniamo una matrice $Q \in SU(2)$ le cui colonne sono autovettori di R, cioè si ha:

$$RQ = Q\operatorname{diag}(i, -i) \qquad \text{cioè} \quad RQ = QR_1, \qquad Q \in SU(2).$$

Visto che ϕ è un omomorfismo, abbiamo allora $\phi(R)\phi(Q) = \phi(Q)\phi(R_1)$. Sia adesso $A = \cos\psi I + \sin\psi R$. Se $\phi(A) \in SO(3)$, risulta che $\phi(A) \in O(3)$ e $\phi(A) = \phi(Q(aI + bR_1)Q)^{-1} = \phi(Q)\phi(aI + bR_1)\phi(Q)^{-1}$, mostrando che $\phi(A)$ e $\phi(aI + bR_1)$ hanno lo stesso determinante. Abbiamo già visto che R è invariante per $\phi(A)$ e quindi l'asse della rotazione $\phi(A)$ è generato da R. Inoltre, se $v \in \mathbb{R}^3$ è perpendicolare all'asse R di $\phi(A)$, allora l'angolo formato da v e $\phi(A)v$ è determinato dal prodotto scalare

$$(v, \phi(A)v) = (\phi(Q)^{-1}v, \phi(Q)^{-1}\phi(A)v) = (\phi(Q)^{-1}v, \phi(aI + bR_1)\phi(Q)^{-1}v).$$

Abbiamo usato che $\phi(Q) \in O(3)$, e quindi quest'angolo è l'angolo tra $\phi(Q)^{-1}v$ e $\phi(aI + bR_1)\phi(Q)^{-1}v$ che è ψ. Adesso è facile verificare che $\ker(\phi) = \{\pm I\}$: se $\phi(A) = I$ scriviamo come sopra $A = \cos\psi I + \sin\psi R$ e troviamo che 2ψ è un multiplo di 2π, quindi $\psi = 0, \pi$ (a meno di multipli di 2π) e quindi $A = \pm I$.

4.2. **L'applicazione esponenziale.**

4.2.1 L'applicazione esponenziale. Dato $X \in \mathfrak{g}$ con $X \neq 0$, si può mostrare che esiste un unico cammino

$$\gamma = \gamma_X : \mathbb{R} \longrightarrow G, \qquad \text{t.c.} \quad \gamma_* = X, \quad \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t) \qquad (\forall s, t \in \mathbb{R}),$$

cioè γ è omomorfismo di gruppi di Lie, in particolare $\gamma(0) = e$.

L'applicazione esponenziale è definita da:

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G, \qquad \exp(tX) := \gamma_X(t),$$

quindi la restrizione di exp alla retta $< X > \subset \mathfrak{g}$ è un omomorfismo per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Inoltre, si ha che

$$(\mathrm{d}\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG = \mathfrak{g}$$

è l'identità. L'applicazione exp è l'unica applicazione con queste due proprietà. Se G è connesso, si può mostrare che G è generato da $exp(U)$, dove $U \subset \mathfrak{g}$ è un intorno aperto di $0 \in \mathfrak{g}$.

Se G è un sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$, allora $\mathfrak{g} \subset M(n, \mathbb{R})$ e si ha la formula esplicita:

$$\exp tX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}, \qquad (X \in M(n, \mathbb{R}) = T_eGL(n, \mathbb{R})).$$

Si noti che si ha proprio $\gamma_* := (\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \exp tX)_{t=0} = X$.

In generale, *non* vale $\exp(X + Y) = (\exp X)(\exp Y)$ perché $XY \neq YX$. La formula di Campbell-Baker-Haussdorf dà una formula per $(\exp X)(\exp Y)$ come exp di una somma di commutatori tra X e Y:

$$(\exp X)(\exp Y) = \exp(X + Y + (1/2)[X, Y] + (1/12)[X, [X, Y]] - (1/12)[Y, [X, Y]] + \ldots).$$

Per calcolare exp si può usare che $\exp(SXS^{-1}) = S(\exp(X))S^{-1}$ (come segue dalla serie per exp); quindi la forma di Jordan di X determina essenzialmente $\exp(X)$.

Si può mostrare che poiché $(\mathrm{d}\exp)_0$ è un isomorfismo, l'immagine della mappa esponenziale contiene un aperto U di G tale che $e \in U$. La formula qui sopra mostra che il prodotto μ in un tale aperto di G è determinato dal prodotto nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Questo ci permette di mostrare che un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione finita determina in modo unico un gruppo di Lie G, che è connesso e semplicemente connesso. Queste condizioni su G sono importanti, per esempio l'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ (con prodotto banale) è l'algebra di Lie di $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (non connesso), di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (connesso ma non semplicemente connesso) e di $\mathbb{R}$ (connesso e semplicemente connesso e l'unico tale G con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, a meno di isomorfismo di gruppi di Lie).

4.2.2 Esempi dell'applicazione esponenziale. Si ha:

$$\exp(tX) = diag(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}), \qquad \text{se} \quad X = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M(n, \mathbb{R})$$

perché $X^k = diag(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. In particolare, $\det(\exp(tX)) = e^{t(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = e^{Tr(tX)}$ dove Tr è la traccia. In particolare $Tr(X) = 0$ implica $\exp(tX) \in SL(n, \mathbb{R})$.

Se ${}^tX = -X$, cioè $X \in so(n)$, l'algebra di Lie di $SO(n)$ (vedi 4.0.4), allora ${}^t\exp(X) = \exp({}^tX) = \exp(-X) = (\exp(X))^{-1}$, quindi $\exp(X) \in SO(n)$.

Se $X \in M(n, \mathbb{R})$ è nilpotente, allora $X^N = 0$ per un certo N e quindi $\exp(X) = I + X + X^2/2! + \ldots + X^N/N!$, una somma finita. Per esempio,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^3 = 0,$$

quindi si ha:

$$\exp(tX) = I + tX + t^2X^2/2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia (vedi 4.0.4)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in T_I SO(2, \mathbb{R}), \qquad \text{si noti:} \quad X^2 = -I, \quad X^{2k} = (-1)^k I, \quad X^{2k+1} = (-1)^k X.$$

L'esponenziale di X è allora

$$\begin{aligned} \exp(tX) &= \textstyle\sum_n \frac{t^n X^n}{n!} \\ &= \left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}\right) I + \left(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) X \\ &= (\cos t)I + (\operatorname{sen} t)X \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.2.3 L'applicazione esponenziale per $SO(3)$. Sia $A \in T_I SO(3)$ una matrice antisimmetrica reale della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Si noti che

$$A^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ba & ac \\ ba & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{e che} \quad A^3 = -A\ .$$

Quindi si ha: $A^4 = AA^3 = -A^2$, $A^5 = AA^4 = -A^3 = A$, $\ldots$ e in generale:

$$A^{4k+1} = A, \quad A^{4k+3} = -A, \quad A^{4k+2} = A^2, \quad A^{4k} = -A^2, \qquad k \geq 1\ .$$

L'esponenziale di A è dato da

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \textstyle\sum_n \frac{t^n A^n}{n!} \\ &= I + \left(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) A + \left(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k}}{(2k)!}\right) A^2 \\ &= I + (\operatorname{sen} t)A + (1 - \cos t)A^2. \end{aligned}$$

Sia $v := (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, allora si verifica che $Av = 0$ (più in generale, per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ si ha $Ax = v \times x$, il prodotto vettoriale). Perciò $\exp(tA)v = (I + (\operatorname{sen} t)A + (1 - \cos t)A^2)v = v$. Visto che $\exp(tA) \in SO(3)$, segue che $\exp(tA)$ induce una rotazione nel piano $v^\perp$. Gli autovalore di $\exp(tA)$ sono allora $1, \cos\phi \pm i\operatorname{sen}\phi$ dove ϕ è l'angolo della rotazione. La somma dei autovalori di $\exp(tA)$ è quindi $1 + 2\cos\phi$, d'altra parte è anche

$$Tr(\exp(tA)) = Tr(I) + (\operatorname{sen} t) - Tr(A) + (1 - \cos t)Tr(A^2) = 3 + 0 + (1 - \cos t)(-2) = 1 + 2\cos t$$

quindi $\phi = \pm t$, dove abbiamo usato che $Tr(A^2) = -2(a^2 + b^2 + c^2) = -2$.

5. Forme differenziali.

5.1. Algebra multilineare.

5.1.1 Le k-forme alternanti. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di $\dim V = n$. Una k-forma alternante su V è una mappa

$$f : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che è lineare in ogni variabile tale che

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0 \qquad \text{se} \quad v_i = v_j \quad \text{con} \quad i \neq j.$$

Si mostra che l'ultima proprietà è equivalente a

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

per ogni permutazione σ, dove $\epsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ è il segno della permutazione.

L'insieme delle k-forme alternanti su V, scritto $Alt^k(V)$, è una spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con operazioni

$$(\lambda f + \mu g)(v_1, \ldots, v_k) = \lambda f(v_1, \ldots, v_k) + \mu g(v_1, \ldots, v_k) \qquad (f, g \in Alt^k(V),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Si pone $Alt^0(V) = \mathbb{R}$ e si noti che $Alt^1(V) = V^*$, lo spazio duale di V.

Si può mostrare che esiste un prodotto, detto prodotto esterno, cioè una mappa bilineare

$$\wedge : Alt^r(V) \times Alt^s(V) : \longrightarrow Alt^{r+s}(V), \qquad (f, g) \longmapsto f \wedge g,$$

tale che

$$f \wedge g = (-1)^{rs} g \wedge f, \qquad f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h.$$

In più, se $f_1, \ldots, f_k \in Alt^1(V) = V^*$ e $v_1, \ldots, v_k \in V$ allora la k-forma $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_k \in Alt^k(V)$ è data da

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det(f_i(v_j)),$$

dove si prende il determinante della matrice $k \times k$ con coefficienti $f_i(v_j) \in \mathbb{R}$.

Se $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ è una base di V^*, allora si mostra che gli

$$\epsilon_I := \epsilon_{i_1} \wedge \epsilon_{i_2} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{i_k}, \qquad I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

sono una base di $Alt^k(V)$. In particolare $\dim Alt^k(V) = \binom{n}{k}$, il coefficiente binomiale. Per questo motivo si dice che $Alt^k(V)$ è il k-esimo prodotto esterno di V^*,

$$\wedge^k V^* := Alt^k(V).$$

5.2. **Le k-forme differenziali.**

5.2.1 Il differenziale di una funzione liscia. Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione liscia. Per $p \in M$, il suo differenziale è una applicazione lineare

$$(\mathrm{d}f)_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}, \qquad \text{quindi} \quad (\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M := \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Qui sfruttiamo l'isomorfismo $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ di 2.1.4 che manda $w := c\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ in c. Si noti che $w(t) = c \cdot 1 = c$, ottenendo il risultato importante:

$$(\mathrm{d}f)_p(v) \;=\; v(f).$$

Infatti, si ha $(\mathrm{d}f)_p(v) = c\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ con

$$c \;=\; (\mathrm{d}f)_p(v)(t) \;=\; v(t \circ f) \;=\; v(f),$$

essendo $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'identità.

Il duale $T_p^*M := (T_pM)^*$ dello spazio tangente T_pM è detto spazio cotangente. Ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, p)$ definisce allora un elemento $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M$.

Sia $(U, x = (x_1, \ldots, x_m))$ una carta di M con $p \in U$; allora i $(\partial/\partial x_i)_{|p}$ sono una base di T_pM. Per $f \in \mathcal{C}^\infty(M, p)$ si ha (dove abbiamo introdotto una notazione più comoda):

$$(\mathrm{d}f)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{|p}\right) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{|p}(f) \;=:\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Inoltre, ci sono i differenziali $(\mathrm{d}x_i)_p$ nello spazio duale T_p^*M. Poiché

$$(\mathrm{d}x_i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}_{|p}\right) \;=\; \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) \;=\; \delta_{ij},$$

i $(\mathrm{d}x_i)_p \in T_p^*M$ definiscono la base duale di T_p^*M.

L'elemento $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M$ è la seguente combinazione lineare dei $(\mathrm{d}x_i)_p$:

$$(\mathrm{d}f)_p \;=\; \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(\mathrm{d}x_i)_p,$$

come si verifica facilmente valutando entrambi i membri sui vettori tangenti $(\partial/\partial x_j)_{|p}$ per $j = 1, \ldots, n$.

5.2.2 Il fibrato delle k-forme. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m. Per $p \in M$ abbiamo definito lo spazio cotangente $T_p^*M = Hom(T_pM, \mathbb{R})$ e il suo k-esimo prodotto esterno $\wedge^k T_p^*M$, uno spazio vettoriale di dimensione $\binom{m}{k}$. Similmente alla definizione del fibrato tangente si può definire una varietà differenziabile, il fibrato delle k-forme,

$$\wedge^k(M) := \coprod_{p \in M} \wedge^k T_p^*M, \qquad \pi : \wedge^k(M) \longrightarrow M,$$

dove π è un'applicazione liscia tale che $\pi(\wedge^k T_p^*M) = p$. Definiamo inoltre $\wedge^0(M) = M \times \mathbb{R}$.

Una k-forma differenziale su un aperto V di M è un'applicazione liscia

$$\omega : V \longrightarrow \wedge^k(V) := \pi^{-1}(V) \qquad (\subset \wedge^k(M))$$

tale che $\pi \circ \omega = id_V$, cioè, per ogni $p \in V$ si ha che $\omega(p) \in \pi^{-1}(p) = \wedge^k T_p^* M$. Se $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ è una carta di M con $U \subset V$, i differenziali $(\mathrm{d}x_i)_p$ sono una base di $T_p^* M$, quindi

$$\omega(p) = \sum_{I, \sharp I = k} a_I(p) \mathrm{d}x_I \qquad (\in \wedge^k T_p^* M).$$

La forma differenziale ω è liscia se, e solo se, le funzioni a_I sono lisce. Una 0-forma è semplicemente una funzione liscia $f : V \to \mathbb{R}$.

L'insieme delle k-forme differenziali su V si denota con $\mathcal{E}^k(V)$ e si ha $\mathcal{E}^0(V) = \mathcal{C}^\infty(V)$. Per $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ e $\omega, \theta \in \mathcal{E}^k(V)$ si definisce una k-forma nel modo seguente:

$$(f\omega + g\theta)(p) = f(p)\omega(p) + g(p)\theta(p) \qquad (\in \wedge^k T_p^* M).$$

Data una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ e un campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(M)$ si definisce una funzione liscia $\omega(X) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tramite $\omega(X)(p) := \omega(p)(X(p))$. Più in generale, una k-forma $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ e k campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ definiscono una funzione liscia $\omega(X_1, \ldots, X_k)$, localmente tramite $\omega(X_1, \ldots, X_k) = \sum a_I(\mathrm{d}x_I(X_1, \ldots X_k))$:

$$\omega(X_1, \ldots, X_k) \ \in \mathcal{C}^\infty(M) \qquad \text{con} \quad (\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})(X_1, \ldots, X_k) = \det(A), \quad A = (\mathrm{d}x_{i_a}(X_b)),$$

dove $1 \leq a, b \leq k$ (vedi 5.1.1). In particolare:

$$(\omega \wedge \theta)(X, Y) \ = \ \omega(X)\theta(Y) \ - \ \omega(Y)\theta(X) \qquad (\omega, \theta \in \mathcal{E}^1(V), \quad X, Y \in \mathcal{X}(V)),$$

che nel caso $\omega = \mathrm{d}f$ e $\theta = \mathrm{d}g$ con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ diventa

$$\big((\mathrm{d}f) \wedge (\mathrm{d}g)\big)(X, Y) \ = \ X(f)Y(g) \ - \ Y(f)X(g),$$

perché $(\mathrm{d}f)_p(X_p) = X_p(f)$.

5.2.3 La derivata esterna. Sia V un aperto di una varietà M. Per $f \in \mathcal{C}^\infty(V) = \mathcal{E}^0(V)$ e $p \in V$ abbiamo definito il differenziale $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^* M$. In questo modo otteniamo un'applicazione

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}^0 : \mathcal{E}^0(V) \longrightarrow \mathcal{E}^1(V), \qquad (\mathrm{d}^0 f)(p) = (\mathrm{d}f)_p \qquad (\in T_p^* M).$$

Si può mostrare che per ogni $k \geq 0$ esiste un'unica applicazione

$$\mathrm{d}^k : \mathcal{E}^k(V) \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}(V)$$

tale che:

(1) $\mathrm{d}^0 = \mathrm{d}$,
(2) d^k è $\mathbb{R}$-lineare,
(3) $\mathrm{d}^k(\omega \wedge \theta) = (\mathrm{d}^a \omega) \wedge \theta + (-1)^a \omega \wedge (\mathrm{d}^b \theta)$ per $\omega \in \mathcal{E}^a(V)$, $\theta \in \mathcal{E}^b(V)$ e $k = a + b$,
(4) $\mathrm{d}^{k+1} \circ \mathrm{d}^k = 0$.

L'unicità di d^k implica che per $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$ e $U \subset V$ un aperto si ha: $\mathrm{d}^k(\omega)_{|U} = \mathrm{d}^k(\omega_{|U})$, dove $\omega_{|U} \in \mathcal{E}^k(U)$ e le derivate d^k sono rispettivamente su $\mathcal{E}^k(V)$ e $\mathcal{E}^k(U)$. Questo permette di calcolare la derivata esterna su carte locali.

Sia $(U, \phi = (x_1, \ldots, x_m))$ una carta di M con $U \subset V$, e sia

$$\omega = \sum_{I, \sharp I = k} a_I \mathrm{d}x_I \qquad (\in \mathcal{E}^k(U)),$$

con $a_I \in \mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{E}^0(U)$. Per calcolare $\mathrm{d}^k\omega$ sfruttiamo prima il fatto che d^k è $\mathbb{R}$-lineare

$$\mathrm{d}^k\omega = \mathrm{d}^k(\sum_{I,\sharp I=k} a_I \mathrm{d}x_I) = \sum_{I,\sharp I=k} \mathrm{d}^k(a_I \mathrm{d}x_I).$$

Applichiamo (3) con $a = 0, b = k$:

$$\mathrm{d}^k(a_I\mathrm{d}x_I) = (\mathrm{d}^0 a_I) \wedge \mathrm{d}x_I + a_I \mathrm{d}^k(\mathrm{d}x_I).$$

Poi, mostriamo che $\mathrm{d}^k(\mathrm{d}x_I) = 0$, usando ancora (3), con $a = 1, b = k-1$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}^k(\mathrm{d}x_I) & = & \mathrm{d}^k(\mathrm{d}^0x_{i_1} \wedge \mathrm{d}^0x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}^0x_{i_k}) \\ & = & (\mathrm{d}^1\mathrm{d}^0x_{i_1}) \wedge \mathrm{d}^0x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}^0x_{i_k} - \mathrm{d}^0x_{i_1} \wedge \mathrm{d}^{k-1}(\mathrm{d}^0x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}^0x_{i_k}) \end{array}$$

Per (4), $\mathrm{d}^1\mathrm{d}^0 = 0$. Usando (3) $(k-1)$-volte si trova che $\mathrm{d}^{k-1}(\mathrm{d}^0x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}^0x_{i_k}) = 0$. Si ottiene così:

$$d^k\omega = \mathrm{d}^k(\sum_{I,\sharp I=k} a_I \mathrm{d}x_I) = \sum_{I,\sharp I=k} (\mathrm{d}a_I) \wedge \mathrm{d}x_I.$$

5.2.4 Una formula di Cartan. Una formula di Cartan permette di determinare comodamente il calcolo della derivata esterna di una forma differenziale. Sia ω una 1-forma su M e $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ due campi vettoriali. Allora vale la seguente *formula di Cartan*:

$$(\mathrm{d}\omega)(X,Y) \,=\, X(\omega(Y)) \,-\, Y(\omega(X)) \,-\, \omega([X,Y]) \;.$$

La dimostrazione si ottiene direttamente in carte locali, valutando entrambi i membri e osservando che coincidono. Si noti che se la formula vale per $\omega = \omega_1, \omega_2$, allora vale anche per $\omega = \omega_1 + \omega_2$; quindi basta verificarla nel caso $\omega = f\mathrm{d}x_k$ con $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. In particolare, si ha:

$$\mathrm{d}\omega \,=\, \mathrm{d}(f\mathrm{d}x_k) \,=\, (\mathrm{d}f) \wedge (\mathrm{d}x_k).$$

Per campi $X = \sum_i X_i\partial/\partial x_i$: $Y = \sum_j Y_j\partial/\partial x_j$ si ha

$$(\mathrm{d}\omega)(X,Y) \,=\, (\mathrm{d}f)(X)(\mathrm{d}x_k)(Y) \,-\, (\mathrm{d}f)(Y)(\mathrm{d}x_k)(X) \,=\, X(f)Y_k - Y(f)X_k.$$

D'altra parte, usando la regola di Leibniz per campi vettoriali:

$$X(\omega(Y)) \,=\, X(fY_k) \,=\, X(f)Y_k \,+\, fX(Y_k), \qquad Y(\omega(X)) \,=\, Y(f)X_k \,+\, fY(X_k)$$

e, usando la formula per le parentesi di Lie, si trova $\omega([X,Y]) =$

$$= (f\mathrm{d}x_k)\Big(\sum_i(\sum_j X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j})\Big)\frac{\partial}{\partial x_i} \,=\, f\Big(\sum_j X_j\frac{\partial Y_k}{\partial x_j} - Y_j\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\Big) \,=\, fX(Y_k) \,-\, fY(X_k),$$

da cui vale la formula di Cartan.

5.2.5 Il pull-back di forme differenziali. Sia $f : M \to N$ un'applicazione liscia tra varietà differenziabili. Allora f definisce un'applicazione lineare, il pull-back,

$$f^* : \mathcal{E}^k(N) \longrightarrow \mathcal{E}^k(M), \qquad (f^*\theta)(X_1,\ldots,X_k) := \theta((\mathrm{d}f)X_1,\ldots,(\mathrm{d}f)X_k),$$

dove $\theta \in \mathcal{E}^k(N)$ e $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{X}(M)$.

Si può mostrare che la derivata esterna è compatibile con il pull-back e il prodotto esterno '$\wedge$', cioè:

$$f^*(\mathrm{d}\theta) \;=\; \mathrm{d}(f^*\theta), \qquad f^*(\omega\wedge\theta) \;=\; (f^*\omega)\wedge(f^*\theta).$$

Consideriamo per esempio il caso in cui $\theta = g$ sia una 0-forma, cioè $g \in \mathcal{E}^0(N)$ è una funzione liscia su N. Allora $f^*g = g\circ f$ e per ogni $p \in M$ e ogni $v \in T_pM$ si ha:

$$(\mathrm{d}f^*g)_p(v) \;=\; (\mathrm{d}\, g\circ f)_p(v) \;=\; (\mathrm{d}g)_{f(p)}((\mathrm{d}f)_p(v)) \;=\; (f^*(\mathrm{d}g))_p(v),$$

quindi vale $f^*(\mathrm{d}\theta) \;=\; \mathrm{d}(f^*\theta)$ per 0-forme θ.

5.2.6 Forme differenziali su $\mathbb{R}^3$. Sia $M = \mathbb{R}^3$ e sia $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^3)$, cioè $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sia una funzione liscia. Allora

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i. \qquad \text{Si ricordi} \quad \mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

Quindi d^0 e grad coincidono, se identifichiamo 1-forme con campi vettoriali in modo ovvio:

$$\mathcal{E}^1(\mathbb{R}^3) \;\stackrel{\cong}{\longrightarrow}\; \mathcal{X}(\mathbb{R}^3), \qquad f\mathrm{d}x_1 + g\mathrm{d}x_2 + h\mathrm{d}x_3 \;\longmapsto\; (f,g,h).$$

Sia $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^3)$, diciamo $\omega = g\mathrm{d}x_1 + h\mathrm{d}x_2 + k\mathrm{d}x_3$ con $g,h,k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dunque si ha, con $g_i = \partial g/\partial x_i$ ecc.:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{d}^1\omega &=& \mathrm{d}^1(g\mathrm{d}x_1 + h\mathrm{d}x_2 + k\mathrm{d}x_3)\\
&=& (g_1\mathrm{d}x_1 + g_2\mathrm{d}x_2 + g_3\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_1 + \ldots + (k_1\mathrm{d}x_1 + k_2\mathrm{d}x_2 + k_3\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_3\\
&=& (h_1-g_2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + (k_1-g_3)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + (k_2-h_3)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3
\end{array}$$

dove abbiamo usato $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$. Adesso identifichiamo 2-forme con campi vettoriali nel modo seguente

$$\mathcal{E}^2(\mathbb{R}^3) \;\stackrel{\cong}{\longrightarrow}\; \mathcal{X}(\mathbb{R}^3), \qquad p\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + q\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + r\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 \;\longmapsto\; (r,-q,p).$$

Allora il d^1 su 1-forme coincide con l'operatore rot su campi vettoriali:

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} g\\ h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2-h_3\\ -(k_1-g_3)\\ h_1-g_2\end{pmatrix}.$$

In più, $\mathrm{d}^1\mathrm{d}^0 = 0$ corrisponde al fatto che $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Sia $\theta \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^3)$, diciamo $\theta = p\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + q\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + r\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$ con $p,q,r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si ha:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{d}^2\theta &=& \mathrm{d}^2(p\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + q\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3 + r\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)\\
&=& (p_1\mathrm{d}x_1 + p_2\mathrm{d}x_2 + p_3\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + \ldots + (r_1\mathrm{d}x_1 + r_2\mathrm{d}x_2 + r_3\mathrm{d}x_3)\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\
&=& (p_3 - q_2 + r_1)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3.
\end{array}$$

Se identifichiamo le 3-forme con le funzioni lisce nel modo seguente

$$\mathcal{E}^3(\mathbb{R}^3) \;\stackrel{\cong}{\longrightarrow}\; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad f\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 \;\longmapsto\; f,$$

allora, poiché θ corrisponde al campo $(r,-q,p)$ e

$$\mathrm{div}(r,-q,p) = r_1 - q_2 + p_3,$$

il d^2 su 2-forme coincide con l'operatore div su campi vettoriali e $\mathrm{d}^2\mathrm{d}^1 = 0$ corrisponde al fatto che $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(f,g,h)) = 0$ per ogni $f,g,h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Usando le corrispondenze qui sopra, otteniamo allora il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}^0} & \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}^1} & \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}^2} & \mathcal{E}^3(\mathbb{R}^3) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)
\end{array}$$

dove le applicazioni verticali sono come sopra.

5.3. **Il fibrato cotangente di un gruppo di Lie e l'equazione di Maurer-Cartan.**

5.3.1 La 1-forma canonica su G. Sia G un gruppo di Lie, TG il suo fibrato tangente e T^*G il suo fibrato cotangente. Abbiamo visto nella Sezione 3.3.2 che $TG \cong G \times T_eG$ è un fibrato banale:

$$\tau : G \times T_eG \xrightarrow{\cong} TG, \qquad (g,v) \longmapsto (\mathrm{d}L_g)_e v.$$

Questo permette di definire una 1-forma canonica Θ su G a valori in $T_eG = \mathfrak{g}$ (invece di $\mathbb{R}$), cioè, per ogni $g \in G$ una mappa naturale

$$\Theta_g : T_gG \longrightarrow T_eG, \qquad w \longmapsto \Theta_g(w) = v \qquad \text{se} \quad w = (\mathrm{d}L_g)_e v.$$

Quindi la mappa lineare $\Theta_g : T_gG \to T_eG$ è semplicemente la proiezione sul secondo fattore in $TG = G \times T_eG$. Visto che $v = (\mathrm{d}L_g)_e^{-1} w = (\mathrm{d}L_{g^{-1}})_g w$, possiamo definire Θ anche tramite la formula (vedi [N1], (4.8.1)):

$$\Theta_g(w) = (\mathrm{d}L_{g^{-1}})_g w, \qquad (w \in T_gG).$$

La 1-forma Θ è invariante a sinistra:

$$(L_g)^*\Theta = \Theta$$

perché per ogni $h \in G$ e ogni vettore tangente $X_h \in T_hG$ si ha:

$$((L_g)^*\Theta)_h(X_h) = \Theta_{gh}((\mathrm{d}L_g)_h X_h) = (\mathrm{d}L_{(gh)^{-1}})_{gh}((\mathrm{d}L_g)_h X_h) = (\mathrm{d}L_{h^{-1}})_h X_h = \Theta_h(X_h).$$

Qui abbiamo usato che $L_{(gh)^{-1}} = L_{h^{-1}g^{-1}}$, e quindi $\mathrm{d}L_{(gh)^{-1}} = \mathrm{d}L_{h^{-1}}\mathrm{d}L_{g^{-1}}$.

Se $X \in \Gamma(TG)$ è un campo vettoriale su G, allora $\Theta(X)$ è una funzione su G a valori in T_eG:

$$\Theta(X) : G \longrightarrow T_eG, \qquad (\Theta(X))(g) := \Theta_g(X_g).$$

Se $X = X^v$ è un campo invariante a sinistra, allora $X^v_g = (g, X) \in G \times T_eG$ e perciò $\Theta_g(X^v_g) = v$ per ogni $g \in G$. In questo caso, la funzione $\Theta(X^v) = v$ è costante, con valore $v \in T_eG$.

5.3.2 L'equazione di Maurer-Cartan. Data una 1-forma Ω su G con valori in T_eG, si può definire la sua derivata esterna, una 2-forma su G con valori in T_eG nel modo seguente. Sia $e_1, \ldots, e_n$ una base di T_eG. Per $g \in G$ e $w \in T_gG$ si può scrivere $\Omega_g(w) \in T_eG$ in componenti:

$$\Omega_g(w) = \sum_{i=1}^n (\Omega_i)_g(w) e_i, \qquad ((\Omega_i)_g(w) \in \mathbb{R}).$$

È facile verificare che per ogni $g \in G$ l'applicazione $T_gG \to \mathbb{R}$, $w \mapsto (\Omega_i)_g(w)$ è lineare e dipende in modo liscio da g, quindi ogni Ω_i è una 1-forma liscia su G (a valori in $\mathbb{R}$). Si scrive $\Omega = \sum_i \Omega_i e_i$. La derivata esterna di Ω è adesso la combinazione lineare delle 2-forme $\mathrm{d}\Omega_i$:

$$\mathrm{d}\Omega \;:=\; \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}\Omega_i)e_i.$$

Se X, Y sono campi vettoriali su G, allora per ogni $g \in G$ otteniamo $\Omega_g(X_g)$, $\Omega_g(Y_g) \in T_eG$ e quindi otteniamo due funzioni lisce su G a valori in T_eG, cioè

$$\Omega(X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(X)e_i, \qquad \Omega(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(Y)e_i.$$

Possiamo applicare i campi Y, X rispettivamente a queste funzioni e ottenere nuove funzioni nel modo seguente:

$$Y(\Omega(X)) \;=\; \sum_{i=1}^{n} Y(\Omega_i(X))e_i, \qquad X(\Omega(Y)) \;=\; \sum_{i=1}^{n} X(\Omega_i(Y))e_i.$$

Poiché queste operazioni sono fatte sulle componenti, vale la formula di Cartan (vedi 5.2.4 per una formula simile):

$$(\mathrm{d}\Omega)(X,Y) \;=\; X(\Omega(Y)) \;-\; Y(\Omega(X)) \;-\; \Omega([X,Y]) \qquad (X, Y \;\in \Gamma(TG)).$$

Il prodotto esterno di due 1-forme Ω, Ψ su G a valori in T_eG è la 2-forma su G a valori in T_eG definita da:

$$(\Omega \wedge \Psi)(X,Y) \;:=\; [\Omega(X), \Psi(Y)] \;-\; [\Omega(Y), \Psi(X)],$$

dove $[-,-]$ è il commutatore su T_eG (vedi [N1], Lemma 4.10.5).

Con queste definizioni è facile dimostrare l'equazione di Maurer-Cartan per la 1-forma canonica Θ (definito in Sezione 5.3.1):

$$\mathrm{d}\Theta \;+\; \frac{1}{2}\Theta \wedge \Theta \;=\; 0.$$

Infatti, basta dimostrarla per campi di vettori X, Y invarianti a sinistra. Se $X = X^v$ e $Y = X^w$ con $v, w \in T_eG$, allora $\Theta(X^v) = v$ e $\Theta(X^w) = w$, che sono costanti, e perciò $X^v(\Theta(X^w)) = 0 = X^w(\Theta(X^v))$. Di conseguenza, si ha:

$$(\mathrm{d}\Theta)(X^v, X^w) \;=\; 0 - 0 - \Theta([X^v, X^w]) \;=\; -\Theta(X^{[v,w]}) \;=\; -[v,w].$$

D'altra parte, vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{1}{2}(\Theta \wedge \Theta)(X^v, X^w) \;=\; \frac{1}{2}([\Theta(X^v), \Theta(X^w)] - [\Theta(X^w), \Theta(X^v)]) \;=\; \frac{1}{2}([v,w] - [w,v]) \;=\; [v,w],$$

da cui segue l'equazione di Maurer-Cartan.

6. Fibrati principali e connessioni

6.1. **Fibrati principali.**

6.1.1 L'azione di un gruppo di Lie su una varietà. Sia P una varietà liscia e sia G un gruppo di Lie. Un'azione a destra di G su P è un'applicazione liscia

$$\sigma : P \times G \longrightarrow P, \qquad (p, g) \longmapsto pg := \sigma(p, g)$$

tale che

(1) $pe = p$ per ogni $p \in P$, dove e è l'elemento neutro di G;
(2) $(pg)h = p(gh)$ per ogni $p \in P$ e ogni $g, h \in G$.

In particolare $p = pe = p(gg^{-1}) = (pg)g^{-1}$. Per ogni $g \in G$, la restrizione R_g di σ, definita nel modo seguente:

$$R_g := \sigma_{|P\times\{g\}} : P \longrightarrow P, \qquad p \longmapsto pg,$$

ha inversa $R_{g^{-1}}$. Essendo σ liscia, anche R_g è liscia e quindi è un diffeomorfismo.

Un'azione σ è detta libera se $pg = p$ implica $g = e$, cioè se $g \neq e$ allora $pg \neq p$. Un'azione σ è detta transitiva se dato $p, q \in P$ esiste un $g \in G$ tale che $pg = q$.

Un esempio di un'azione a destra è dato da $\sigma = \mu : G \times G \to G$, il prodotto del gruppo G, dove $P = G$. Quest'azione è libera e transitiva. Un altro esempio è dato da $G = SL(n, \mathbb{R})$ che agisce su $P = \mathbb{R}^n$ per $xA := A^{-1}x$, l'inversa serve per avere

$$x(AB) = (AB)^{-1}x = (B^{-1}A^{-1})x = B^{-1}(A^{-1}x) = (xA)B.$$

Quest'azione non è libera ($0A = 0$ per ogni $A \in G$) e non è transitiva: se $x \neq 0$ non esiste un $A \in G$ tale che $0A = x$.

6.1.2 Definizione di fibrato principale. Sia M una varietà liscia e G un gruppo di Lie. Un fibrato principale su M con gruppo G è dato da una varietà P con proiezione liscia (suriettiva) π e da un'azione a destra σ:

$$\pi : P \longrightarrow M, \qquad \sigma : P \times G \longrightarrow P$$

tale che:

(1) G agisce liberamente su P;
(2) G preserva le fibre $P_x := \pi^{-1}(x)$ di π: $\pi(pg) = \pi(p)$ per ogni $p \in P$ e $g \in G$, e G è transitivo su ogni fibra di π;
(3) $\pi : P \to M$ è localmente banale, cioè per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x e esiste un diffeomorfismo
$$\Psi : P_U := \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G,$$
che preserva le fibre: $\Psi(p) = (\pi(p), \psi(p))$ per un'applicazione $\psi : P \to G$. Inoltre, si richiede che $\Psi(pg) = (\pi(p), \psi(pg))$ sia uguale a $(\pi(p), \psi(p)g)$, dove il prodotto $\psi(p)g$ è un elemento di G.

6.1.3 Esempi di fibrati principali. Un esempio facile di un fibrato principale è il fibrato banale (o prodotto):
$$\pi : P = M \times G \longrightarrow M, \qquad (x, g) \longmapsto x.$$
L'azione di G su P è data da $(x, g)h := (x, gh)$.

Il fibrato di Hopf, vedi Sezione 6.3, è un fibrato principale $\pi : S^3 \to S^2$ con gruppo di Lie $G = U(1) \cong S^1$. Usando per esempio la coomologia di de Rham, oppure il gruppo fondamentale, si può mostrare che $S^3 \ncong S^2 \times S^1$ e quindi questo fibrato non è banale.

6.1.4 I campi fondamentali su un fibrato principale. Sia $\pi : P \to M$ un fibrato principale su una varietà liscia M con gruppo di Lie G. Per $v \in T_eG$ definiamo un campo vettoriale $v^\sharp$, detto fondamentale, su P nel modo seguente. Sia γ un cammino in G che rappresenta v. In altri termini, $\gamma(0) = e\,(\in G)$, $\gamma'(0) := \gamma_* = v$; ad esempio $\gamma(t) = exp(tv)$. Per ogni $p \in P$ otteniamo un cammino $\gamma_p(t) := p\gamma(t)$ in P e definiamo $(v^\sharp)_p := \gamma_p'(0)$ in T_pP.

Un altro modo per ottenere lo stesso campo è di definire, per $p \in P$, un'applicazione liscia
$$\sigma_p : G \longrightarrow P, \qquad g \longmapsto pg.$$

In virtù della definizione del differenziale (vedi 2.1.5), si ha:
$$(\mathrm{d}\sigma_p)_e : T_eG \longrightarrow T_pP, \qquad v = \gamma_* \longmapsto (v^\sharp)_p = (\mathrm{d}\sigma_p)_e(\gamma_*) = (\sigma_p \circ \gamma)_*,$$
perché $(\sigma_p \circ \gamma)(t) = p\gamma(t)$ rappresenta $(v^\sharp)_p$.

Da questa descrizione del campo fondamentale $v^\sharp$, con $v = \gamma_* \in T_eG$, segue:
$$(v^\sharp)_{pg} = (\sigma_{pg} \circ \gamma)_* = (\sigma_p \circ g\gamma)_* = (\mathrm{d}\sigma_p)_g(\mathrm{d}L_g)_e\gamma_* = (\mathrm{d}\sigma_p)_g(X^v)_g.$$

Ciò mostra come il campo invariante a sinistra X^v su G e il campo $v^\sharp$ siano correlati tramite la mappa σ_p:
$$(v^\sharp)_{\sigma_p(g)} = (\mathrm{d}\sigma_p)_g(X^v)_g, \qquad \text{cioè} \quad v^\sharp = (\mathrm{d}\sigma_p)X^v.$$
In particolare, vale per ogni $p \in P$ (vedi 2.2.3 e 3.3.5):
$$([v, w]^\sharp)_p = (\mathrm{d}\sigma_p)_e(X^{[v,w]})_e = (\mathrm{d}\sigma_p)_e[X^v, X^w]_e = [(\mathrm{d}\sigma_p)X^v, (\mathrm{d}\sigma_p)X^w]_p = [v^\sharp, w^\sharp]_p.$$

6.1.5 L'azione di G su un campo fondamentale. Vogliamo ora dimostrare che
$$(\mathrm{d}R_g)_p(v^\sharp)_p = (Ad_{g^{-1}}(v)^\sharp)_{pg},$$
dove, per $g \in G$ e $v \in T_eG$, si definisce
$$Ad_g(v) := gvg^{-1}$$
(dove $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ e $T_eG \subset T_IGL(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$).

Dato che $R_g(pg^{-1}) = p$, basta dimostrare che
$$(\mathrm{d}R_g)_{pg^{-1}}(v^\sharp)_{pg^{-1}} = (Ad_{g^{-1}}(v)^\sharp)_p.$$

Per definizione si ha $v^\sharp_{pg^{-1}} = \beta'(0)$, dove $\beta(t) = (pg^{-1})exp(tv) = p(g^{-1}exp(tv))$. Si noti che non c'è bisogno che β sia espresso mediante l'esponenziale, ma può essere un cammino qualsiasi purché $v^\sharp_{pg^{-1}} = \beta'(0)$. Risulta quindi che $(\mathrm{d}R_g)_{pg^{-1}}(v^\sharp)_{pg^{-1}} = (R_g \cdot \beta)'(0)$.

D'altra parte, si ha

$$(R_g \cdot \beta)(t) = R_g(\beta(t)) = \beta(t)g = p(g^{-1}\exp(tv)g) = p(\exp(t(g^{-1}vg))) = p(\exp(tAd_{g^{-1}}(v)));$$

per definizione si ha che $(R_g \cdot \beta)'(0) = (Ad_{g^{-1}}(v)^\sharp)_p$.

6.2. **Connessioni su fibrati principali.**

6.2.1 Definizione di connessione su un fibrato principale. Sia $\pi : P \to M$ un fibrato principale su una varietà liscia M con gruppo di Lie G. Per ogni $p \in P$, lo spazio tangente T_pP di P in p ha un sottospazio canonico, detto sottospazio verticale:

$$\mathrm{Vert}_p \;:=\; \ker\big((\mathrm{d}\pi)_p \;: T_pP \;\longrightarrow\; T_{\pi(p)}M\big) \;\cong\; T_eG \;=\; \mathfrak{g}.$$

Ogni $v \in \mathfrak{g}$ definisce un campo di vettori fondamentale $v^\sharp$ su P, e si ha

$$\mathrm{Vert}_p \;=\; \{v_p^\sharp \in T_pP :\; v \in \mathfrak{g}\}.$$

Una connessione A sul fibrato principale P è un'assegnazione di un sottospazio $\mathrm{Hor}_p \subset T_pP$, per ogni $p \in P$, tale che

$$T_pP \;=\; \mathrm{Vert}_p \,\oplus\, \mathrm{Hor}_p.$$

Inoltre, Hor_p dipende in modo differenziabile da p e per ogni $p \in P$ e $g \in G$ si ha:

$$\mathrm{Hor}_{pg} \;=\; (\mathrm{d}R_g)_p(\mathrm{Hor}_p), \qquad \text{dove} \quad (\mathrm{d}R_g)_p \;: T_pP \;\xrightarrow{\cong}\; T_{pg}P.$$

6.2.2 La 1-forma di connessione. Sia A una connessione sul fibrato principale $\pi : P \to M$. Se X è un campo vettoriale su P, si ha una scomposizione

$$X_p \;=\; X_p^V \;+\; X_p^H \qquad (X_p^V \in \mathrm{Vert}_p \cong \mathfrak{g},\; X_p^H \in \mathrm{Hor}_p),$$

che definisce campi vettoriali X^V e X^H su P. Poichè $X_p^V \in \mathrm{Vert}_p$, si ha $X_p^V = v^\sharp$ per un unico $v \in \mathfrak{g}$. Abbiamo allora una 1-forma α su P a valori in $\mathfrak{g}$:

$$\alpha :\; P \;\longrightarrow\; T^*P \otimes \mathfrak{g}, \qquad p \;\longmapsto\; \alpha_p \;=\; [X_p \;\longmapsto\; v] \quad \text{se} \quad v^\sharp = X_p^V,$$

cioè $\alpha_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ è la composizione della proiezione $T_pP \to \mathrm{Vert}_p$ e dell'isomorfismo $\mathrm{Vert}_p \cong \mathfrak{g}$. Questa 1-forma a valori in $\mathfrak{g}$ si chiama forma di connessione di A. Si noti che dato α e X, si ha $X_p^V = \alpha_p(X_p)^\sharp$ e quindi

$$X_p^H = X_p - ((\alpha_p(X_p)^\sharp)_p \quad \in \mathrm{Hor}_p.$$

In altre parole, α determina la connessione A, perché permette di trovare i sottospazi orizzontali.

Se X è un campo di vettori su P, allora il campo vettoriale di vettori orizzontali X^H su P è dato da

$$(X^H)_p \;:=\; (X_p)^H \;=\; X_p - \big(\alpha_p(X_p))^\sharp\big)_p\,.$$

Di solito, scriviamo semplicemente X_p^H per questo vettore tangente orizzontale.

6.2.3 Una connessione e la sua forma di connessione. Come abbiamo visto nella Sezione 6.2.2, la forma di connessione α di una connessione A determina A. Per descrivere tale forma, vale il seguente risultato.

Una 1-forma α a valori in $\mathfrak{g}$ su un fibrato principale $\pi : P \to M$, con gruppo G, è la 1-forma di una connessione A se, e solo se, α soddisfa le seguenti condizioni:

(1) $\alpha(v^\sharp) = v$ per ogni $v \in \mathfrak{g}$,
(2) $R_g^*\alpha = Ad_{g^{-1}}\alpha$ per ogni $g \in G$.

Prima mostriamo che la forma di connessione α soddisfa (1) e (2). La prima condizione segue dalla definizione di α. Infatti, $(v^\sharp)_p \in \mathrm{Vert}_p$ e quindi $\alpha_p((v^\sharp)_p) = v$ per ogni $p \in P$. Per la seconda condizione scriviamo $X_p = X_p^V + X_p^H$ come sopra. Poiché α_p è $\mathbb{R}$-lineare basta verificare (2) per tutti vettori $X_p^V \in \mathrm{Vert}_p$ e $X_p^H \in \mathrm{Hor}_p$. Dato che $X_p^V \in \mathrm{Vert}_p$, si ha $X_p^V = (v^\sharp)_p$ per un $v \in \mathfrak{g}$. In generale, vale $(\mathrm{d}R_g)_p(v^\sharp)_p = (Ad_{g^{-1}}(v))^\sharp_{pg}$ (vedi 6.1.5). Pertanto segue il caso 'verticale':

$$(R_g^*\alpha)_p((v^\sharp)_p) = \alpha_{pg}((\mathrm{d}R_g)_p(v^\sharp)_p) = \alpha_{pg}((Ad_{g^{-1}}(v)^\sharp)_{pg}) = Ad_{g^{-1}}(v) = Ad_{g^{-1}}\alpha_p((v^\sharp)_p),$$

per ogni $X_p^V = (v^\sharp)_p \in \mathrm{Vert}_p$. Nel caso $X_p^H \in \mathrm{Hor}_p$ si ha $\alpha_p(X_p^H) = 0$ e quindi $Ad_{g^{-1}}\alpha_p(X_p^H) = 0$. Visto che $X_p^H \in \mathrm{Hor}_p$ e che per una connessione si ha $(\mathrm{d}R_g)_p X_p^H \in \mathrm{Hor}_{pg}$, otteniamo $(R_g^*\alpha)(X_p^H) = \alpha_{pg}((\mathrm{d}R_g)_p X_p^H) = 0$, e segue il caso 'orizzontale'.

Per mostrare che una 1-forma α con valori in $\mathfrak{g}$ che soddisfa (1) e (2) definisce una 1-forma di una connessione A, basta definere la connessione A nel modo seguente:

$$\mathrm{Hor}_p := \{X_p \in T_pP \,:\, \alpha_p(X_p) = 0\}.$$

Allora si verifica facilmente che quest'assegnazione è una connessione A con 1-forma α.

6.2.4 La curvatura di una connessione. Similmente al caso della 1-forma canonica su un gruppo di Lie G, definiamo adesso la curvatura $\Omega = \Omega_\alpha$ di una 1-forma di connessione α su un fibrato principale $\pi : P \to M$. La curvatura Ω è una 2-forma su P a valori in $\mathfrak{g}$ ed è definita nel modo seguente:

$$\Omega(X, Y) := (\mathrm{d}\alpha)(X^H, Y^H), \qquad (X, Y \in \Gamma(TP),$$

dove X^H, Y^H sono i campi orizzontali definiti dai campi vettoriali X, Y su P e la definizione di derivata esterna per 1-forme a valori in $\mathfrak{g}$ su P è la generalizzazione ovvia di quella nella Sezione 5.3.2. Precisamente, si ha:

$$(\mathrm{d}\alpha)(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) \qquad (X, Y \in \Gamma(TP)).$$

In altre parole, in ogni punto $p \in P$ si ha:

$$\Omega_p(X_p, Y_p) := (\mathrm{d}\alpha)_p(X_p^H, Y_p^H), \qquad (\forall\, X_p, Y_p \in T_pP),$$

(cf. [N1] 5.2).

6.2.5 L'equazione di struttura di E. Cartan. Sia α una 1-forma di connessione su P e sia Ω la sua 2-forma di curvatura. Allora:

$$\Omega = \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\alpha \wedge \alpha,$$

dove il prodotto esterno di due 1-forme α, β su P con valori in $\mathfrak{g}$ è dato in generale da (vedi Sezione 5.3.2):

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) := [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)], \qquad (X, Y \in \Gamma(TP)),$$

dove $[-,-]$ indica il commutatore su $\mathfrak{g}$.

Per mostrare l'equazione di Cartan, basta considerare i casi qui sotto, perché entrambi i membri sono $\mathbb{R}$-bilineari e alternanti. Sfruttiamo, con riferimento a [N1], alcune proprietà delle parentesi di Lie che non abbiamo mostrato.

(1) $X = X^H$, $Y = Y^H$. In questo caso si ha $\alpha(X) = 0 = \alpha(Y)$ e quindi $(\alpha \wedge \alpha)(X, Y) = 0$. Rimane da verificare che $\Omega(X, Y) = (\mathrm{d}\alpha)(X, Y)$, ma non è altro che la definizione di Ω.

(2) $X = X^V$ (poi consideriamo Y). In questo caso $\Omega(X, Y) = 0$ per ogni Y. Quindi dobbiamo mostrare che $\mathrm{d}\alpha(X, Y) + \frac{1}{2}(\alpha \wedge \alpha)(X, Y) = 0$ per ogni Y. Sia $v \in \mathfrak{g}$ tale che $X_p = (v^\sharp)_p$. Allora in p:

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = \mathrm{d}\alpha(v^\sharp, Y) = v^\sharp(\alpha(Y)) - Y(\alpha(v^\sharp)) - \alpha([v^\sharp, Y]) = v^\sharp(\alpha(Y)) - \alpha([v^\sharp, Y]),$$

perché $\alpha(v^\sharp) = v$ è una funzione costante su P. D'altra parte, si ha:

$$(\alpha \wedge \alpha)(X, Y) = (\alpha \wedge \alpha)(v^\sharp, Y) = [\alpha(v^\sharp), \alpha(Y)] - [\alpha(Y), \alpha(v^\sharp)] = 2[v, \alpha(Y)].$$

Supponiamo adesso che anche $Y_p = (w^\sharp)_p$ sia verticale. Poniamo $Y = w^\sharp$, ovvero $\alpha(Y) = w$ costante. Ne segue che $v^\sharp(w) = 0$. Applicando $[v^\sharp, w^\sharp] = [v, w]^\sharp$ (vedi [N1], Thm 4.7.8, p.243), si ottiene:

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = -\alpha([v^\sharp, Y]) = -\alpha([v^\sharp, w^\sharp]) = -\alpha([v, w]^\sharp) = -[v, w].$$

Similmente,

$$(\alpha \wedge \alpha)(X, Y) = 2[v, \alpha(Y)] = 2[v, w],$$

quindi vale l'equazione di Cartan.

Nel caso in cui $Y_p = Y_p^H$ sia orizzontale, si ha $\alpha(Y^H) = 0$ e rimane:

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = -\alpha([v^\sharp, Y^H]),$$

mentre $(\alpha \wedge \alpha)(X, Y) = 0$. Dobbiamo allora mostrare che $\alpha([v^\sharp, Y^H]) = 0$ per ogni $v \in \mathfrak{g}$ e ogni campo orizzontale Y^H, cioè, dobbiamo mostrare che adesso il campo $[v^\sharp, Y^H]$ è orizzontale.

Sia $\gamma(t) = exp(tv)$. Esistono diffeomorfismi $R_{\gamma(t)} : P \to P$ tali che $R_{\gamma(t)} R_{\gamma(s)} = R_{\gamma(t+s)}$ e $R_{\gamma(0)} = \mathrm{id}_P$. Inoltre, $(v^\sharp)_p$ è rappresentato dal cammino $t \mapsto R_{\gamma(t)}p = p\gamma(t)$. Allora si può mostrare che (vedi [N1], (4.6.23))

$$-[v^\sharp, Y^H]_p = [Y^H, v^\sharp]_p = \lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{d}R_{\gamma(-t)} Y^H)_p - Y_p^H}{t}.$$

Visto che $\mathrm{Hor}_{p\gamma(t)} = (\mathrm{d}R_{\gamma(t)})_p \mathrm{Hor}_p$, il vettore tangente $(\mathrm{d}R_{\gamma(t)} Y^H)_p - Y_p^H$ è orizzontale per ogni t e quindi anche $[v^\sharp, Y^H]_p$ è orizzontale. Questo conclude la dimostrazione dell'equazione di Cartan.

6.2.6 L'identità di Bianchi. Data una k-forma ω su P a valori in $\mathfrak{g}$, si può definire una $(k+1)$-forma $\mathrm{d}\omega$ su P a valori in $\mathfrak{g}$. In generale, non vale $\mathrm{d}^2\omega = 0$. Nel caso della 2-forma di curvatura di una 1-forma di connessione α si ha invece l'identità di Bianchi:

$$\mathrm{d}\Omega = -[\alpha, \Omega].$$

6.3. **Il fibrato di Hopf su S^3.**

6.3.1 Definizione del fibrato principale di Hopf. Definiamo il fibrato principale, detto di Hopf, $\pi : P = S^3 \to M = S^2$ con gruppo $G = U(1)$. Identifichiamo

$$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto v_x = ((v_x)_1, (v_x)_2) = (x_0 + ix_1, x_2 + ix_3).$$

Su $\mathbb{R}^4$ abbiamo il prodotto scalare standard

$$< x, y >= \sum x_i y_i = \mathrm{Re}\big((x_0 + ix_1)(y_0 - iy_1) + (x_2 + ix_3))(y_2 - iy_3)\big) = \mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{2} (v_x)_j \overline{(v_y)}_j).$$

La sfera $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 :< x, x >= 1\}$ ha fibrato tangente.

$$TS^3 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : < x, x >= 1,\ < x, y >= 0\,\}.$$

La fibrazione di Hopf è data da

$$\pi : S^3 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2, \qquad (z, w) \longmapsto (z : w) \qquad ((z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2),$$

Il gruppo di Lie

$$G = U(1) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\,\}$$

agisce su S^3 nel modo seguente:

$$G \times S^3 \longrightarrow S^3, \qquad (\lambda, (z, w)) \longrightarrow (\lambda z, \lambda w).$$

Visto che $(\lambda z : \lambda w) = (z : w) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, quest'azione preserva le fibre di π e non è difficile verificare che in questo modo il fibrato di Hopf è un fibrato principale con gruppo G.

6.3.2 I campi vettoriali verticali. Un vettore tangente in $T_1U(1) \cong \mathbb{R}$ è definita da un cammino γ_t:

$$\gamma_t :]-\epsilon, \epsilon[\, \longrightarrow U(1), \qquad s \longmapsto e^{ist}.$$

Infatti, $\gamma_t(0) = 1$ e $\mathrm{d}(e^{ist})/\mathrm{d}s = ite^{ist}$, che in $s = 0$ è it. L'isomorfismo $T_1U(1) \cong \mathbb{R}$ può essere dato da $(\gamma_t)_* \mapsto t$.

Sia $p = (z, w) \in S^3$. Il campo di vettori verticale $v^\sharp$, dove $v = (\gamma_t)_* \in T_1U(1)$, ha valore $(v^\sharp)_p \in T_pS^3$ in p. Il vettore tangente $(v^\sharp)_p$ è definito dal cammino $s \mapsto p\gamma_t(s) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Quindi

$$(z, w)\gamma_t(s) = (e^{ist}z,\, e^{ist}w), \qquad (v^\sharp)_p = \frac{\mathrm{d}(e^{ist}z,\, e^{ist}w)}{\mathrm{d}s}_{|s=0} = (itz, itw) \quad (\in T_{(z,w)}S^3).$$

E' facile verificare direttamente che $(itz, itw) \in T_{(z,w)}S^3$:

$$< (z,w),(itz,itw) >= \mathrm{Re}(z(\overline{itz}) + w(\overline{itw})) = \mathrm{Re}(-it(z\overline{z} + w\overline{w})) \,=\, 0$$

visto che t, $z\overline{z}$ e $w\overline{w}$ sono reali.

Quindi abbiamo determinato il sottospazio verticale Vert_p di T_pS^3:

$$\mathrm{Vert}_{(z,w)} \,=\, \{(itz, itw) \,\in T_{(z,w)}S^3 \,\subset \mathbb{C}^2 :\, t \in \mathbb{R}\,\}.$$

6.3.3 Una connessione A sul fibrato di Hopf. Dato che $T_pS^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ e che abbiamo un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$, possiamo definire un sottospazio complementare semplicemente imponendo che:

$$\mathrm{Hor}_p \,:=\, \mathrm{Vert}_p^\perp \,=\, \{y \in T_{(z,w)}S^3 : < y, (iz, iw) >= \,0\,\}, \qquad (p = (z,w) \in S^3)$$

il complemento ortogonale di Vert_p (per la metrica Riemanniana su S^3 definito dal prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$).

Per mostrare che $p \mapsto \mathrm{Hor}_p$ è una connessione sul fibrato di Hopf, dobbiamo verificare che $\mathrm{Hor}_{pg} = (\mathrm{d}R_g)_p\mathrm{Hor}_p$ per ogni $p \in S^3$, $g \in U(1)$. Se $p = (z,w)$ si ha $R_g(p) = pg = (e^{is}z, e^{is}w)$. Quindi R_g è indotta da un'applicazione lineare, unitaria (e quindi ortogonale per $< -,- >$) su $\mathbb{C}^2$. Il suo differenziale è perciò lineare ed è dato da $(\mathrm{d}R_{e^{is}})_p(a,b) = (e^{is}a, e^{is}b)$ per $(a,b) \in T_pS^3$, che è una mappa ortogonale tra spazi tangenti per il prodotto scalare $< -,- >$. Visto che Vert_p è per definizione invariante per R_g, segue allora che Hor_p è invariante per R_g.

Adesso abbiamo una connessione A sul fibrato di Hopf. (Vedi [N1], p.295 per il caso $\pi : S^7 \to S^3$.)

6.3.4 Il fibrato di Hopf e $SU(2)$. Sfruttando il diffeomorfismo

$$S^3 \,\cong\, SU(2), \quad x \,\mapsto\, v_x = (z,w) \,\mapsto\, A_{(z,w)} := \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix},$$

e il fatto che $\binom{z}{w} = A_{(z,w)}\binom{1}{0}$, si può usare la teoria dei gruppi di Lie per studiare il fibrato di Hopf.

L'identità $e = I \in SU(2)$ corrisponde al vettore $p_e := (1,0,0,0) \in S^3$ e quindi

$$T_eSU(2) \,=\, T_{p_e}S^3 \,=\, \{y \in \mathbb{R}^4 : < p_e, y >= 0\,\} \,=\, \{(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{R}^4 :\, y_1 \,=\, 0\,\}.$$

L'algebra di Lie di $SU(2)$ è quindi:

$$T_eSU(2) \,=\, \left\{ \begin{pmatrix} iv_1 & -v_2 + iv_3 \\ v_2 + iv_3 & -iv_1 \end{pmatrix} \,:\, (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Visto che il fibrato tangente di $SU(2)$ è

$$TSU(2) = \{(A, (\mathrm{d}L_A)_eV = AV) \,\in\, M_2(\mathbb{C})^2 \,:\, A \in SU(2),\, V \in T_eSU(2)\},$$

la 1-forma canonica su $SU(2)$ è data da:

$$\Theta :\, TSU(2) \,\longrightarrow\, T_eSU(2), \qquad (X^V)_A \,=\, (A, AV) \,\longmapsto V.$$

Si noti che il campo vettoriale invariante a sinistra X^V definito da $V = diag(i, -i) \in T_eG$ è dato da

$$(X^V)_{A_{(z,w)}} = A_{(z,w)}V = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz & i\overline{w} \\ iw & -i\overline{z} \end{pmatrix},$$

che corrisponde al vettore $(iz, iw) \in T_{(z,w)}S^3$. Visto che $(iz, iw) = (v^\sharp)_{z,w}$, dove $v = 1 \in T_eU(1)$, si ha in generale:

$$(X^V)_{A_{(z,w)}} = (v^\sharp)_{(z,w)}, \qquad \text{perciò} \quad X^V = v^\sharp,$$

dove $v = t \in T_eU(1)$ e $V = diag(it, -it) \in T_eSU(2)$.

6.3.5 La 1-forma di connessione del fibrato di Hopf. Adesso definiamo, usando le coordinate su $T_eSU(2)$ come sopra, una 1-forma su $SU(2) = S^3$ a valori in T_eG:

$$\alpha : T_eSU(2) \longrightarrow T_1U(1) \cong \mathbb{R}, \qquad (X^V)_A = (A, AV) \longmapsto -iV_{11} = v_1.$$

Si noti che se prendiamo la $\mathbb{R}$-base

$$e_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

di $T_eSU(2)$, allora $\Theta = \sum \Theta_i e_i$ e $\alpha = \Theta_1$. In particolare, si ha:

$$\alpha(X^V) = \Theta_1(X^V) = -iV_{11}.$$

Più precise, per ogni $p \in S^3$ si ha: $\alpha_p(A_pV) = \alpha_e(V) = -iV_{11}$ perchè Θ, e quindi Θ_1, è invariante a sinistra.

Mostriamo che la 1-forma α è la 1-forma di connessione della connessione A definita in 6.3.3. Dobbiamo verificare che, con $p = (z, w) \in S^3$, si ha:

$$\ker \alpha_p = \mathrm{Hor}_p, \quad \text{dove} \quad \mathrm{Hor}_{(z,w)} := \{ y \in T_{(z,w)}S^3 : < y, (iz, iw) >= 0 \}.$$

Per dimostrarlo, basta osservare che il prodotto scalare $< -, - >$ su $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ è invariante per $SU(2)$. Infatti, se $A \in SU(2)$ si ha ${}^t\overline{A}A = I$ (vedi 4.1.1) e quindi anche ${}^tA\overline{A} = I$, perciò: $< (z_1, w_1), (z_2, w_2) >:=$

$$Re(z_1\overline{z}_2 + w_1\overline{w}_2) = Re\left(\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} \overline{z}_2 \\ \overline{w}_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = Re\left(\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \end{pmatrix} {}^tA\overline{A} \left(\begin{smallmatrix} \overline{z}_2 \\ \overline{w}_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = < A\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ w_1 \end{smallmatrix}\right), A\left(\begin{smallmatrix} z_2 \\ w_2 \end{smallmatrix}\right) > .$$

Visto che $\mathrm{Vert}_p = (X^V)_p$ è un campo invariante a sinistra, si ha allora che anche $\mathrm{Hor}_p = \mathrm{Vert}_p^\perp$ soddisfa

$$\mathrm{Hor}_{(z,w)} = A_{(z,w)}\mathrm{Hor}_{(1,0)}.$$

Pertanto, se $X^H_p \in \mathrm{Hor}_p$, allora

$$\alpha_p(X^H_p) = \alpha_p(A_pX^H_e) = \alpha_e(X^H_e) = 0,$$

perché $X^H_e \in \mathrm{Vert}_e^\perp = \{(0, u) : u \in \mathbb{C}\}$.

6.3.6 La curvatura Ω di α. La formula per la curvatura Ω, una 2-forma con valori in $T_1U(1) \cong \mathbb{R}$ (un'algebra di Lie dove il commutatore, e quindi $\alpha \wedge \alpha$, è banale!) è (vedi 6.2.4):

$$\Omega = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha = \mathrm{d}\alpha.$$

Per calcolare Ω osserviamo che l'equazione di Maurer-Cartan (vedi 5.3.2) $\mathrm{d}\Theta = -(1/2)[\Theta, \Theta]$ implica che

$$\Omega = \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(\Theta_1) = (\mathrm{d}\Theta)_1 = -\frac{1}{2}(\Theta \wedge \Theta)_1.$$

Qui, con $\Theta \wedge \Theta$ intendiamo il commutatore su $T_eSU(2)$, che è non banale.

In particolare, dati due vettori tangenti $X_p, Y_p \in T_pS^3$ si può calcolare $\Omega(X_p, Y_p)$ nel modo seguente: prendiamo $V, W \in T_eSU(2)$ tale che $X_p = (X^V)_p$, $Y_p = (X^W)_p$, allora (vedi 5.3.2):

$$\begin{aligned}
\Omega(X^V, X^W) &= -\tfrac{1}{2}(\Theta \wedge \Theta)_1(X^V, X^W) \\
&= \tfrac{i}{2}\big([\Theta(X^V), \Theta(X^W)]_{11} - [\Theta(X^W), \Theta(X^V)]_{11}\big) \\
&= \tfrac{i}{2}([V, W]_{11} - [W, V]_{11}) \\
&= i[V, W]_{11}.
\end{aligned}$$

Si noti che $\Omega(X^V, X^W)$ non dipende dal punto $p \in S^3$ e quindi Ω è invariante a sinistra. Per definizione di Ω, questa 2-forma dipende soltanto dalle componenti orizzontali. Quindi Ω è determinato dai valori su $\mathrm{Hor}_e \subset T_eSU(2)$. Una base di Hor_e è data dalle matrici e_2, e_3 in 6.3.5. Visto che Ω è alternante (cioè, $\Omega(e_2, e_2) = \Omega(e_3, e_3) = 0$) rimane da calcolare $\Omega_e(e_2, e_3) = -\Omega_e(e_3, e_2)$. Si ha:

$$\Omega_e(e_2, e_3) = i[e_2, e_3]_{11} = i(e_2e_3 - e_3e_2)_{11} = i(-2e_1)_{11} = 2.$$

In particolare, $\Omega \neq 0$.

6.4 La 1-forma di connessione del fibrato di Hopf (bis) Nella Sezione 6.3.5 abbiamo trovato la 1-forma di connessione α del fibrato di Hopf, usando l'identificazione $S^3 = SU(2)$. Adesso daremo un'altra formula per α usando soltanto $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z\overline{z} + w\overline{w} = 1\}$. Mostriamo che $\alpha = \omega_{|S^3}$, dove ω è la 1-forma (a valori in $\mathbb{R}$) su $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ data da (cf. [N2], p.69):

$$\omega = \mathrm{Im}(\overline{z}\mathrm{d}z + \overline{w}\mathrm{d}w),$$

dove per $(u, v) \in T_{(z,w)}\mathbb{C}^2$ si ha:

$$(\mathrm{d}z)_{(z,w)}(u, v) := u, \qquad (\mathrm{d}w)_{(z,w)}(u, v) := v.$$

Scrivendo $z = x_0 + ix_1$, $w = x_2 + ix_3$, $u := y_0 + iy_1$ e $v := y_2 + iy_3$ otteniamo allora la forma 'reale' di ω:

$$\omega_{(x_0,\dots,x_3)}((y_0, \dots, y_3)) = \mathrm{Im}((x_0-ix_1)(y_0+iy_1)+(x_2-ix_3)(y_2+iy_3)) = -x_1y_0+x_0y_1-x_3y_2+x_2y_3,$$

cioè

$$\omega = -x_1\mathrm{d}x_0 + x_0\mathrm{d}x_1 - x_3\mathrm{d}x_2 + x_2\mathrm{d}x_3.$$

Come visto nel paragrafo 6.3.2, i campi verticali $v^\sharp$ sono dati da $(v^\sharp_{(z,w)}) = (itz, itw)$, dove $v = t \in \mathfrak{g}$. Si ha così:

$$\omega_p((v^\sharp)_p) = \omega_{(z,w)}(itz, itw) = \mathrm{Im}(\overline{z}(itz) + \overline{w}(itw)) = \mathrm{Re}(t(\overline{z}z + \overline{w}w)) = t = v,$$

che è la prima condizione per la 1-forma di connessione. Per verificare che $\omega_p(\mathrm{Hor}_p) = 0$, osserviamo anzitutto che per ogni $A \in SU(2)$ si ha:

$$\omega_{A\binom{z}{w}}(A\tbinom{u}{v}) = \mathrm{Im}((\overline{z}\ \overline{w})^t\overline{A}A\tbinom{u}{v}) = \mathrm{Im}((\overline{z}\ \overline{w})\tbinom{u}{v}) = \omega_{\binom{z}{w}}(\tbinom{u}{v}).$$

Di conseguenza, ω è invariante per traslazione per elementi di $SU(2)$. Visto che ogni $v^\sharp$ è invariante per traslazione a sinistra, si ha $\mathrm{Vert}_{Ap} = A\mathrm{Vert}_p$. Ogni $A \in SU(2)$ preserva anche il prodotto scalare su $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, in particolare $(Av)^\perp = A(v^\perp)$, quindi si ha:

$$\mathrm{Hor}_{Ap} = (\mathrm{Vert}_{Ap})^\perp = (A\mathrm{Vert}_p)^\perp = A(\mathrm{Vert}_p)^\perp = A\mathrm{Hor}_p.$$

In $p = (1,0) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ si ha $\mathrm{Vert}_{(1,0)} = < (i,0) >$ e

$\mathrm{Hor}_{(1,0)} = \{(iv_1, v_2+iv_3) \in T_{1,0}S^3 : \ \mathrm{Re}(-v_1) = 0,\ v_j \in \mathbb{R}\} = \{(0, v_2+iv_3) \in T_{1,0}S^3 : \ v_j \in \mathbb{R}\}$. Visto che

$$\omega_{(1,0)}((0,v)) = \mathrm{Im}(1 \cdot 0 + 0 \cdot v) = 0, \qquad \text{si ha} \quad \omega_{(1,0)}(\mathrm{Hor}_{(1,0)}) = 0.$$

Per ogni $p = (z,w) \in S^3$ si ha $A_{(z,w)} \in SU(2)$ e $A_{(z,w)}\binom{1}{0} = \binom{z}{w}$, perciò anche $\omega_p(\mathrm{Hor}_p) = 0$. Questo conclude la dimostrazione che $\alpha = \omega$.

6.5. **Il pull-back sulla base.**

6.5.1 Sezioni locali. Sia $\pi : P \to M$ un fibrato principale su una varietà liscia M con gruppo di Lie G. Siano $V_1, V_2 \subset M$ due aperti tali che ci siano diffeomorfismi

$$\Psi_i : \ P_{V_i} := \pi^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times G,$$

che preservano le fibre:

$$\Psi_i(p) = (\pi(p), \psi_i(p)), \qquad \text{e tale che} \quad \psi(gp) = \psi_i(p)g.$$

In questo caso, le funzioni di transizione

$$g_{ji} : \ V_1 \cap V_2 \longrightarrow G, \qquad g_{ji}(x) := \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1} \qquad (p \in P_x := \pi^{-1}(p))$$

sono indipendenti dalla scelta di $p \in P_x$, perché se anche $q \in P_x$, allora $q = pg$ per un certo $g \in G$ e quindi

$$\psi_j(q)(\psi_i(q))^{-1} = \psi_j(pg)(\psi_i(pg))^{-1} = \psi_j(p)gg^{-1}(\psi_i(p))^{-1} = \psi_j(p)(\psi_i(p))^{-1}.$$

Una trivializzazione (V_i, Ψ_i) definisce una sezione canonica del fibrato P tramite (vedi [N1], 3.3, p.170)

$$s_i : \ V_i \longrightarrow P_{V_i}, \qquad s_i(x) := \Psi_i^{-1}(x,e).$$

Si noti che

$$\Psi_i(s_i(x)g) = (x, \psi_i(s_i(x)g)) = (x, \psi_i(s_i(x))g) = (x, eg) = (x,g),$$

dove abbiamo usato che $\Psi_i(s_i(x)) = (x,e)$, quindi $\psi_i(s_i(x)) = e$.

Come appena visto, si ha:

$$\Psi_j(s_j(x)g_{ji}(x)) = (x, g_{ji}(x)), \qquad \text{quindi} \quad \psi_j(s_j(x)g_{ji}(x)) = g_{ji}(x),$$

mentre $s_i(x) \in \pi^{-1}(x)$ e $\psi_i(s_i(x)) = e$; perciò vale la relazione seguente:

$$\psi_j(s_i(x)) = \psi_j(s_i(x))(\psi_i(s_i(x)))^{-1}\psi_i(s_i(x)) = g_{ji}(x)e = g_{ji}(x).$$

Poiché $\psi_j : \pi^{-1}(x) = P_x \to G$ è una biiezione otteniamo ([N1], Excercise 3.3.5, p.172):

$$s_i(x) = s_j(x)g_{ji}(x), \qquad (x \in V_1 \cap V_2).$$

6.5.2 Un differenziale. L'azione a destra di G sul fibrato principale P definisce, per ogni $p \in P$, un'applicazione liscia

$$\sigma_p : G \longrightarrow P, \qquad g \longmapsto pg = \sigma(p,g).$$

Si noti che $\sigma_p(g) \in P_{\pi(p)}$, quindi il differenziale di σ_p in $g \in G$ manderà T_gG in $\mathrm{Vert}_{pg} \subset T_{pg}P$. Mostriamo che il differenziale di σ_p è dato da:

$$(\mathrm{d}\sigma_p)_g : T_gG \longrightarrow T_{pg}P, \qquad (\mathrm{d}\sigma_p)_g(w) = ((\Theta_g(w))^\sharp)_{pg},$$

dove Θ è la 1-forma canonica su G a valori in $\mathfrak{g}$ (quindi $\Theta_g(w) \in \mathfrak{g}$). Questo vettore tangente definisce un campo canonico $(\Theta_g(w))^\sharp$ su P, che verrà calcolato in $pg \in P$.

La dimostrazione è facile. Il vettore $w \in T_gG = (\mathrm{d}L_g)_eT_eG$ è rappresentato da un cammino $g\gamma(t)$ dove $\gamma(0) = e$ e $g\gamma'(0) = w$. Sia $v = \gamma'(0) \in T_eG$; allora $w = (\mathrm{d}L_g)_e v$, e quindi $\Theta_g(w) = v$. Il vettore tangente $(\mathrm{d}\sigma_p)_g(w)$ è rappresentato dal cammino $pg\gamma(t)$; questo cammino rappresenta anche il vettore $(v^\sharp)_{pg} = ((\Theta_g(w))^\sharp)_{pg}$ (vedi 6.1.4): questo conclude la dimostrazione.

6.5.3 I differenziali delle sezioni locali. Siano adesso, come in Sezione 6.5.1, $s_i : V_i \to P$ due sezioni di P su aperti $V_i \subset M$, e sia

$$s_1(x) = s_2(x)g_{21}(x), \qquad s_i : V_i \longrightarrow P,$$

dove $g_{21} : V_1 \cap V_2 \to G$ è un'applicazione liscia. Allora, per $x \in V_1 \cap V_2$ e $v \in T_xM$, si ha ([N1], Excercise 5.1.4):

$$(\mathrm{d}s_1)_x(v) = (\mathrm{d}R_{g_{21}(x)})_{s_2(x)}((\mathrm{d}s_2)_x v) + ((g_{21}^*\Theta)_x(v))^\sharp)_{s_1(x)}.$$

Per verificare la formula, si noti che in coordinate locali $s_2(x)g_{21}(x)$ è il prodotto di due matrici ($P_x \cong G \subset M_n(\mathbb{R})$) e con Leibniz si ha allora che $(\mathrm{d}s_1)_x = (\mathrm{d}f)_x + (\mathrm{d}g)_x$ dove $f(y) = s_2(y)g_{21}(x)$ e $g(y) = s_2(x)g_{21}(y)$ per x fissato.

Visto che $f(y) = R_{g_{21}(x)}(s_2(y))$, il differenziale di f in x è $(\mathrm{d}R_{g_{21}(x)})_{s_2(x)} \circ (\mathrm{d}s_2)_x$. Poi $g(y) = \sigma_{s_2(x)}(g_{21}(y))$, quindi il differenziale di g in x è $(\mathrm{d}\sigma_{s_2(x)})_{g_{21}(x)} \circ (\mathrm{d}g_{21})_x$ e si ha:

$$(\mathrm{d}\sigma_{s_2(x)})_{g_{21}(x)}((\mathrm{d}g_{21})_x v) = (\Theta_{g_{21}(x)}((\mathrm{d}g_{21})_x v))^\sharp)_{s_2(x)} = ((g_{21}^*\Theta)_x(v))^\sharp)_{s_2(x)g_{21}(x)}\ ,$$

siccome $s_2(x)g_{21}(x) = s_1(x)$, abbiamo dimostrato la formula.

6.5.4 I pull-back di α e Ω. Siano, come nella Sezione 6.5.1, $s_i : V_i \to P$ due sezioni del fibrato principale $\pi : P \to M$ con gruppo di Lie G su aperti $V_i \subset M$, e sia

$$s_1(x) = s_2(x)g_{21}(x), \qquad s_i : V_i \longrightarrow P,$$

dove $g_{21} : V_1 \cap V_2 \to G$ è un'applicazione liscia. Sia A una connessione su P. Adesso consideriamo il pull-back $s_i^*\alpha$ della 1-forma di connessione α, e similmente il pull-back $s_i^*\Omega$ della 2-forma di curvatura Ω su V_i. Otteniamo le due formule seguenti che sono di grande importanza per la teoria di Gauge.

Sia $\mathcal{A}_i := s_i^*\alpha$ e sia Θ la 1-forma canonica su G, allora si ha ([N1], Lemma 4.8.2, p.260)

$$\mathcal{A}_1 = Ad_{g_{21}^{-1}} \circ \mathcal{A}_2 + g_{21}^*\Theta,$$

cioè, per ogni $x \in V_1 \cap V_2$ e $v \in T_xM$ si ha la seguente identità in $\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{A}_1(x)(v) = g_{21}^{-1}(x)\big(\mathcal{A}_2(x)(v)\big)g_{21}(x) + \Theta_{g_{21}(x)}((\mathrm{d}g_{21})_x v).$$

La dimostrazione usa la formula della Sezione 6.5.3 e la proprietà $R_g^*\alpha = Ad_{g^{-1}}\alpha$ di α dimostrata nella Sezione 6.2.3:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(x)(v) &= \alpha((\mathrm{d}s_1)_x v) \\
&= \alpha((\mathrm{d}R_{g_{21}(x)})_{s_2(x)}((\mathrm{d}s_2)_x v)) + \alpha(((g_{21}^*\Theta)_x(v))^\sharp)_{s_1(x)}) \\
&= Ad_{g_{21}^{-1}(x)}(\alpha((\mathrm{d}s_2)_x v)) + (g_{21}^*\Theta)_x(v) \\
&= Ad_{g_{21}^{-1}(x)}(\mathcal{A}_2(x)(v)) + (g_{21}^*\Theta)_x(v).
\end{aligned}$$

Sia $\mathcal{F}_i := s_i^*\Omega$; allora si ha ([N1], Thm 5.2.3, p.313):

$$\mathcal{F}_1 = Ad_{g_{21}^{-1}} \circ \mathcal{F}_2,$$

cioè, per ogni $x \in V_1 \cap V_2$ e $v, w \in T_x M$ vale la seguente identità in $\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{F}_1(x)(v,w) = g_{21}^{-1}(x)\big(\mathcal{F}_2(x)(v,w)\big)g_{21}(x).$$

La dimostrazione usa la formula della Sezione 6.5.3 e il fatto che se v (o w) è verticale si ha $\Omega(v,w) = 0$. Visto che $((g_{21}^*\Theta)_x(v))^\sharp)_{s_2(x)}$ è verticale e che Ω è bilineare, rimane quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x)(v,w) &= \Omega((\mathrm{d}s_1)_x v, (\mathrm{d}s_1)_x w) \\
&= \Omega\big((\mathrm{d}R_{g_{21}(x)})_{s_2(x)}(\mathrm{d}s_2)_x v, (\mathrm{d}R_{g_{21}(x)})_{s_2(x)}(\mathrm{d}s_2)_x w)\big) \\
&= Ad_{g_{21}^{-1}(x)}(\Omega((\mathrm{d}s_2)_x v, (\mathrm{d}s_2)_x w)) \\
&= Ad_{g_{21}^{-1}(x)}(\mathcal{F}_2(x)(v,w)),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato di nuovo che $(R_g)^*\Omega = Ad_{g^{-1}} \circ \Omega$ (vedi [N1], Lemma 5.2.2, p.312).

6.5.5 Osservazioni. Una 1-forma di connessione α su $\mathcal{P}$ si chiama campo di Gauge, il suo pull-back $\mathcal{A} = s^*\alpha$ a un aperto $V \subset X$ è detto potenziale di gauge e il pull-back della 2-forma di curvatura $\mathcal{F} = s^*\Omega$ è detto 'local field strength (in the gauge s)' (vedi [N1], p.312).

Nel caso in cui $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ si ha l'identificazione $T_g G = \{gX : X \in T_e G\} \subset M_n(\mathbb{R})$. La 1-forma canonica Θ si scrive spesso $\Theta = g^{-1}\mathrm{d}g$ perché $\Theta_g(gX) = X$. La formula per il cambio di sezione (cioè della gauge) è allora, in forma semplificata,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= Ad_{g_{21}^{-1}(x)}(\mathcal{A}_2) + g_{21}^*\Theta \\
&= g_{21}^{-1}\mathcal{A}_2 g_{21} + g_{21}^{-1}\mathrm{d}g_{21} \\
&= g_{21}^{-1}(\mathcal{A}_2 + \mathrm{d})g_{21}.
\end{aligned}$$

6.6. **Esempio: Elettromagnetismo.**

6.6.1 Formalismo covariante. Sia $M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ il spazio tempo. Un campo elettromagnetico su M consiste in due campi vettoriali $E, B : M \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano l'equazioni di Maxwell. Consideriamo soltanto il caso senza correnti e carichi ($J = 0$, $\rho = 0$) e mettiamo $c = 1$.

Nel formalismo covariante i campi E, B sono i componenti di una 2-forma differenziale F su M, detta tensore di Faraday:

$$F = E_1 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}t + E_2 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}t + E_3 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}t + B_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - B_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + B_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \ .$$

La condizione che la derivata esterna di F è zero, $\mathrm{d}F = 0$, è equivalente a due delle quattro equazioni di Maxwell:

$$\mathrm{d}F = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla \times E + \partial B/\partial t = 0, \quad \nabla \cdot B = 0 \ .$$

Le altre due equazioni di Maxwell, $\nabla \cdot E = 0$, $\nabla \times B = 0$, sono equivalente a $\mathrm{d}(*F) = 0$ dove $* : \mathcal{E}^2(M) \to \mathcal{E}^2(M)$ è l'operatore di Hodge definito dalla metrica lorenziana su M, che però non definiamo qui.

Siccome F è definito su tutto $M \cong \mathbb{R}^4$ e $\mathrm{d}F = 0$ esiste una 1-forma A, detto quadripotenziale, su M tale che $\mathrm{d}A = F$. (L'esistenza di A è garantita, per esempio, dal fatto che $H^2_{DR}(M) = 0$.) Si noti che se $f : M \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia, allora $\mathrm{d}A = \mathrm{d}(A + \mathrm{d}f)$ perché la derivata esterna è lineare e vale $\mathrm{d}^2 = 0$.

6.6.2 Un fibrato principale banale e 1-forme di connessione. Sia $P := M \times \mathbb{R}$ che è un fibrato principale con gruppo di Lie $G = \mathbb{R}$ se poniamo

$$\pi : P \longrightarrow M, \quad ((x,t),u) \longmapsto (x,t), \qquad \sigma :\ P \times G \longrightarrow P, \quad \sigma\big(((x,t),u),w\big) := ((x,t),u+w) \ .$$

In particolare, per $p = ((x,t),u) \in P$ si ha

$$\sigma_p : G \longrightarrow P, \qquad \sigma_p(w) := p \cdot w = ((x,t), u+w) \ .$$

Per $v \in T_0\mathbb{R} = \mathbb{R}$ (identifichiamo $v \leftrightarrow v\mathrm{d}/\mathrm{d}u$), il campo vettoriale fondamentale $v^\sharp$ su P ha valore in $p = ((x,t),u) \in P$ dato da

$$(v^\sharp)_p := (\mathrm{d}\sigma_p)_0 v = v \partial_u$$

dove la carta su P è (P, id_P), quindi $p \mapsto (x_1, \ldots, x_3, t, u) \in \mathbb{R}^5$ (si noti che la matrice Jacobiana di σ è $((0\ 0\ 0\ 0), 1) : T_0\mathbb{R} \to T_{(x,t)}M \times T_u\mathbb{R}$.)

In questa carta, ogni 1-forma α su P è scritto

$$\alpha = a_1 \mathrm{d}x_1 + a_2 \mathrm{d}x_2 + a_3 \mathrm{d}x_3 + a_4 \mathrm{d}t + a_5 \mathrm{d}u, \qquad a_1, \ldots, a_5 : P \longrightarrow \mathbb{R},$$

dove ogni a_i è una funzione liscia. Siccome $\mathbb{R} = T_0\mathbb{R}$, possiamo considerare α come una 1-forma su P con valori in $\mathbb{R}$.

Inoltre, α è una 1-forma di connessione se e sole se valgono le due condizioni di §6.2.3. Il primo è $\alpha(v^\sharp) = v$, siccome $\alpha_p((v^\sharp)_p) = a_5(p)v$ questo è equivalente a $a_5(p) = 1$ per ogni $p \in P$. L'ultima condizione è $R_g^*\alpha = Ad_{g^{-1}}\alpha$ per ogni $g \in G$, siccome G è abeliano questo vuole dire $R_g^*\alpha = \alpha$. Per definizione del pull-back (§5.2.5) si ha $(R_w^*\alpha_p)(X) = \alpha_{R_w(p)}((\mathrm{d}R_w)_p X)$. Siccome $R_w((x,t),u) = ((x,t),u+w)$ e quindi il differenziale di R_w è l'identità $id_{\mathbb{R}^5} = \mathrm{d}R_w = J(R_w) : \mathbb{R}^5 = T_pP \to T_{R_w(p)}P = \mathbb{R}^5$, si ha $R_g^*\alpha = \alpha$ se e solo se $a_i((x,t),u) = a_i((x,t),u+w)$ per ogni $w \in G = \mathbb{R}$, cioè nessun a_i dipende da u. Le a_i sono quindi funzioni su M: $a_i((x,t),u)) = a_i(x,t)$. Perciò le 1-forme di connessione su P sono le 1-forme

$$\alpha = a_1 \mathrm{d}x_1 + a_2 \mathrm{d}x_2 + a_3 \mathrm{d}x_3 + a_4 \mathrm{d}t + \mathrm{d}u, \qquad a_1, \ldots, a_4 : M \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

6.6.3 I sottospazi Hor_p. Anche se non serve nel seguito, determiniamo i sottospazi $Hor_p = \ker(\alpha_p) \subset T_pP$ per $p \in P$. Per un vettore tangente $X = (X_1, \ldots, X_5) \in T_pP$ si ha $\alpha_p(X) = a_1(p)X_1 + \ldots + a_4(p)X_4 + X_5$. Quindi la connessione definita da α è data da

$$Hor_p = \left\{ \big(X_1, \ldots, X_4, -\sum_{i=1}^{4} a_i(p)X_i\big) : X_i \in \mathbb{R} \right\} .$$

La decomposizione $T_pP = Hor_p \oplus Vert_p$ è quindi

$$X = X^H + X^V, \quad (X_1, \ldots, X_5) = \big(X_1, \ldots, X_4, -\sum_{i=1}^{4} a_i(p)X_i\big) + \big(0, 0, 0, 0, X_5 + \sum_{i=1}^{4}(a_i(p)X_i\big) .$$

6.6.4 Il potenziale di gauge $\mathcal{A}$. Ogni gauge, cioè ogni sezione $\sigma : M \to P$ del fibrato P, deve soddisfare $\pi(\sigma(x,t)) = (x,t)$ e quindi è data da $\sigma((x,t)) = ((x,t), f(x,t))$ per una funzione liscia f su M, questa sezione è scritto σ_f. Il pull-back di α, una 1-forma su M, detto potenziale di gauge e scritto $\mathcal{A}_f$ è:

$$\mathcal{A}_f := \sigma_f^*\alpha, \qquad \text{quindi} \quad (\mathcal{A}_f)_{(x,t)}(X') = \alpha_{f(x,t)}((\mathrm{d}\sigma)_{(x,t)})X') \quad (X' \in T_{(x,t)}M) .$$

Si noti che

$$(\mathrm{d}\sigma)_{(x,t)} : T_{(x,t)}M = \mathbb{R}^4 \to T_{\sigma(x,t)}P = T_{(x,t)}M \times T_{f(x,t)}\mathbb{R} = \mathbb{R}^5$$

è data dalla matrice 5×4 con blocco sopra I_4 e ultima riga $df = J(f)$. Siccome $a_i((x,t),u)) = a_i(x,t)$ possiamo interpretare gli a_i come funzioni su M e troviamo (cioè basta sostituire $u = f$ in α per trovare $\mathcal{A}_f$):

$$\mathcal{A}_f = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + a_3\mathrm{d}x_3 + a_4\mathrm{d}t + \mathrm{d}f, \qquad a_1, \ldots, a_4 : M \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Notiamo che la differenza tra due pull-back, $\mathcal{A}_f - \mathcal{A}_g = \mathrm{d}f - \mathrm{d}g = \mathrm{d}(f-g)$, è il differenziale della funzione $f - g$. Quindi $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_g + \mathrm{d}h$ per una funzione liscia h su M. Perciò il potenziale di gauge cambia per un differenziale (un gradiente per fisici) se cambiamo il gauge, similmente all'ambiguità del quadripotenziale.

6.6.5 Il campo $\mathcal{F}$. La curvatura Ω della connessione definita da α è la due forma su P (con valori in $T_0G = \mathbb{R}$) definita da $\Omega(X,Y) = \mathrm{d}\alpha(X^H, Y^H)$. Dalla formula di Cartan, $\Omega = \mathrm{d}\alpha + (1/2)\alpha \wedge \alpha$ (vedi §6.2.5). Visto che $G = \mathbb{R}$ è 1-dimensionale il prodotto (alternante!) su T_eG deve essere banale, se $T_eG = \mathbb{R}v$ allora $[v,v] = -[v,v]$ quindi $[v,v] = 0$. Ma allora $\alpha \wedge \alpha = 0$ e troviamo

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}\alpha(X^H, Y^H) = \mathrm{d}\alpha(X,Y) .$$

Consideriamo il campo $\mathcal{F}_f := \sigma_f^*\Omega$ su M. Si ha

$$\mathcal{F}_f := \sigma_f^*\Omega = (\sigma_f^*\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(\sigma_f^*\alpha) = \mathrm{d}\mathcal{A}_f .$$

Come visto, se cambia la guage, $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_g + \mathrm{d}h$, ma allora $\mathcal{F}_f = \mathrm{d}(\mathcal{A}_g + \mathrm{d}h) = \mathrm{d}\mathcal{A}_g = \mathcal{F}_g$ perché $\mathrm{d}^2 = 0$. Concludiamo che il campo non dipende dalla gauge σ_f (infatti il gruppo G è abeliano e quindi $Ad_{g^{-1}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$).

Un altro modo per calcolare Ω sfrutta la determinzione di X^H in §6.6.3. Si noti che, visto che $a_5 = 1$ e $\mathrm{d}(\mathrm{d}u) = 0$, si ha (scriviamo $t = x_4$ per semplificare la notazione):

$$\mathrm{d}\alpha \;=\; \mathrm{d}(a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + a_3\mathrm{d}x_3 + a_4\mathrm{d}t + \mathrm{d}u) = \sum_{1\leq i<j\leq 4} b_{ij}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \;,$$

dove $b_{ij} = \partial a_i/\partial x_i - \partial a_j/\partial x_i$. Visto che per $X = (X_1, \ldots, X_4, X_5)$ si ha $X^H = (X_1, \ldots, X_4, X_5')$ come sopra, ma che non compare una $\mathrm{d}u$ in $\mathrm{d}\alpha$, si ha

$$\Omega(X,Y) \;=\; \mathrm{d}\alpha(X^H, Y^H) \;=\; \mathrm{d}\alpha(X,Y) \;,$$

quindi troviamo di nuovo che $\Omega = \mathrm{d}\alpha$.

6.6.6 Conclusioni. Quindi, data una connessione su P, e scelta una gauge σ_f, si ottiene una 1-forma $\mathcal{A}_f$ su M che è determinata a meno del differenziali di una funzione lisca su M. Inoltre, il campo $\mathcal{F}_f$, una 2-forma su M ottenuto tramitte la curvatura della connessione, è dato dalla derivata esterna della 1-forma $\mathcal{A}_f$. Come visto, $F := \mathcal{F}_f$ non dipende dalla gauge. Il campo F soddisfa $\mathrm{d}F = \mathrm{d}^2\mathcal{A}_f = 0$ e perciò soddisfa due delle quattro equazioni di Maxwell.

Per ulteriori applicazioni alla fisica è importante usare il gruppo di Lie $U(1)$ invece di $\mathbb{R}$ (qui sopra era soltanto importante che T_eG è uno spazio vettoriale di dimensione uno). Nella teoria di fibrati principali si definiscono equazioni di Yang-Mills per connessioni (tramitte equazioni differenziali sulla curvatura Ω). Da queste equazioni si ottengono le altre due equazioni di Maxwell.

Una connessione sul fibrato principale P che soddisfa l'equazioni di Yang-Mills definisce allora un campo elettromagnetico. La teoria di gauge permette anche di considere la quantizatione delle carica elettrica, i monopoli e l'interazioni tra campi elettromagnetici e particelli, vedi i libri di Naber per esempio.

Le connessioni su fibrati principali con i gruppi di Lie non-abeliani $SU(2)$ e $SU(3)$ sono di particolare interesse per la teoria delle particelle elementari.

References

[AT] M. Abate, F. Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer Verlag 2011.

[B] W.M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press 1986.

[CR] P. Cotta-Ramusino, *Geometria differenziale e teoria di gauge*, appunti.

[dC] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.

[D] R.W.R. Darling, *Differential forms and connections*, Cambridge University Press, 1994.

[DNF1] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, *Geometria delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi*, Editori Riuniti 1987.

[DNF2] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, *Geometria e topologia delle varietà*, Editori Riuniti 1988.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. I. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., 1996

[N1] G.L. Naber, *Topology, geometry, and gauge fields, Foundations*, TAM 25, Springer 1997.

[N2] G.L. Naber, *Topology, geometry, and gauge fields. Interactions*, AMS 141, Springer 2000.

[Tu] L.W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer 2011.